

# О динамике предельно коротких импульсов в двулучепреломляющих средах

С.В.Сазонов, А.Ф.Соболевский

*Предложена система уравнений, описывающая динамику лазерного импульса, содержащего несколько периодов оптических колебаний (предельно короткого импульса), в области прозрачности среды с наведенным двулучепреломлением, когда неприменимо стандартное для монохроматических сигналов приближение медленно меняющихся огибающих. В условиях малости длины дисперсионного расплывания по сравнению с длиной биений эллипса поляризации найдено приближенное решение в виде бегущего солитоноподобного связанного состояния обыкновенной и необыкновенной компонент. Определены условия устойчивости такого импульса по отношению к самофокусировке.*

**Ключевые слова:** двулучепреломление, предельно короткий импульс, солитон.

## Введение

В последнее десятилетие, благодаря успехам в генерации оптических импульсов длительностью до одного периода электромагнитных колебаний [1, 2], в нелинейной оптике выделилось направление исследований по взаимодействию таких импульсов с веществом. Следуя сложившейся к настоящему времени терминологии, такие лазерные сигналы принято называть предельно короткими импульсами (ПКИ) [3]. Ясно, что в данных теоретических исследованиях неприменимо традиционное для оптики монохроматических сигналов приближение медленно меняющихся амплитуд и фаз [4]. Надо ожидать, что многие хорошо известные для непрерывного света и монохроматических импульсов оптические эффекты приобретут в случае ПКИ дополнительные особенности.

Возможное использование ПКИ в различных оптических информационных системах актуализирует исследования солитонных режимов распространения данных сигналов. Для многих приложений желательно, чтобы импульс распространялся в световоде без изменения состояния поляризации [5]. В таких световодах для подавления малых случайных двулучепреломляющих флуктуаций искусственно создается регулярное двулучепреломление [5]. Наиболее сильное двулучепреломление создается постоянным электрическим полем (эффект Керра), а также статическими деформациями. Таким образом, в исходно изотропной среде возникает одноосная оптическая анизотропия.

Динамика ПКИ в анизотропных одноосных кристаллах, обладающих естественным двулучепреломлением и квадратичной оптической нелинейностью, рассмотрена в [6]. Влияние искусственного двулучепреломления на нелинейную динамику мощных монохроматических импульсов огибающей исследовано достаточно подробно

[7–9]. Целью настоящей работы является получение нелинейных волновых уравнений, описывающих динамику ПКИ в средах с наведенным двулучепреломлением, и исследование при определенных условиях их приближенных решений в виде бегущих уединенных импульсов.

## 1. Феноменологические уравнения

При распространении в двулучепреломляющей среде электрическое поле импульса  $\mathbf{E}$  разбивается на обыкновенную ( $\mathbf{E}_o$ ) и необыкновенную ( $\mathbf{E}_e$ ) компоненты, поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях и распространяющиеся со скоростями  $v_o$  и  $v_e$  соответственно. При  $v_o > v_e$  ось, совпадающая с  $\mathbf{E}_o$ , является «быстрой», а ось, параллельная  $\mathbf{E}_e$ , – «медленной»; при  $v_o < v_e$  ситуация обратная. Предположим, что импульс распространяется вдоль оси  $x$ , перпендикулярной оси  $z$  наведенной оптической анизотропии. Тогда волна  $\mathbf{E}_o$  поляризована вдоль оси  $y$ , перпендикулярной плоскости  $xz$ , а волна  $\mathbf{E}_e$  – вдоль оси  $z$ .

Уравнение Максвелла для обеих компонент имеет вид

$$\Delta E_j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_j}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P_j}{\partial t^2}, \quad j = e, o, \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $P_j$  – поляризация, соответствующая обыкновенной (необыкновенной) компоненте, зависимость которой от  $\mathbf{E}$  находится из материальных уравнений.

Ниже будем считать, что частоты  $\omega$  спектра ПКИ лежат в области прозрачности среды, обусловленной электронно-оптическими квантовыми переходами. Данное условие можно представить в виде [10–12]

$$(\omega_0 \tau_p)^2 \gg 1, \quad (2)$$

где  $\omega_0$  – характерная резонансная частота среды, соответствующая электронно-оптическим переходам;  $\tau_p$  – временной масштаб ПКИ.

