

Коллективное излучение атомов в материалах с фотонной щелью

В.И.Юкалов

Рассмотрена система резонансных атомов, внедренных в вещество с запрещенной фотонной щелью. Предполагается, что резонансная частота перехода находится внутри этой щели. Спонтанное излучение одиночного атома при этом подавлено, что называется локализацией света. Показано, что если плотность атомов, внедренных в материал, достаточно велика, то может возникнуть когерентное взаимодействие между атомами, в результате которого система атомов может излучать один или серию когерентных импульсов.

Ключевые слова: материалы с фотонной щелью, когерентное излучение.

Введение

Существует класс веществ, в которых электромагнитные волны с частотой внутри некоторого диапазона частот $[\Omega_1, \Omega_2]$ не могут распространяться. Такие вещества называются материалами с запрещенной фотонной щелью [1–3], ширина которой $\Delta_p \equiv \Omega_2 - \Omega_1$. В зависимости от физических механизмов, создающих запрещенную фотонную щель, можно различать два типа таких материалов. К наиболее известному типу относятся материалы с искусственно созданной периодической структурой, где фотонная щель возникает вследствие пространственной периодичности образца [1, 2]. Именно их обычно и называют материалами с фотонной щелью [3].

Однако запрещенная фотонная щель может возникать и другим образом – в результате взаимодействия фотонов с коллективными оптическими возбуждениями среды, такими как оптические фононы, магноны и экситоны [4, 5]. В последнем случае фотонная щель называется поляритонной щелью. Вне зависимости от физической природы щели оба ее типа могут быть описаны одинаковыми математическими моделями [6, 7].

Если в среду с фотонной щелью внедрен резонансный атом, частота перехода которого лежит внутри этой щели, то спонтанное излучение такого атома подавлено. Возбужденный атом не может релаксировать в нижнее состояние, испуская фотон, т. к. распространение фотона внутри щели запрещено. Это явление называется локализацией света. Математически оно может быть выражено условием

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle \sigma^z(t) \rangle = \zeta > 0,$$

в котором σ^z – оператор Паули, а угловые скобки означают статистическое усреднение.

Известно, что кроме резонансных процессов всегда существуют различные нерезонансные процессы. Хотя вероятность последних может быть значительно меньше вероятности резонансных процессов в вакууме, тем не менее атом, конечно, в конце концов релаксирует в нижнее состояние за счет нерезонансных процессов. В связи с этим, строго говоря, приведенный выше предел следует понимать как условие

$$\langle \sigma^z(t) \rangle = \zeta > 0, \quad T_{\text{res}} \ll t \ll T_{\text{non}},$$

в котором T_{res} – характерное время спонтанного излучения резонансного атома в вакууме; T_{non} – характерное время излучения через нерезонансные процессы в веществе. Типичное время жизни большинства атомных уровней имеет порядок 10^{-8} с [8], тогда как характерные времена нерезонансных процессов составляют 0.1 – 100 с. Это означает, что хотя локализация света и не может длиться бесконечно долго, время ее существования гораздо больше, чем T_{res} . Локализация света аналогична замораживанию распада квантовой системы, взаимодействующей с термостатом по специфическому закону [9].

Для микроскопического описания локализации света обычно рассматриваются стационарные модели с одним внедренным атомом [6, 7, 10]. На основании рассмотрения таких моделей было также обнаружено, что если в вещество внедряется достаточно много атомов, то внутри запрещенной зоны может появиться примесная зона, в которой, в принципе, могут распространяться электромагнитные волны [10–12]. Однако для корректного описания физических процессов и условий делокализации света необходимо рассматривать реальную задачу о неравновесном поведении атомов, внедренных в вещество с фотонной щелью.

Динамика системы резонансных атомов с частотой перехода на краю фотонной щели рассматривалась в работах [13–15] на примере сосредоточенной модели Дике. Тем не менее использование этой модели для задачи о локализации света нельзя признать реалистичным. Действительно, сосредоточенная модель предполагает, что длина волны излучения гораздо больше размеров образца. С другой стороны, сама локализация света состоит в

Объединенный институт ядерных исследований, лаборатория теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова, Россия, 141980 Дубна Моск. обл.

том, что возбужденный атом излучает фотон, распространяющийся на длину локализации порядка нескольких длин волн. В результате отражения от рассеивателей, которыми, в зависимости от вещества, могут быть пространственные структуры или оптические коллективные возбуждения, излученный фотон возвращается к атому и вновь поглощается им.

