

Максимально правдоподобные оценки частоты и других параметров сигналов лазерных доплеровских измерительных систем, работающих в режиме одночастичного рассеяния

В.С.Соболев, М.Н.Прокопенко

Представлены уравнения правдоподобия для совместных оценок доплеровской частоты (скорости) и других неизвестных параметров сигналов лазерных доплеровских анемометров и лидаров, работающих в одночастичном режиме рассеяния. Задача решена с учетом дробового шума как основного мешающего фактора. Получена корреляционная матрица ошибок и найдены границы Рао–Крамера. Результаты подтверждены компьютерным моделированием доплеровского сигнала и численным решением уравнения правдоподобия для доплеровской частоты. Полученная оценка не смещена, а ее дисперсия соответствует границе Рао–Крамера.

Ключевые слова: лазерная доплеровская анемометрия, лазерная локация, дробовой шум, максимально правдоподобные оценки.

Введение

Лазерные доплеровские анемометры [1–4] и лидары [1, 5] заняли прочные позиции в научном эксперименте и практической деятельности человека. В то же время развитие их продолжается: совершенствуются как принципы построения, так и методы обработки регистрируемых с их помощью сигналов. Настоящая статья посвящена получению оптимальных оценок частоты и других неизвестных параметров доплеровских сигналов с использованием критерия максимального правдоподобия. Задача решается для случая, когда лазерная доплеровская измерительная система (ЛДИС) работает в одночастичном режиме рассеяния, а в качестве мешающего фактора выступает дробовой шум. Одночастичный режим, как известно [1,2], имеет место, когда ЛДИС применяется для исследования газовых потоков с естественной запыленностью или потоков с малой запыленностью. Вероятность появления в измерительном объеме двух и более рассеивающих частиц при этом чрезвычайно мала, и оптический доплеровский сигнал представляет собой непрерывный поток импульсов света, интенсивность которых для дифференциальной схемы ЛДИС, представленной на рис.1, в идеальном случае имеет вид

$$I(t) = I_0 \exp \left[-\xi^2 \omega_D^2 (t - t_0)^2 \right] [1 + \cos \omega_D (t - t_0)], \quad (1)$$

где I_0 , ω_D и t_0 – соответственно неизвестные амплитуда, доплеровская частота, пропорциональная скорости рассеивающей частицы, и момент ее появления в центре измерительного объема; ξ – известный параметр оптической схемы, равный обратному числу интерференционных полос в измерительном объеме ЛДИС на уровне e^{-1} от максимума интенсивности света в фокальной плоскости передающего объектива. В случае дифференциальной схемы ЛДИС

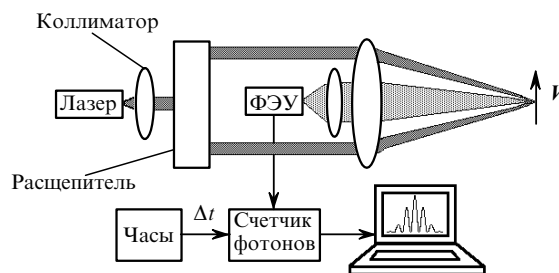


Рис.1. Функциональная схема ЛДИС.

$$\xi = \frac{d}{2\sqrt{2}a}, \quad (2)$$

$$\omega_D = \frac{2V \sin(\theta/2)}{\lambda_{\text{las}}} \cos \alpha, \quad (3)$$

где $2a$ – расстояние между параллельными пучками на входной плоскости оптической схемы ЛДИС; d – диаметр пучков на уровне e^{-1} их интенсивности в этой же плоскости; θ – угол между зондирующими пучками; λ_{las} – длина волны лазерного излучения; V – модуль вектора измеряемой скорости; α – угол между вектором скорости и направлением максимальной чувствительности ЛДИС.