Неравенство (2) соответствует медленному измене-

нию профиля импульса при его распространении в среде, в результате чего атомы среды адиабатически отслеживают данное изменение. Малое отставание поляризации от  $E$  является причиной слабой временной дисперсии. В свою очередь нерезонансное взаимодействие импульса со средой приводит к незначительному возбуждению последней, поэтому нелинейность, как и дисперсия, является слабой и оба эффекта могут быть учтены в материальных уравнениях аддитивным образом [10–13]. Это значит, что нелинейной дисперсией (зависимостью нелинейных восприимчивостей от частоты) можно пренебречь как эффектом более высокого порядка малости. Таким образом, при условии (2) тензор нелинейной восприимчивости в области прозрачности можно считать не зависящим от частоты. При этом его компоненты симметричны по всем индексам [14].

Далее будем считать, что в случае кристаллов ось наведенной оптической анизотропии совпадает с одной из кристаллографических осей. В этих условиях тензор линейной восприимчивости диагонален, а тензор, соответствующий кубической оптической нелинейности, имеет наиболее простой вид. Например, в случае кубического кристалла оси  $x, y, z$  должны быть направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей симметрии четвертого порядка [15]. В исходно изотропных средах с наведенным двулучепреломлением отмеченные условия выполняются автоматически.

При выбранной выше геометрии распространения импульса материальные уравнения должны быть инвариантны относительно преобразований  $y \rightarrow -y, z \rightarrow -z$ . Это приводит к следующим зависимостям компонент вектора поляризации среды от электрического поля ПКИ:

$$P_o = \chi_o^{(1)} E_o + \chi_o^{(3)} E_o^3 + \chi_{eo}^{(3)} E_e^2 E_o - \frac{1}{2} \chi_o'' \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$P_e = \chi_e^{(1)} E_e + \chi_e^{(3)} E_e^3 + \chi_{eo}^{(3)} E_o^2 E_e - \frac{1}{2} \chi_e'' \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Здесь  $\chi_o^{(1)} \equiv \chi_{yy}^{(1)}(0), \chi_e^{(1)} \equiv \chi_{zz}^{(1)}(0)$  – компоненты тензора линейной низкочастотной восприимчивости среды для обыкновенной и необыкновенной волн;  $\chi_o^{(3)} \equiv \chi_{yyy}^{(3)}(0,0,0), \chi_e^{(3)} = \chi_{zzz}^{(3)}(0,0,0), \chi_{eo}^{(3)} = 3\chi_{yzy}^{(3)}(0,0,0) = 3\chi_{zyz}^{(3)}(0,0,0) = 3\chi_{zyz}^{(3)}(0,0,0) = 3\chi_{zyzy}^{(3)}(0,0,0) = 3\chi_{zyzy}^{(3)}(0,0,0)$  – параметры, выражающиеся через компоненты тензора нелинейной восприимчивости третьего порядка;  $\chi_{e,o}'' = (\partial^2 \chi_{e,o} / \partial \omega^2)_{\omega=0}$  – коэффициенты, описывающие слабую временную дисперсию линейного нерезонансного отклика среды.

Подставив (3) и (4) в (1), после использования приближения однонаправленного распространения [13] вдоль оси  $x$  получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_o}{\partial x} - \mu \frac{\partial E_o}{\partial \tau} + 3\beta_o E_o^2 \frac{\partial E_o}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} (E_e^2 E_o) \\ + \delta_o \frac{\partial^3 E_o}{\partial \tau^3} = \frac{v_m}{2} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E_o dt', \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e}{\partial x} + \mu \frac{\partial E_e}{\partial \tau} + 3\beta_e E_e^2 \frac{\partial E_e}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial}{\partial \tau} (E_o^2 E_e) \\ + \delta_e \frac{\partial^3 E_e}{\partial \tau^3} = \frac{v_m}{2} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E_e dt', \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\alpha = 2\pi\chi_{eo}^{(3)}v_m/c^2; \beta_j = 2\pi\chi_j^{(3)}v_m/c^2; \delta_j = -\pi v_m \chi_j''/c^2$  ( $j = e, o$ );  $\mu = (v_m/4)(v_e^{-2} - v_o^{-2})$  – параметр, характеризующий расстройку скоростей  $v_e = c/(1 + 4\pi\chi_e)^{1/2}$  и  $v_o = c/(1 + 4\pi\chi_o)^{1/2}$ ;  $v_m$  – некоторая «средняя» скорость, лежащая в промежутке между  $v_e$  и  $v_o$  и определяемая выражением  $v_m^{-2} = (v_o^{-2} + v_e^{-2})/2$ ;  $\tau = t - x/v_m; \Delta_{\perp}$  – поперечный лапласиан.