Именно это и является физической картиной локализации света. Из нее очевидно, что говорить о локализации света допустимо только тогда, когда длина локализации, а следовательно, и длина волны, гораздо меньше характерных размеров образца. В случае же сосредоточенной модели, в которой длина волны гораздо больше размеров образца, говорить о локализации света не имеет смысла.

Одномерная модель атомов, внедренных в среду с фотонной щелью и с керровской нелинейностью, рассматривалась в работе [16]. Однако там, как и в работах [13–15], резонансная частота атомов предполагалась лежащей либо на краю фотонной щели, либо далеко вне ее. Целью исследования [16] было изучение возникновения коротких солитонов.

Физическая постановка задачи и цели настоящей статьи принципиально отличаются от постановки соответствующих задач и целей опубликованных ранее работ других авторов. Во-первых, рассматривается реальная *трехмерная динамическая* проблема, базирующаяся на микроскопическом гамильтониане системы атомов, внедренных в среду. Во-вторых, считается, что длина волны излучения *много меньше* размеров образца, что является необходимым условием возникновения локализации. В-третьих, резонансная частота атомов предполагается лежащей *глубоко внутри* фотонной щели, когда спонтанное излучение одиночного атома практически полностью подавлено. Цель данной работы – найти условия, при которых за счет коллективных нелинейных эффектов становится возможной делокализация света.

1. Гамильтониан модели

Систему резонансных атомов в веществе можно описать [17] гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{H}_a + \hat{H}_f + \hat{H}_{af} + \hat{H}_m + \hat{H}_{mf}, \tag{1}$$

состоящим из следующих слагаемых:

$$\hat{H}_a = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \omega_0 (1 + \sigma_i^z) \tag{2}$$

– гамильтониан двухуровневых резонансных атомов с частотой перехода ω_0 ;

$$\hat{H}_f = \frac{1}{8\pi} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) d\mathbf{r} \tag{3}$$

– гамильтониан поля излучения, где \mathbf{E} – электрическое поле; $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ – магнитное поле; \mathbf{A} – векторный потенциал, для которого предполагается кулоновская калибровка $\nabla \mathbf{A} = 0$;

$$\hat{H}_{af} = - \frac{1}{c} \sum_{i=1}^N \mathbf{j}_i \mathbf{A}_i \tag{4}$$

– гамильтониан взаимодействия атомов с полем излучения, где $\mathbf{j}_i = i\omega_0(d\sigma_i^+ - d^*\sigma_i^-)$ – ток перехода; \mathbf{d} – ди-

польный момент перехода; σ_i^\pm – лестничные операторы; c – скорость света; $\mathbf{A}_i \equiv \mathbf{A}(\mathbf{r}_i, t)$;

$$\hat{H}_{mf} = - \frac{1}{c} \sum_{i=1}^{N_0} \mathbf{j}_{mi} \mathbf{A}_i \tag{5}$$

– гамильтониан взаимодействия вещества с полем излучения; где \mathbf{j}_{mi} – электрический ток, создаваемый частицами вещества; \hat{H}_m – гамильтониан вещества, который можно моделировать системой осцилляторов; вместо задания конкретной формы \hat{H}_m можно моделировать эффективное взаимодействие атомов со средой. В дальнейшем будет использован этот последний способ моделирования.

2. Уравнения движения

При выводе уравнений движения будем использовать метод исключения полевых переменных [18]. Для последних из операторных уравнений Максвелла несложно получить

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{vac} + \mathbf{A}_{rad} + \mathbf{A}_{mat}, \tag{6}$$

где \mathbf{A}_{vac} – векторный потенциал вакуумных флуктуаций;

$$\mathbf{A}_{rad}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_j \frac{1}{cr_{ij}} \mathbf{j}_j \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right), \tag{7}$$

$$\mathbf{A}_{mat}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_j \frac{1}{cr_{ij}} \mathbf{j}_{mj} \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right)$$

– векторные потенциалы, создаваемые атомами и веществом соответственно; $r_{ij} \equiv |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$; суммирование не учитывает слагаемых с $j = i$. Совместное воздействие вакуума и вещества на атомы эквивалентно влиянию эффективного вакуума, характеризующегося векторным потенциалом

$$\mathbf{A}_{eff}(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{A}_{vac}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}_{mat}(\mathbf{r}, t). \tag{8}$$

Влияние этого эффективного вакуума на атомы описывается величиной

$$\xi_i(t) \equiv k_0 d \mathbf{A}_{eff}(\mathbf{r}_i, t), \tag{9}$$

определяемой как стохастическая переменная, где $k_0 \equiv \omega_0/c$.