При правильном выборе основных параметров оптической и электронной частей ЛДИС основным фактором, мешающим точной оценке параметров доплеровского сигнала, является дробовой шум [1, 4]. Особенность этого шума состоит в том, что он представляет собой нестационарный случайный процесс: его статистические характеристики не остаются постоянными, а изменяются в соответствии с мгновенной интенсивностью оптического сигнала. Задача решается в предположении, что в качестве фотоприемника используется либо ФЭУ, либо лавинный фотодиод, работающие в режиме счета фотоэлектронов. С выхода такого приемника идет дискретный поток отсчетов числа фотоэлектронов $n_i = n(t_i, \Delta t)$,

эмиттированных на интервале квантования Δt , и задача, решаемая в настоящей работе, сводится к анализу этого потока с целью нахождения оптимальных оценок неизвестных параметров доплеровского сигнала и определения качества этих оценок.

В большинстве случаев применения ЛДИС никаких априорных сведений относительно статистических характеристик оцениваемых параметров не имеется. В связи с этим наилучшим критерием поиска оптимальных оценок является достижение максимума функции правдоподобия для каждого из оцениваемых параметров. Известно [6], что если дисперсия оценки искомого параметра (погрешность измерения) много меньше дисперсии его априорного распределения, то оценка максимального правдоподобия совпадает с оценками максимума апостериорной вероятности и оптимальными байесовскими решениями задачи при квадратичной функции потерь. При этих условиях оценки методами линейной фильтрации Колмогорова – Винера и Кальмана – Бюси также переходят в оптимальные оценки максимального правдоподобия. Известно также, что при отсутствии априорной информации о распределении измеряемого параметра оценка максимального правдоподобия является строгим решением обратной задачи математической статистики. Отметим, что подобный подход был продемонстрирован в [7–10] и настоящая работа является развитием проведенных там исследований. Оценка параметров одночастичного доплеровского сигнала проводилась также в [11], однако в этой работе предполагалось, что статистические характеристики шума не зависят от сигнала, а сам шум является белым стационарным гауссовым процессом.

1. Уравнения правдоподобия

Из теории фотоэффекта известно [12], что при изменяющейся интенсивности света электрический сигнал на выходе фотодетектора представляет собой нестационарный поток электронов, скорость эмиссии которых пропорциональна интенсивности оптического сигнала (в классическом представлении поля). Если подсчитывать число электронов при равномерном квантовании потока по времени, то для сигналов, поступивших от когерентных источников света или даже от тепловых источников (при периоде квантования, существенно превышающем время когерентности), вероятность получения n_i отсчетов фотоэлектронов на интервале квантования Δt подчиняется закону Пуассона

$$P(n_i, \Delta t) = \frac{[\lambda(t_i)\Delta t]^{n_i}}{n_i!} \exp[-\lambda(t_i)\Delta t], \quad (4)$$

где

$$\lambda_i = \lambda(t_i) = \frac{I(t_i)k}{h\nu}$$

– скорость эмиссии фотоэлектронов вблизи точки t_i ; $I(t_i)$ – проинтегрированная по площади детектора интенсивность света, описываемая выражением (1); k – квантовая эффективность фотодетектора; $h\nu$ – энергия кванта света. Период квантования Δt выбран достаточно малым по сравнению с периодом наивысшей частоты в спектре $I(t)$, поэтому на этом интервале $I(t)$ можно считать неизменным.

В нашем случае λ_i в соответствии с (1) определяется выражением

$$\lambda_i = A_0 \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t_i - t_0)^2] [1 + \cos \omega_D (t_i - t_0)],$$

$$A_0 = \frac{I_0 k}{h\nu}. \quad (5)$$

Функция λ_i пропорциональна фототоку, но измеряется не в амперах, а в обратных секундах. Отметим, что n_i – это случайная целая безразмерная величина, равная числу фотоэлектронов, подсчитанных на интервале квантования Δt . Учитывая, что оптический сигнал $I(t)$ прямо пропорционален скорости эмиссии фотоэлектронов λ_i , в дальнейшем в целях упрощения выкладок под оценкой амплитуды сигнала будем понимать оценку величины A_0 .