Рассмотрим систему (5), (6) в пределе монохроматических импульсов. Используя представление

$$E_j = \Psi_j \exp(i\omega\tau - q_j x) + \text{компл. сопр.}, \quad j = e, o, \quad (7)$$

где  $\Psi_j$  – медленно меняющиеся комплексные амплитуды ( $|\partial\Psi_j/\partial\tau| \ll |\omega\Psi_j|, |\partial\Psi_j/\partial x| \ll |q_j\Psi_j|$ ),  $q_j$  – волновые числа в сопутствующей системе отсчета, из (5), (6) в одномерном приближении (при равенстве нулю правых частей (5), (6)) приходим к известной системе, описывающей динамику монохроматического импульса огибающей в двулучепреломляющей среде [5, 7, 8]:

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi_o}{\partial x} - iv \frac{\partial \Psi_o}{\partial T} - \tilde{\delta}_o \frac{\partial^2 \Psi_o}{\partial T^2} - 3 \left( \tilde{\beta}_o |\Psi_o|^2 + \frac{2}{3} \tilde{\alpha} |\Psi_e|^2 \right) \Psi_o \\ - \tilde{\alpha} \Psi_e^2 \Psi_o^* \exp[2i(q_o - q_e)x] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi_e}{\partial x} + iv \frac{\partial \Psi_e}{\partial T} - \tilde{\delta}_e \frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial T^2} - 3 \left( \tilde{\beta}_e |\Psi_e|^2 + \frac{2}{3} \tilde{\alpha} |\Psi_o|^2 \right) \Psi_e \\ - \tilde{\alpha} \Psi_o^2 \Psi_e^* \exp[-2i(q_o - q_e)x] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $T = \tau - 3(\delta_o + \delta_e)\omega^2 x/2; v = \mu + 3(\delta_e - \delta_o)\omega^2/2; \tilde{\alpha} = \omega\alpha; \tilde{\beta}_j = \omega\beta_j; \tilde{\delta}_j = 3\omega\delta_j; q_e = \mu\omega + \delta_e\omega^3, q_o = -\mu\omega + \delta_o\omega^3$  – волновые числа.

Система (8), (9) исследовалась ранее во многих работах. В частности в [8] вариационным методом найдено ее приближенное решение в виде уединенных импульсов огибающей с эллиптической поляризацией. При длине двулучепреломляющих биений эллипса поляризации [4]  $L_b = 2\pi/|q_o - q_e| \gg l_d = 1/(\tilde{\delta}_o\omega^2)$ , где  $l_d$  – длина дисперсионного расщепления волнового пакета, последними слагаемыми в (8), (9) можно пренебречь. Если, кроме того,  $\tilde{\beta}_o = \tilde{\beta}_e = 2\tilde{\alpha}/3$ , уравнения (8), (9) переходят в систему Манакова [7].

Так как система (8), (9) получена из (5), (6) в предельном случае «длинных» монохроматических сигналов, можно утверждать, что уравнения (5), (6) являются более общими и описывают динамику как электромагнитных импульсов огибающей, так и ПКИ.

## 2. Солитоноподобные импульсы в условиях слабого двулучепреломления

Общее исследование (5), (6) представляется непросто и осуществимо, видимо, только численными методами. В одномерном приближении эти уравнения переходят в связанную систему модифицированных уравнений Кортевега – де Фриза (МКДФ). Если в этом случае представить решение (5), (6) в виде двухкомпонентной стационарной бегущей волны, то после однократного интегрирования данные уравнения переходят в систему двух связанных кубически-нелинейных осцилляторов. Полагая к тому же  $\alpha = \beta_o = \beta_e = \beta, \delta_o = \delta_e = \delta$ , получаем частный случай ( $n = 2$ ) системы Гарнье [16] для  $n$  нели-

нейных осцилляторов с разными собственными частотами.

Система уравнений (5), (6) решена в работе [16], а в [17] проинтегрирован в квадратурах ее обобщенный вариант. В [18, 19] (для  $n = 2$ ) методом Хироты найдено локализованное решение, которое в предельном случае малости параметра  $\varepsilon^2 = |\mu|\tau_p^2/(2|\delta|)$  может быть представлено в виде, аналогичном найденному в [20]:

$$E_{o,e} = E_m \frac{\theta(\pm\mu) \cosh \zeta - \theta(\mp\mu) \sinh \zeta}{1 + \varepsilon^2 \cosh^2 \zeta}, \quad (10)$$

где  $\theta(\mu)$  – функция единичного скачка Хэвисайда;  $\zeta = (t - x/v)/\tau_p$ ;  $E_m = 2(\mu/\beta)^{1/2}$ ; скорость  $v$  в лабораторной системе отсчета связана с длительностью импульса  $\tau_p$  выражением  $1/v = 1/v_m + \delta/\tau_p^2$ .