Подставляя в уравнения Гейзенберга для атомных переменных σ_i^z и σ_i^\pm операторные соотношения (6)–(8), удастся исключить из уравнений движения полевые переменные \mathbf{A} и \mathbf{E} . При этом число уравнений становится меньшим, но появляются нелинейные слагаемые, отвечающие эффективному взаимодействию атомов, индуцированному полем излучения. В уравнениях для атомных операторов остается стохастическая переменная (9), моделирование которой эквивалентно моделированию свойств вещества с внедренными атомами. Усреднив уравнения движения по атомным степеням свободы, введем обозначения

$$u_i(t) \equiv \langle \sigma_i^-(t) \rangle', \quad s_i(t) \equiv \langle \sigma_i^z(t) \rangle', \tag{10}$$

где штрих означает, что усреднение ведется только по

атомным переменным, а стохастическая переменная (9) не затрагивается. При таком неполном усреднении полагаем, что

$$\langle \sigma_i^\alpha \sigma_j^\beta \rangle' = \langle \sigma_i^\alpha \rangle' \langle \sigma_j^\beta \rangle' \quad (i \neq j). \quad (11)$$

Запаздывание в векторных потенциалах (7) учтем в борновском приближении:

$$\langle \sigma_j^- \left(t - \frac{r_{ij}}{c} \right) \rangle' = \langle \sigma_j^- (t) \rangle' \exp(ik_0 r_{ij}). \quad (12)$$

Расщепление (11) похоже на полуклассическое приближение, однако оно не эквивалентно последнему, т. к. при соответствующих усреднениях не затрагивается стохастическая переменная (9). В результате расщепления (11) для величин $\langle \sigma_i^\alpha \rangle'$ получается замкнутая система уравнений. Однако эти уравнения – стохастические, поскольку в них явно содержится стохастическая переменная (9). При вычислении наблюдаемых величин по последней проводится усреднение. Такой подход позволяет учесть локальные квантовые флуктуации, что отличает его от полуклассического приближения, поэтому расщепление (11) можно назвать стохастическим приближением среднего поля [17].

Для более компактной записи уравнений движения введем обозначение

$$f_i(t) \equiv k_0 \langle d\mathbf{A}_{\text{rad}}(r_i, t) \rangle' + \xi_i(t). \quad (13)$$

Перейдем также к континуальному представлению, полагая, что функции (10) зависят от непрерывного вектора \mathbf{r} , так что

$$u = u(\mathbf{r}, t), \quad s = s(\mathbf{r}, t).$$

При этом суммирование по i от единицы до N заменим интегрированием $\rho \int d\mathbf{r}$, в котором $\rho \equiv N/V$ – плотность резонансных атомов. Вводя функцию

$$v = v(\mathbf{r}, t) \equiv |u(\mathbf{r}, t)|^2, \quad (14)$$

приходим к следующим уравнениям движения:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -(i\omega_0 + \gamma_2)u + fs, \\ \frac{ds}{dt} &= -2(u^*f + f^*u) - \gamma_1(s - \zeta), \\ \frac{dv}{dt} &= -2\gamma_2v + s(u^*f + f^*u). \end{aligned} \quad (15)$$

Так как величина $f = f(\mathbf{r}, t)$, согласно определению (13), содержит стохастическую переменную $\xi = \xi(\mathbf{r}, t)$, заданную в равенстве (9), то уравнения (15) являются стохастическими дифференциальными уравнениями. В них включены слагаемые, содержащие продольную (γ_1) и поперечную (γ_2) константы релаксации, а параметр ζ , близкий к средней начальной разности населенностей

$$s_0 \equiv \frac{1}{V} \int s(\mathbf{r}, 0) d\mathbf{r},$$

учитывает подавление спонтанного излучения отдельно-го атома.

Вообще говоря, при подавлении спонтанного излучения отдельного атома в зависимости от соотношения между характерными временами T_1 и T_{non} возможны две физически различные ситуации – динамическое подавление при $T_1 \ll T_{\text{non}}$ и статическое подавление при $T_1 \sim T_{\text{non}}$. В первом случае в уравнениях движения необходимо удерживать константу релаксации γ_1 , тогда как во втором следует положить $\gamma_1 = 0$.