С учетом независимости пуассоновских случайных величин совместная плотность вероятности полученного потока фотоэлектронов (функция правдоподобия) представляется в виде произведения $P(n_i)$, т. е.

$$P(n_1, \dots, n_N) = \prod_{i=1}^N P(n_i, \Delta t), \quad (6)$$

где N – число отсчетов на интервале наблюдения $T = \Delta t N$. Как известно, максимально правдоподобные оценки находятся по критерию достижения максимума логарифма функции (6). Учитывая (4), (6), имеем

$$\ln P(n_1, \dots, n_N) = \sum_{i=1}^N [n_i (\ln \lambda_i + \ln \Delta t) - \ln(n_i!) - \lambda_i \Delta t]. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по интересующему нас неизвестному параметру x , получаем следующее уравнение правдоподобия в обобщенном виде:

$$\frac{d \ln P(n_1, \dots, n_N)}{dx} = \sum_i \left(\frac{n_i \lambda_i'}{\lambda_i} - \lambda_i' \Delta t \right) = 0, \quad (8)$$

$$\lambda_i' = \frac{d \lambda_i(t, x)}{dx}.$$

Если весь сигнал уместится на интервале наблюдения T , то сумму $\sum_i \lambda_i' \Delta t$ можно заменить интегралом в бесконечных пределах, и тогда уравнение правдоподобия будет иметь вид

$$\sum_i \frac{n_i \lambda_i'}{\lambda_i} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda' dt. \quad (9)$$

Расписывая его для каждого из неизвестных параметров A_0 , ω_D и t_0 , получим соответствующую систему уравнений правдоподобия, решение которой даст оптимальные оценки каждого из параметров:

$$A_0 = \frac{\xi \omega_D}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^N n_i, \quad (10)$$

$$2\xi^2 \omega_D \sum_{i=1}^N n_i (t_i - t_0)^2 + \sum_{i=1}^N n_i (t_i - t_0) \times \tan \frac{\omega_D (t_i - t_0)}{2} = \sum_{i=1}^N \frac{n_i}{\omega_D}, \quad (11)$$

$$2\xi^2\omega_D \sum_{i=1}^N n_i(t_i - t_0) + \sum_{i=1}^N n_i \tan \frac{\omega_D(t_i - t_0)}{2} = 0. \quad (12)$$

Система нелинейных уравнений (10)–(12) не решается аналитически, однако существует множество приближенных или численных способов ее решения [13]. Не останавливаясь на этом вопросе, мы, тем не менее, покажем вид производной логарифма функции правдоподобия в зависимости от ω_D для одночастичного доплеровского сигнала в случае, когда амплитуда A_0 и момент появления частицы t_0 заданы. Результаты получены путем компьютерного моделирования сигналов с амплитудами 250, 500 и 1000 с^{-1} для $\omega_D = 1$ рад/с, $\xi = 0.1$, $t_0 = 0$ и представлены на рис.2.

Как следует из рис.2 при достаточно больших амплитудах ($A_0 \geq 500$) кривые пересекают ось абсцисс только в одной точке, что позволяет говорить о единственности решения. Как показал более детальный анализ, вблизи точки $\omega_D = 1$ рад/с крутизна этих кривых, определяющая точность оценки доплеровской частоты (скорости), прямо пропорциональна амплитуде сигнала.

2. Границы Рао–Крамера

Для определения эффективности полученных оценок найдем границы Рао–Крамера [6]. Ошибки оценок могут быть взаимно коррелированы и описываются корреляционной матрицей J , составленной из элементов

$$J_{xy} = M\{(\hat{\chi}_x - \chi_x)(\hat{\chi}_y - \chi_y)\}, \quad (13)$$

где M – знак математического ожидания; $\chi_{x,y}$ – истинное значение неизвестного параметра, а $\hat{\chi}_{x,y}$ – его оценка; $x, y = 1, \dots, m$; m – число неизвестных параметров; в нашем случае их три – A_0, ω_D, t_0 . Для определения матрицы ошибок найдем элементы информационной матрицы Фишера [6], которые задаются следующим выражением:

$$J_{xy} = M\left\{\frac{\partial \ln P(\chi)}{\partial \chi_x} \frac{\partial \ln P(\chi)}{\partial \chi_y}\right\} = -M\left\{\frac{\partial^2 \ln P(\chi)}{\partial \chi_x \partial \chi_y}\right\}. \quad (14)$$