Выясним физический смысл параметра  $\varepsilon^2$ . Характерная длина биений  $L_b$  при эллиптическом двулучепреломлении для монохроматических импульсов определяется соотношением  $L_b = 2\pi/|q_o - q_e| = 2\pi/(\omega|1/v_o - 1/v_e|)$ . Для того чтобы определить аналогичный параметр  $L_{bs}$  для ПКИ, не имеющих несущей частоты, в выражении для  $L_b$  совершим замену  $2\pi/\omega \rightarrow 4\tau_p$  (множитель 4 здесь введен из соображений удобства). Тогда  $L_{bs} = 4\tau_p/|1/v_o - 1/v_e|$ .

Длина же дисперсионного расплывания для ПКИ  $l_{ds}$ , как видно из (5), (6), при  $\delta_e = \delta_o = \delta$  может быть определена соотношением  $l_{ds} = \tau_p^3/\delta$ . Тогда, учитывая близость скоростей  $v_e$  и  $v_o$  при  $\varepsilon^2 \ll 1$ , найдем, что  $|\mu| \approx |v_o - v_e|(2v_o v_e)^{-1}$ . Далее после простых алгебраических преобразований получим  $\varepsilon^2 = l_{ds}/L_{bs}$ . Таким образом, условие  $\varepsilon^2 \ll 1$  означает малость длины дисперсионного расплывания по сравнению с длиной биений эллипса поляризации.

Найдем приближенное солитоноподобное решение (5), (6) при  $l_{ds} \ll L_{bs}$  и различающихся между собой коэффициентах нелинейности  $\alpha$ ,  $\beta_o$  и  $\beta_e$ . При слабом двулучепреломлении  $\chi_e$  и  $\chi_o$  различаются незначительно, что выражено в малости величины  $\mu$ . Дисперсионные слагаемые в (5), (6) суть члены более высокого порядка малости по параметру  $(\omega_0 \tau_p)^{-2}$ , поэтому при  $\varepsilon^2 \ll 1$  можно пренебречь различием между  $\delta_e$  и  $\delta_o$  и считать  $\delta_e = \delta_o = \delta$ .

Используем усредненный вариационный принцип типа Ритца – Уизема [21, 22]. Для системы (5), (6) плотность лагранжиана можно записать в виде

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_o}{\partial x} \frac{\partial \Phi_o}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_e}{\partial x} \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} + \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \Phi_o}{\partial \tau} \right)^2 - \frac{\beta_o}{4} \left( \frac{\partial \Phi_o}{\partial \tau} \right)^4 - \frac{\beta_e}{4} \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} \right)^4 - \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\partial \Phi_o}{\partial \tau} \right)^2 \left( \frac{\partial \Phi_e}{\partial \tau} \right)^2 + \frac{\delta}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_o}{\partial \tau^2} \right)^2 + \frac{\delta}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi_e}{\partial \tau^2} \right)^2 - \frac{v_o}{4} (\nabla_{\perp} \Phi_o)^2 - \frac{v_e}{4} (\nabla_{\perp} \Phi_e)^2, \quad (11)$$

где «потенциалы»  $\Phi_o$  и  $\Phi_e$  определены соотношениями  $E_o = \partial \Phi_o / \partial \tau$ ,  $E_e = \partial \Phi_e / \partial \tau$ .

Пробное солитоноподобное решение для  $\Phi_o$  и  $\Phi_e$  запишем, отталкиваясь от (10), в виде

$$\Phi_{o,e} = A(x, \mathbf{r}_{\perp}) [\theta(\pm\mu) \arctan(\eta \sinh \xi)] - \theta(\mp\mu) \arctan(\eta \cosh \xi), \quad (12)$$

где  $\xi = [\tau - f(x, \mathbf{r}_{\perp})]/\tau_p(x, \mathbf{r}_{\perp})$ ;  $A(x, \mathbf{r}_{\perp})$ ,  $\tau_p(x, \mathbf{r}_{\perp})$ ,  $\eta(x, \mathbf{r}_{\perp})$  – медленные, а  $f(x, \mathbf{r}_{\perp})$  – быстрая функции своих переменных.