3. Возможность излучения

При анализе эволюционных уравнений (15) предположим, что в образце не возникают пространственные электромагнитные структуры. Тогда можно использовать однородное приближение, полагая, что функции u, s, v не зависят от пространственной переменной. В этом приближении

$$k_0 \langle d\mathbf{A}_{\text{rad}} \rangle' = \gamma_2 (G^* u + Gu^* e_d^2),$$

где

$$G \equiv \frac{3\gamma\rho}{4\gamma_2} \int \frac{\sin(k_0 r) + i \cos(k_0 r)}{k_0 r} d\mathbf{r}; \quad (16)$$

$\gamma \equiv 4k_0^3 |d|^2 / 3$ – естественная ширина линии. Введем также коллективную частоту

$$\Omega \equiv \omega_0 + \gamma_2 g' s \quad (17)$$

и коллективное затухание

$$\Gamma \equiv \gamma_2 (1 - gs), \quad (18)$$

где

$$g \equiv \text{Re} G = \frac{3\gamma\rho}{4\gamma_2} \int \frac{\sin(k_0 r)}{k_0 r} d\mathbf{r}; \quad (19)$$

$$g' \equiv \text{Im} G = \frac{3\gamma\rho}{4\gamma_2} \int \frac{\cos(k_0 r)}{k_0 r} d\mathbf{r}.$$

Тогда уравнения (15) приводятся к виду

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -(i\Omega + \Gamma)u + s\xi + \gamma_2 Gsu^* e_d^2, \\ \frac{ds}{dt} &= -4\gamma_2 gv - 2(u^*\xi + \xi^*u) - \gamma_1(s - \zeta) \\ &\quad - 2\gamma_2 [G(u^* e_d)^2 + G^*(e_d^* u)^2], \\ \frac{dv}{dt} &= -2\Gamma v + s(u^*\xi + \xi^*u) + \gamma_2 s [G(u^* e_d)^2 + G^*(e_d^* u)^2], \end{aligned} \quad (20)$$

где $e_d \equiv d/d$.

Величины (16) и (19) являются параметрами атом-атомной связи. Связь атомов с эффективным вакуумом, индуцирующим векторный потенциал (8), характеризуется функцией

$$\alpha \equiv \frac{1}{s\Gamma} \text{Re} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \langle \langle u^*(t) \xi(t) \rangle \rangle dt, \quad (21)$$

в которой двойные угловые скобки означают усреднение по стохастической переменной (9).

Уравнения (20) можно решить, привлекая метод разделения масштабов [19, 20], являющийся обобщением метода усреднения [21] на случай стохастических дифференциальных уравнений. Применение метода разделения

масштабов [19, 20] оказывается возможным благодаря наличию малых параметров

$$\frac{\gamma_1}{\omega_0} \ll 1, \quad \frac{\gamma_2}{\omega_0} \ll 1, \quad |\alpha| \ll 1. \quad (22)$$

Неравенства (22) позволяют классифицировать функцию u как быструю по сравнению с медленными функциями s, v . Полагая последние квазиинвариантами, для быстрой функции находим

$$u(t) = \left[u_0 + s \int_0^t e^{i(\Omega+\Gamma)t'} \xi(t') dt' \right] e^{-i(\Omega+\Gamma)t}, \quad (23)$$

где $u_0 = u(0)$. Тогда α (21), характеризующее связь атомов с материей, при условии $\langle\langle \xi \rangle\rangle = 0$ принимает вид

$$\alpha = \frac{1}{\Gamma} \text{Re} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \int_0^t e^{-i(\Omega+\Gamma)(t-t')} \langle\langle \xi^*(t) \xi(t') \rangle\rangle dt'. \quad (24)$$

При интегрировании (24) медленные переменные считаются фиксированными. Конкретный пример вычисления α (24) будет приведен в следующем разделе. Подставляя быструю функцию (23) в уравнения для медленных функций и усредняя правые части уравнений по времени и по стохастической переменной, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= -4g\gamma_2(v - \alpha s^2) - \bar{\gamma}_1(s - \bar{\zeta}), \\ \frac{dv}{dt} &= -2\gamma_2(1 - gs)(v - \alpha s^2) \end{aligned} \quad (25)$$

для медленных функций, где

$$\bar{\gamma}_1 \equiv \gamma_1 + 4\gamma_2\alpha; \quad \bar{\zeta} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1} \zeta.$$

Рассмотрим сначала более общий случай, когда $\gamma_1 \neq 0$. Для выяснения условий, при которых происходит делокализация света, надо исследовать поведение решений s, v при $t \rightarrow \infty$, т. е. стационарные точки уравнений (25). Анализ показывает, что при $g\bar{\zeta} < 1$ стационарными решениями являются

$$s_1^* = \bar{\zeta}, \quad v_1^* = \alpha \bar{\zeta}^2.$$

Здесь и далее для простоты полагаем, что коэффициент связи $|\alpha| \approx \text{const}$. Поскольку $|\alpha| \ll 1$, то $\bar{\zeta} \approx \zeta$ и делокализации света практически не происходит.