К тому же  $\eta$  зависит от  $\xi$  и удовлетворяет условию  $\eta^2(x, \mathbf{r}_{\perp}) \ll 1$ . Тогда выражения для  $E_o$  и  $E_e$  представляются в виде (10) с точностью до замены  $\varepsilon \rightarrow \eta$ .

При подстановке (12) в (11) будем учитывать производные по  $x$  и  $\mathbf{r}_{\perp}$  только от быстрой функции  $f(x, \mathbf{r}_{\perp})$ . Дальнейшее интегрирование по  $\tau$  позволит получить «усредненный лагранжиан»

$$L\left(\tau_p, A, \eta, \frac{\partial f}{\partial x}, \nabla_{\perp} f\right) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} A d\tau.$$

Записывая для переменных  $\tau_p$ ,  $A$ ,  $\varepsilon$  и  $f$  уравнения Эйлера–Лагранжа с использованием  $L$ , найдем в одномерном приближении

$$f = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_m}\right)x, \quad \frac{1}{v} = \frac{1}{v_m} + \frac{\delta}{\tau_p^2},$$

$$A = A_0 \equiv 4 \left(\frac{\delta}{\beta_o + \beta_e + 2\alpha}\right)^{1/2}, \quad \eta = 2e^{-\kappa},$$

$$\kappa = \frac{1}{4\varepsilon^2} \left[1 + \frac{11\beta_o - 21\beta_e - 10\alpha}{3(\beta_o + \beta_e + 2\alpha)}\right]. \quad (13)$$

Здесь длительность импульса  $\tau_p$  выступает в качестве свободного параметра. При положительности выражения для  $\kappa$  в квадратных скобках (13) условие  $\varepsilon^2 \ll 1$  автоматически обеспечивает малость параметра  $\eta^2$ . Согласно (12), (13), выражения для  $E_o$  и  $E_e$  могут быть записаны в виде (10), где  $E_m = A\varepsilon/\tau_p$ ,  $\zeta = t - x/v_o$ .

Таким образом, при  $l_{ds} \ll L_{bs}$  возможно стационарное распространение связанного локализованного состояния обыкновенной и необыкновенной компонент ПКИ. При этом компонента, поляризованная вдоль «быстрой» оси, представляет собой однополярный всплеск электрического поля, а компонента, параллельная «медленной» оси, – двухполярный импульс.

Проходя через фиксированную плоскость  $x = \text{const}$ , конец вектора  $\mathbf{E}$  ПКИ описывает замкнутую кривую, уравнение которой в случае  $\mu > 0$  легко получить из (10) с учетом замены  $\varepsilon \rightarrow \eta$ :

$$Y^2 - Z^2 = [(1 + \eta^2)Y^2 - Z^2]^2, \quad (14)$$

где  $Z = E_e/E_m$ ;  $Y = E_o/E_m$ . Выражение для случая  $\mu < 0$  получается отсюда заменой  $Z \leftrightarrow Y$ .

Кривая (14) (при  $\mu > 0$ ) изображена на рис.1. Из (10) следует, что  $\tan \varphi \equiv Z/Y = -\tanh \zeta$ , откуда  $-45^\circ < \varphi < 45^\circ$  (см. рис.1). Это означает, что вектор  $\mathbf{E}$  рассматриваемого здесь солитоноподобного импульса не может отклониться от «быстрой» оси на угол, больший  $45^\circ$ . Предельные углы  $\pm 45^\circ$  достигаются на переднем и заднем фронтах импульса, в то время как в центре импульса  $\varphi = 0$ . Параметр  $\eta$  характеризует влияние двулучепреломления на распространение сигнала. С увеличением данного параметра амплитуда компоненты, поляризованной вдоль «быстрой» оси, изменяется незначительно (с учетом того, что в нашем случае  $\eta^2 \ll 1$ ). Амплитуда же «медленной» компоненты уменьшается как  $\sim 1/\eta$ . В результате кривая на рис.1 сжимается вдоль «медленной» оси. При дальнейшем увеличении параметра анизотропии  $\eta$  «медленная» компонента практически исчезает и в импульсе остается только «быстрая» компонента. К такому же выводу можно прийти и из точного решения,