При $g\bar{\zeta} > 1$ решения уравнений (25) стремятся к фиксированной точке

$$s_2^* = \frac{1}{g}, \quad v_2^* = \frac{\bar{\gamma}_1(g\bar{\zeta} - 1)}{4\gamma_2g^2} + \frac{\alpha}{g^2}.$$

В этом случае имеет место частичная делокализация света, т. к. $1/g < \zeta$. «Освобождение» света осуществляется либо посредством одного широкого импульса излучения, либо, при условии

$$g\bar{\zeta} > 1 + \frac{\bar{\gamma}_1}{8\gamma_2},$$

через серию узких когерентных импульсов. При $t \rightarrow \infty$ промежутки времени между соседними импульсами

$$T_\infty = \frac{4\pi}{\left[8(g\bar{\zeta} - 1)\bar{\gamma}_1\gamma_2 - \bar{\gamma}_1^2 \right]^{1/2}}.$$

Таким образом, делокализация света через коллективное излучение атомов возможна при их достаточно сильном когерентном взаимодействии, таком, что справедливо $g\bar{\zeta} > 1$, что эквивалентно неравенству

$$\frac{g\bar{\zeta}\gamma_1}{\gamma_1 + 4\alpha\gamma_2} > 1. \quad (26)$$

Последнее, учитывая, что $\zeta \approx s_0$ и $|\alpha| \ll 1$, сводится к условию

$$gs_0 > 1. \quad (27)$$

Рассмотрим теперь случай, когда продольная релаксация полностью подавлена, так что $\gamma_1 = 0$. При этом из уравнений (25) находим

$$s(t) = -\frac{\gamma_0}{g\gamma_2} \tanh\left(\frac{t-t_0}{\tau_0}\right) + \frac{1}{g},$$

где

$$\gamma_0 \equiv 2g|s_0|\gamma_2\sqrt{\alpha_c - \alpha} \equiv \frac{1}{\tau_0};$$

$$\alpha_c \equiv \left| \frac{gs_0 - 1}{2gs_0} \right|^2 + \left| \frac{u_0}{s_0} \right|^2;$$

$$t_0 \equiv \frac{\tau_0}{2} \ln \left| \frac{\gamma_0 - \gamma_2(1 - gs_0)}{\gamma_0 + \gamma_2(1 - gs_0)} \right|.$$

Условие делокализации подразумевает неравенство $s(\infty) < s_0$, причем делокализация должна происходить за времена $t_0 \ll T_1$. Так как

$$s(\infty) = -2|s_0|\sqrt{\alpha_c - \alpha} + \frac{1}{g},$$

то в качестве условия делокализации света находим

$$g(s_0 + 2|s_0|\sqrt{\alpha_c - \alpha}) > 1. \quad (28)$$

Наиболее интересен случай, когда в начальный момент времени атомы не подвергаются воздействию внешних когерентных импульсов, так что $u_0 = 0$. Тогда, в предположении, что $\alpha \ll \alpha_c$, неравенство (28) переходит в условие (27). Если параметр атом-атомной связи велик ($g \gg 1$), то $\alpha_c \approx 1/4$ и $s(\infty) \approx -|s_0|$, т. е. освобождение света происходит практически полностью.

Интересно сравнить условия делокализации с условием сверхизлучения [22]. Последнее имеет место, если $\tau_0 < T_2$, что в нашем случае дает

$$2g|s_0|\sqrt{\alpha_c - \alpha} > 1. \quad (29)$$

Отсюда для $u_0 = 0, \alpha \ll \alpha_c$ получаем

$$gs_0 > 2. \quad (30)$$

Таким образом, условия делокализации (27) и сверхизлучения (30) хотя и близки по смыслу, но не тождественны.

4. Поляритонная щель

Для более полного понимания ситуации необходимо пояснить, как вычисляется коэффициент связи α (24). Рассмотрим для конкретности вещество с запрещенной поляритонной щелью. Ярко выраженный поляритонный эффект существует во многих диэлектриках и полупро-

водниках [4, 5, 23], например таких, как CuCl, CuBr, CdSe, ZnSe, GaAs, GaSb, InAs, AlAs, SiC. При наличии поляритонной щели поляритонный спектр состоит из двух ветвей:

$$0 \leq \omega_{q1} < \Omega_1, \quad \Omega_2 \leq \omega_{q2} < \infty, \quad (31)$$