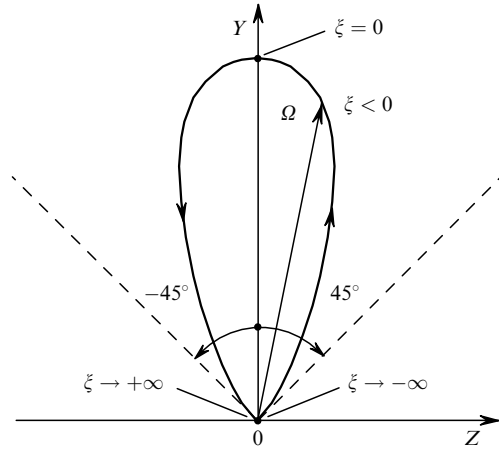


Рис.1. Траектория, описываемая концом вектора электрического поля солитоноподобного ПКИ при его прохождении через фиксированную плоскость  $x = \text{const}$  для  $\mu > 0$  (обыкновенная компонента поляризована вдоль «быстрой» оси  $y$ , необыкновенная – вдоль «медленной» оси  $z$ );  $\Omega = (E_o e_y + E_e e_z)/E_m$ , где  $e_y$  и  $e_z$  – единичные векторы вдоль соответствующих осей.

найденного в [18, 19] при  $\beta_o = \beta_e = \alpha$ . В пределе  $\varepsilon^2 \gg 1$  отмеченное решение представляет собой однополярный импульс «быстрой» компоненты при почти полном подавлении «медленной» составляющей. Такой солитон практически ничем не отличается от обычного солитона МКдФ, поляризованного вдоль «быстрой» оси.

Из выражений для  $\beta_o, \beta_e, \alpha, \delta_o, \delta_e$  и  $A$  следует, что образование одномерного солитоноподобного связанного состояния возможно в фокусирующей среде ( $\chi_e^{(3)}, \chi_o^{(3)}, \chi_{eo}^{(3)} > 0$ ) при аномальной групповой дисперсии ( $\chi_e'' = \chi_o'' < 0$ ) и в дефокусирующей среде ( $\chi_e^{(3)}, \chi_o^{(3)}, \chi_{eo}^{(3)} < 0$ ) при нормальной дисперсии групповой скорости ( $\chi_e'' = \chi_o'' > 0$ ), что согласуется с известными результатами теории оптических солитонов [23]. Быстрое дисперсионное расплывание компенсируется нелинейным увеличением крутизны профиля волны, в результате чего образуется солитоноподобный импульс. Роль же медленных двулучепреломляющих биений сводится к несинхронной зависимости поляризации импульса вдоль его профиля, что проявляется в несинхронной зависимости компонент  $E_o$  и  $E_e$  от  $\zeta$  (см. (10)). В этом, пожалуй, и состоит основное отличие влияния двулучепреломления на ПКИ от соответствующего эффекта в случае монохроматических сигналов с ярковыраженной несущей частотой.

Как известно [5], в последнем случае эллипс поляризации испытывает непрерывные периодические деформации, сопровождаемые его вращением. В рассматриваемом же нами случае профиль распространяющегося ПКИ стационарен, однако направление электрического поля импульса в сопутствующей системе отсчета меняется от точки к точке, слегка отклоняясь влево и вправо (за счет изменения знака компоненты, параллельной медленной оси) от поляризации в центре ПКИ по ходу его движения.

Исследование устойчивости рассматриваемого солитоноподобного импульса по отношению к поперечным возмущениям (самофокусировке) также проведем вариационным методом, следуя [22]. Согласно данному методу, в выражении для  $L$  достаточно считать  $\nabla_{\perp} f \neq 0$ . Такой подход накладывает важные ограничения на характер поперечных возмущений. Медленность изменения  $A, \tau_p$  и  $\eta$  в зависимости от аргументов  $x$  и  $r_{\perp}$  соответствует тому, что поперечные возмущения слабо ис-

кривляют волновые фронты импульса, т. е. эти фронты незначительно отличаются от плоскостей  $z - vt = \text{const}$ .

Имеет смысл говорить о квазиодномерных возмущениях, распространяющихся под малыми углами к оси  $x$ . Тем более, что при больших углах должен измениться сам вид материальных уравнений (3), (4), т. к. в таком случае нарушается симметрия относительно операций  $y \leftrightarrow -y, z \leftrightarrow -z$ . В результате изменятся и волновые уравнения (5), (6). В то же время из вида пробной функции (12) следует, что возмущения не меняют характера поляризации одномерного солитоноподобного импульса. Это означает, что рассматриваемые возмущения, как и одномерный импульс (10), поляризованы в угловом растворе от  $-45$  до  $+45$  относительно «быстрой» оси. Тогда уравнения Эйлера – Лагранжа при  $\eta^2 \ll 1$  примут вид системы уравнений для гидродинамики идеальной жидкости, в которых роль времени играет координата  $x$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} + \nabla_{\perp}(\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + (\mathbf{V} \nabla_{\perp}) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla_{\perp} p, \tag{16}$$

$$p = -\frac{\beta_o + \beta_e + 2\alpha}{24A_0^2} \rho^3 + \text{const}, \tag{17}$$

где  $\mathbf{V} \equiv v_m(\nabla_{\perp} f)$ ;  $\rho = A^2/\tau_p$ ;  $A_0$  определяется согласно (13).

Условие устойчивости исследуемого солитона по отношению к поперечным возмущениям запишется, очевидно, как условие устойчивого течения идеальной жидкости типа (15)–(17):  $\partial p/\partial \rho > 0$ . Используя «уравнение состояния» (17), выражающее зависимость «давления»  $p$  от «плотности»  $\rho$ , получим

$$\beta_o + \beta_e + 2\alpha < 0. \tag{18}$$

Условие (18) представляется физически весьма прозрачным: при положительных нелинейных восприимчивостях третьего порядка среда является фокусирующей, при отрицательных – дефокусирующей.

Значительно более любопытным представляется случай нелинейной среды с комбинированными свойствами, когда диагональные компоненты тензора  $\hat{\chi}^{(3)}$  ( $\chi_e^{(3)}$  и  $\chi_o^{(3)}$ ) положительны, а недиагональные ( $\chi_{eo}^{(3)}$ ) – отрицательны. Тогда из (18) и выражений для  $\beta_o, \beta_e$  и  $\alpha$  получим, что стационарное связанное состояние является устойчивым при  $2|\chi_{eo}^{(3)}| > \chi_e^{(3)} + \chi_o^{(3)}$ . Если в такую среду посылать сигналы, поляризованные строго вдоль «быстрой» или «медленной» осей, то они должны испытывать самофокусировку. Устойчивыми могут оказаться только импульсы, плоскость поляризации которых образует некоторый угол с данными осями.

Сделаем некоторые численные оценки. Очевидно, что  $|\chi_{e,o}''| \sim |\chi_{e,o}|/\omega_0^2$ . Тогда, согласно (12), (13), амплитуда электрического поля ПКИ

$$E_m \sim \frac{\varepsilon}{\omega_0 \tau_p} \left( \left| \frac{\chi_o}{\chi_o^{(3)}} \right| \right)^{1/2}.$$

Здесь принято, что параметры  $\chi_o^{(3)}, \chi_e^{(3)}$  и  $\chi_{eo}^{(3)}$  по порядку величины и по знаку одинаковы. Взяв для твердого фокусирующего диэлектрика типа кварцевого стекла  $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ c}^{-1}$ ,  $\chi_o \sim 0.1$ ,  $\chi_o^{(3)} \sim 10^{-14}$  ед. СГСЭ [24], получим  $E_m \sim 10^7 \text{ В/см}$ , что соответствует интенсивности  $I \approx cE_m^2/4\pi \sim$

$10^{14}$  Вт/см<sup>2</sup>. Сигналы такой интенсивности могут генерироваться СО<sub>2</sub>-лазерами. Заметим, однако, что т. к.  $\chi_o^{(3)}$ ,  $\chi_e^{(3)}$ ,  $\chi_{eo}^{(3)} > 0$ , данные импульсы неустойчивы по отношению к самофокусировке.

В газах, жидкостях и некоторых полимерах основным механизмом кубической оптической нелинейности в области прозрачности является тепловой ангармонизм [25], при этом  $\chi_o^{(3)}$ ,  $\chi_e^{(3)}$  и  $\chi_{eo}^{(3)}$  отрицательны. Взяв для такого раствора полимера как диметилформальдегид  $\chi_0 \sim 0.1$ ,  $|\chi_o^{(3)}| \sim 10^{-11}$  ед. СГСЭ [26], найдем  $E_m \sim 10^6$  В/см,  $I \sim 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup>. Поскольку  $\omega_0 \sim 10^{15}$  с<sup>-1</sup>, то длительность ПКИ  $\tau_p \sim 10^{-14}$  с вполне удовлетворяет условию (2). Отрицательность констант нелинейной восприимчивости обеспечивает устойчивость рассмотренного выше солитоноподобного связанного состояния обыкновенной и необыкновенной компонент ПКИ в данном полимере с наведенной анизотропией.