где q – волновое число. Ширина щели $\Delta_p \equiv \Omega_2 - \Omega_1 > 0$. Частоты нижнего и верхнего краев щели связаны между собой соотношением $\varepsilon_0 \Omega_1^2 = \varepsilon_\infty \Omega_2^2$, в котором ε_0 и ε_∞ – диэлектрические проницаемости для статического и высокочастотного полей соответственно. Поляритонный спектр кубического кристалла задается двумя ветвями

$$\omega_{qs}^2 = \frac{1}{2} \left\{ \Omega_2^2 + c^2 q^2 \pm \left[(\Omega_2^2 + c^2 q^2)^2 - 4\Omega_1^2 c^2 q^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad (32)$$

где c – скорость света в среде, связанная со скоростью света в вакууме c_0 равенством $c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_\infty}$. При учете поляритонного затухания, характеризуемого константой $\Gamma_p \sim 10^{12} \text{ с}^{-1}$, дисперсионное соотношение принимает вид

$$\frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{\Omega_2^2 - \omega^2}{\Omega_1^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma_p}. \quad (33)$$

При задании усредненной стохастической переменной $\xi(t)$, входящей в (24), необходимо принять во внимание геометрию образца. В дальнейшем будем подразумевать, что образец имеет форму цилиндра с радиусом R , длиной L (причем $R \ll L$) и объемом $V = \pi R^2 L$. Ось цилиндра выделяется затравочной модой e^{ikz} с волновым числом $k \approx k_0 \equiv \omega_0/c$. Тогда

$$\xi(t) = \frac{1}{N_0} \sum_{i=1}^{N_0} \xi_i(t) e^{-ikz_i}, \quad (34)$$

где $\xi_i(t)$ определено в (9). Эффективный векторный потенциал

$$A_{\text{eff}}(\mathbf{r}_i, t) = \sum_j \frac{1}{cr_{ij}} \mathbf{J}_{\text{eff}}(\mathbf{r}_j, t - \frac{r_{ij}}{c})$$

задается током среды $\mathbf{J}_{\text{eff}}(\mathbf{r}_j, t) = (e/m)\mathbf{p}_j(t)$, в котором e и m – заряд и масса иона, а момент \mathbf{p}_j задается вторичной квантованной формой

$$\mathbf{p}_j(t) = -i \sum_{q,s} \left(\frac{m\omega_{qs}}{2N_0} \right)^{1/2} (b_{qs} e^{-i\omega_{qs}t} - b_{-qs}^+ e^{i\omega_{qs}t}) \mathbf{e}_{qs} e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}_j},$$

где суммирование по s включает суммирование по двум ветвям спектра, а также по двум поперечным поляризациям.

Таким образом, стохастическую переменную можно моделировать выражением

$$\begin{aligned} \xi(t) = & -i \sum_{q,s} k k_0 \mathbf{d}\mathbf{e}_{qs} \left(\frac{r_e \omega_{qs}}{2N_0} \right)^{1/2} \\ & \times \left(\varphi_{qs} b_{qs} e^{-i\omega_{qs}t} - \varphi_{-qs} b_{qs}^+ e^{i\omega_{qs}t} \right), \end{aligned} \quad (35)$$

в котором $r_e \equiv e^2/mc^2$;

$$\varphi_{qs} \equiv \frac{1}{N_0} \sum_{i \neq j} \frac{1}{kr_{ij}} \exp\left(i \frac{\omega_{qs}}{c} r_{ij} + i\mathbf{q}\mathbf{r}_j - ikz_i\right); \quad (36)$$

$$\varphi_{-qs} \equiv \frac{1}{N_0} \sum_{i \neq j} \frac{1}{kr_{ij}} \exp\left(-i \frac{\omega_{qs}}{c} r_{ij} - i\mathbf{q}\mathbf{r}_j - ikz_i\right). \quad (37)$$

При усреднении по бозевским операторам b_{qs} имеем

$$\langle\langle b_{qs}^+ b_{q's'} \rangle\rangle = \delta_{qq'} \delta_{ss'} n_{qs}, \quad \langle\langle b_{qs} b_{q's'} \rangle\rangle = 0,$$

где $n_{qs} = (e^{\beta\omega_{qs}} - 1)^{-1}$. Учитывая это, находим коррелятор

$$\begin{aligned} \langle\langle \xi^*(t) \xi(t') \rangle\rangle = & \sum_{q,s} \frac{kr_e k_0^3}{2N_0} |\mathbf{d}\mathbf{e}_{qs}|^2 \omega_{qs} \left[|\varphi_{qs}|^2 n_{qs} e^{i\omega_{qs}(t-t')} \right. \\ & \left. + |\varphi_{-qs}|^2 (1 + n_{qs}) e^{-i\omega_{qs}(t-t')} \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Подставляя (38) в (24), получаем

$$\begin{aligned} \alpha = & \sum_{q,s} \frac{kr_e k_0^3}{2N_0} |\mathbf{d}\mathbf{e}_{qs}|^2 \omega_{qs} \left[\frac{n_{qs} |\varphi_{qs}|^2}{(\Omega - \omega_{qs})^2 + \Gamma^2} \right. \\ & \left. + \frac{(1 + n_{qs}) |\varphi_{-qs}|^2}{(\Omega + \omega_{qs})^2 + \Gamma^2} \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Переходя в (36), (37) от суммирования к интегрированию, используем равенство

$$\frac{1}{V} \int e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\mathbf{r}} \mathbf{d}\mathbf{r} = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{k}}.$$

В результате

$$\varphi_{qs} = \delta_{\mathbf{q}\mathbf{k}} \varphi_{ks}, \quad \varphi_{-qs} = \delta_{-\mathbf{q}\mathbf{k}} \varphi_{ks}^*,$$

где

$$\varphi_{ks} \equiv \int \frac{\rho_0}{kr} e^{i(k_s r - kz)} \mathbf{d}\mathbf{r}; \quad (40)$$

$k_s \equiv \omega_{ks}/c$ и $\rho_0 \equiv N_0/V$. Тогда (39) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \alpha = & \sum_s \frac{kr_e}{8N_0} \gamma_{ks} |\varphi_{ks}|^2 \omega_{ks} \left[\frac{n_{ks}}{(\Omega - \omega_{ks})^2 + \Gamma^2} \right. \\ & \left. + \frac{1 + n_{ks}}{(\Omega + \omega_{ks})^2 + \Gamma^2} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

в котором

$$\gamma_{ks} \equiv 3\gamma |\mathbf{e}_d \mathbf{e}_{ks}|^2. \quad (42)$$

Так как $k \approx k_0$ и $\omega_{ks} \sim \omega_0$, то

$$\frac{|k_s - k|}{k} \ll 1. \quad (43)$$

При этом, интегрируя (40) по объему цилиндра аналогично тому, как это было сделано для похожих интегралов в работах [24, 25], получаем

$$\varphi_{ks} = \frac{\pi L}{k^2 a^3} (\pi F - 2F \text{Si } 2F + 1 - \cos 2F +$$

$$+ i \sin 2F - 2iF \text{Ci}(2F), \quad (44)$$

где $F \equiv \pi R^2 / \lambda L$ – число Френеля; $\rho_0 a^3 = 1$; $\text{Si } x$ и $\text{Ci } x$ – интегральные синус и косинус соответственно. В двух предельных случаях малых и больших чисел Френеля имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{ks} &\simeq \frac{\pi L}{k^2 a^3} F(\pi + 2i \ln 2F) \quad (F \ll 1), \\ \varphi_{ks} &\simeq \frac{\pi L}{k^2 a^3} \left(1 + i \frac{\cos 2F}{2F}\right) \quad (F \gg 1). \end{aligned} \quad (45)$$

Для оценки коэффициента атом-поляритонной связи (41) возьмем характерные параметры веществ, упомянутых в начале данного раздела, для которых $\Omega_1 \sim \Omega_2 \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$, $\Delta_p \sim 10^{13} \text{ с}^{-1}$, $\lambda \sim 10^{-3} \text{ см}$, $\gamma \sim 10^8 - 10^9 \text{ с}^{-1}$. Будем считать, что резонансная частота $\omega_0 \sim 10^{14} \text{ с}^{-1}$ лежит глубоко внутри поляритонной щели, и учтем, что $a \sim 10^{-8} \text{ см}$, $r_c \sim 10^{-13} \text{ см}$. Комнатной температуре соответствует частота 10^{13} с^{-1} , поэтому $\beta\omega_k \sim 10$ и $n_k \simeq e^{-\beta\omega_k} \sim 10^{-5}$. Отсюда для коэффициента атом-поляритонной связи (41) получаем $\alpha < 10^{-3}$. Это оправдывает предположение о малости α , сделанное при анализе эволюционных уравнений в разд.3.

Заключение

Исследовалась возможность коллективного излучения атомов, внедренных в среду с фотонной щелью, когда резонансная частота излучения находится глубоко внутри запрещенной зоны, так что спонтанное излучение одиночного атома подавлено. Рассматривалась реалистическая трехмерная система с длиной волны излучения, гораздо меньшей размеров образца. Излучение внедренных атомов становится возможным, если их плотность достигает критической, при которой определяющую роль начинают играть нелинейные эффекты, связанные с коллективным взаимодействием атомов.