## Заключение

Таким образом, предложенная система уравнений (5), (6) описывает нелинейную динамику обыкновенной и необыкновенной компонент предельно короткого электромагнитного импульса в средах с наведенной одноосной анизотропией при его распространении перпендикулярно оптической оси. В пределе монохроматических импульсов уравнения (5), (6) переходят в хорошо известную систему связанных уравнений для медленно меняющихся амплитуд.

Полученное здесь решение системы (5), (6) в виде солитоноподобного связанного состояния обыкновенной и необыкновенной компонент может быть реализовано в средах со слабым двулучепреломлением, когда длина биений эллипса поляризации  $L_{bs}$  велика по сравнению с длиной дисперсионного расплывания  $l_{ds}$ . При определенных условиях данное решение устойчиво по отношению к слабым искривлениям волнового фронта.

Представляет также интерес солитоноподобное решение с испытывающим нестационарные биения эллипсом поляризации в случае  $L_{bs} \ll l_{ds}$ . Для проведения вариационного усреднения в данных условиях должны быть соответствующим образом выбраны подходящие пробные функции для  $\Phi_o$  и  $\Phi_e$ . В дальнейшем мы предполагаем решить эту задачу.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 00-02-17436а).

1. Becker P.C., Fragnito H.L., Bigot J.Y., Brito-Crus C.H., Shank C.V. *Phys.Rev.Letts*, **63**, 505 (1989).
2. Darrow J.T., Hu B.V., Chang X.C., Auston D.H. *Optics Letts*, **15**, 323 (1990).
3. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30**, 287 (2000).
4. Ахманов С.А., Выслоух В.А., Чиркин А.С. *Оптика фемтосекундных лазерных импульсов* (М., Наука, 1988).
5. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М., Мир, 1996).
6. Дубровская О.Б., Сухоруков А.П. *Изв. РАН. Сер.физич.*, **56**, 184 (1992).
7. Menyuk C.R. *IEEE J. Quantum Electron.*, **25**, 2674 (1989).
8. Maimistov A.I., Elyutin S.O. *J.Mod.Optics*, **39**, 2193 (1992).
9. Макаров В.А., Петров К.П. *Квантовая электроника*, **20**, 1011 (1993).
10. Беленов Э.М., Назаркин А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **51**, 252 (1990).
11. Беленов Э.М., Назаркин А.В. Ущапковский В.А. *ЖЭТФ*, **100**, 762 (1991).
12. Козлов С.А., Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **111**, 404 (1997).
13. Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **107**, 20 (1995).
14. Клышко Д.Н. *Физические основы квантовой электроники* (М., Наука, 1986).
15. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. *Основы кристаллофизики* (М., Наука, 1979).
16. Garneer R. *Rend.Sirc.Matem.Palermo*, **43**, 155 (1919).
17. Зайцев А.А. *Матем. заметки*, **60**, 924 (1996).
18. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **24**, 963 (1997).
19. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **87**, 104 (1999).
20. Sazonov S.V., Yakupova L.S. *J. Phys. B*, **27**, 369 (1994).
21. Anderson D. *Phys.Rev. A*, **27**, 3135 (1983).
22. Жданов С.К., Трубников Б.А. *Квазигазовые неустойчивые среды* (М., Наука, 1991).
23. Ведерко А.В., Дубровская О.Б., Марченко С.Ф., Сухоруков А.П. *Вестн. Моск. ун-та. Сер. III*, **33**, № 3, 4 (1992).
24. Азаренков А.Н., Альтшулер Г.Б., Белашенков Н.Р., Козлов С.А. *Квантовая электроника*, **20**, 733 (1993).
25. Райнтжес Дж. *Нелинейные оптические параметрические процессы в жидкостях и газах* (М., Мир, 1987).
26. Шемма Д., Зисса Ж. (ред.) *Нелинейные оптические свойства органических молекул и кристаллов* (М., Мир, 1989, т. 2).

**S.V.Sazonov, A.F.Sobolevskii. Dynamics of ultrashort pulses in birefringent media.**

A system of equations is proposed that describes the dynamics of a laser pulse containing a few optical cycles (ultrashort pulse) in the transparency region of a medium with induced birefringence. In this situation, the approximation of slowly varying envelopes, which is standard in the case of monochromatic signals, is inapplicable. An approximate solution is found for the case when the dispersion spreading length is much smaller than the length of the polarisation ellipse beating. It has the form of a travelling soliton-like bound state of ordinary and extraordinary components. The conditions for the stability of this pulse with respect to self-focusing are determined.