Явление, когда одиночный атом излучать не может, так что свет локализован, а в коллективе атомов излучение становится возможным, логично назвать коллективным освобождением света. Критическая плотность атомов, при которой возникает такое коллективное освобождение, зависит от начальных условий и от коэффициентов атом-атомной связи (19) и связи атомов с веществом (24). Как было показано в предыдущем разделе, $\alpha \ll 1$, поэтому перенормировка характерных параметров γ_1 и ζ в уравнениях (25) незначительна: $\bar{\gamma}_1 \approx \gamma_1$, $\bar{\zeta} \approx \zeta \approx s_0$. Из анализа разд.3 следует, что освобождение света становится возможным при $gs_0 > 1$.

Параметр атом-атомной связи g , заданный в (19), зависит от геометрии образца. Для приближенного определения критической плотности внедренных атомов ρ_c , начиная с которой становится возможным коллективное излучение, можно положить $g \approx \rho \lambda^3$; тогда $\rho_c = 1/s_0 \lambda^3$. Для веществ с поляритонной щелью, где $\lambda \sim 10^{-3} \text{ см}$, и для полностью инвертированного начального состояния атомов, когда $s_0 = 1$, $\rho_c \sim 10^9 \text{ см}^{-3}$. При плотности атомов, превышающей ρ_c , должно возникнуть коллективное освобождение света. Предсказание этого эффекта является основным результатом данной статьи.

Автор признателен В.В.Самарцеву и М.Р.Сингху за полезные обсуждения.

1. Yablonovitch E. *Phys.Rev.Letts*, **58**, 2059 (1987).
2. John S. *Phys.Rev.Letts*, **58**, 2486 (1987).
3. Soukoulis C.M. (Ed.) *Photonic bandgap materials* (Dordrecht, Kluwer, 1996).
4. Davydov A.S. *Theory of molecular excitons* (N.Y., Plenum, 1971).
5. Agranovich V.M., Ginzburg V.L. *Crystal optics with spatial dispersion and excitons* (Berlin, Springer, 1984).
6. Rupasov V.I., Singh M. *Phys.Rev.A*, **54**, 3614 (1996).
7. Rupasov V.I., Singh M. *Phys.Rev.A*, **56**, 898 (1997).
8. Drake G.W.F. (Ed.) *Atomic, molecular, and optical physics handbook* (N.Y., Amer. Inst. Phys., 1996).
9. Kilin S.Y., Mogilevtsev D.S. *Laser Phys.*, **2**, 153 (1992).
10. John S., Wang J. *Phys.Rev.B*, **43**, 12772 (1991).
11. Singh M.R., Lau W. *Phys.Stat.Sol.(b)*, **203**, 401 (1997).
12. Singh M.R., Lau W. *Phys.Letts A*, **231**, 115 (1997).
13. John S., Quang T. *Phys.Rev.A*, **50**, 1764 (1994).
14. John S., Quang T. *Phys. Rev. Letts*, **74**, 3419 (1995).
15. Vats N., John S. *Phys.Rev.A*, **58**, 4168 (1998).
16. Aközbek N., John S. *Phys.Rev.E*, **58**, 3876 (1998).
17. Yukalov V.I. *Laser Phys.*, **8**, 1182 (1998).
18. Andreev A.V., Emelyanov V.I., Ilnski Y.A. *Cooperative effects in optics* (Bristol, Inst. Phys., 1993).
19. Yukalov V.I. *Phys.Rev.Letts*, **75**, 3000 (1995).
20. Yukalov V.I. *Phys.Rev.B*, **53**, 9232 (1996).
21. Bogolubov N.N., Mitropolsky Y.A. *Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations* (N.Y., Gordon and Breach, 1961).
22. Allen L., Eberly J.H. *Optical resonance and two-level atoms* (N.Y., Wiley, 1975).
23. Ivanov A.L., Haug H., Keldysh L.V. *Phys.Rep.*, **296**, 237 (1998).
24. Yukalov V.I. *J.Mod.Optics*, **35**, 35 (1988).
25. Yukalov V.I. *J.Mod.Optics*, **37**, 1361 (1990).

V.I.Yukalov. Collective emission of atoms in photonic bandgap materials.

A system of resonant atoms embedded into a photonic bandgap material is considered in the case when the resonant transition frequency lies inside the gap. Spontaneous emission of a single atom is suppressed in this situation, the effect known as light localisation. It is shown that, if the density of the embedded atoms is sufficiently high, the atoms may start to interact coherently, leading to the emission of a single coherent pulse or a series of them.