Подставив сюда выражение (7), получим следующую обобщенную формулу для произвольного элемента матрицы

$$J_{xy} = -M\left\{\sum_i \left[\frac{n_i(\lambda''_{xy}\lambda - \lambda'_x\lambda'_y)}{\lambda^2} - \lambda''_{xy}\Delta t\right]\right\}. \quad (15)$$

Подставив (5) в (15), находим все элементы матрицы Фишера. Полученная матрица при условии $\xi \ll 1$ (выполняющемся для большинства ЛДИС) имеет вид

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{\pi}}{A_0\xi\omega_D} & -\frac{\sqrt{\pi}}{\xi\omega_D^2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{\pi}}{\xi\omega_D^2} & \frac{A_0\sqrt{\pi}}{2\xi^3\omega_D^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{A_0\omega_D\sqrt{\pi}}{\xi} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Столбцы слева направо и строки сверху вниз соответствуют A_0, ω_D и t_0 . Неравенство Рао–Крамера для нижней границы корреляционной матрицы ошибок оценок имеет вид

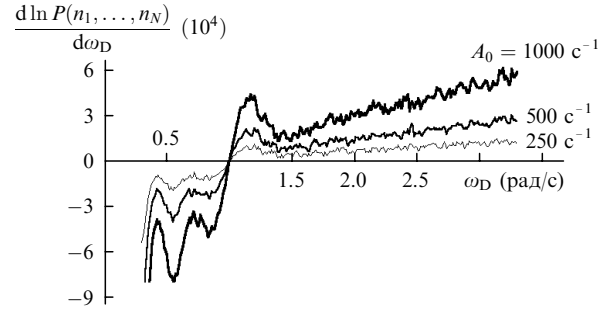


Рис.2. Производная логарифма функции правдоподобия для доплеровской частоты ω_D .

$$R \geq J^{-1}, \quad (17)$$

где J^{-1} – матрица ошибок, обратная информационной матрице Фишера. Выполнив обратное преобразование матрицы (16) (для $\xi \ll 1$), получим корреляционную матрицу ошибок

$$R = \begin{pmatrix} \frac{A_0\xi\omega_D}{\sqrt{\pi}} & \frac{2\xi^3\omega_D^2}{\sqrt{\pi}} & 0 \\ \frac{2\xi^3\omega_D^2}{\sqrt{\pi}} & \frac{2\xi^3\omega_D^3}{A_0\sqrt{\pi}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\xi}{A_0\omega_D\sqrt{\pi}} \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Диагональные элементы матрицы (18) представляют собой дисперсии оценок амплитуды, доплеровской частоты и момента появления частицы в центре измерительного объема, недиагональные элементы определяют ковариации этих оценок (с точностью до знака). Таким образом, оценки частоты и амплитуды связаны между собой и не коррелируют с оценкой момента появления частицы в центре измерительного объема, на что указывают нулевые значения соответствующих элементов матрицы.

Нижние границы дисперсий оценок (границы Рао–Крамера) амплитуды, доплеровской частоты и момента времени t_0 есть

$$\sigma_{A_0}^2 = \frac{A_0\xi\omega_D}{\sqrt{\pi}}, \quad \sigma_{\omega_D}^2 = \frac{2\xi^3\omega_D^3}{A_0\sqrt{\pi}}, \quad \sigma_{t_0}^2 = \frac{\xi}{A_0\omega_D\sqrt{\pi}}. \quad (19)$$

Соответствующие минимальные относительные среднеквадратичные отклонения имеют вид

$$\frac{\sigma_{A_0}}{A_0} = \left(\frac{\xi\omega_D}{A_0\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}, \quad \frac{\sigma_{\omega_D}}{\omega_D} = \left(\frac{2\xi^3\omega_D}{A_0\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}, \quad (20)$$

$$\frac{\sigma_{t_0}}{t_0} = \left(\frac{\xi}{t_0^2 A_0\omega_D\sqrt{\pi}}\right)^{1/2}.$$

3. Численное решение уравнения правдоподобия для доплеровской частоты

Как уже упоминалось выше, найти решения полученных уравнений правдоподобия аналитически не представляется возможным, но задача может быть решена численными методами. Чтобы продемонстрировать эту возможность и оценить качество полученных оценок, был выполнен цикл модельных численных экспериментов.

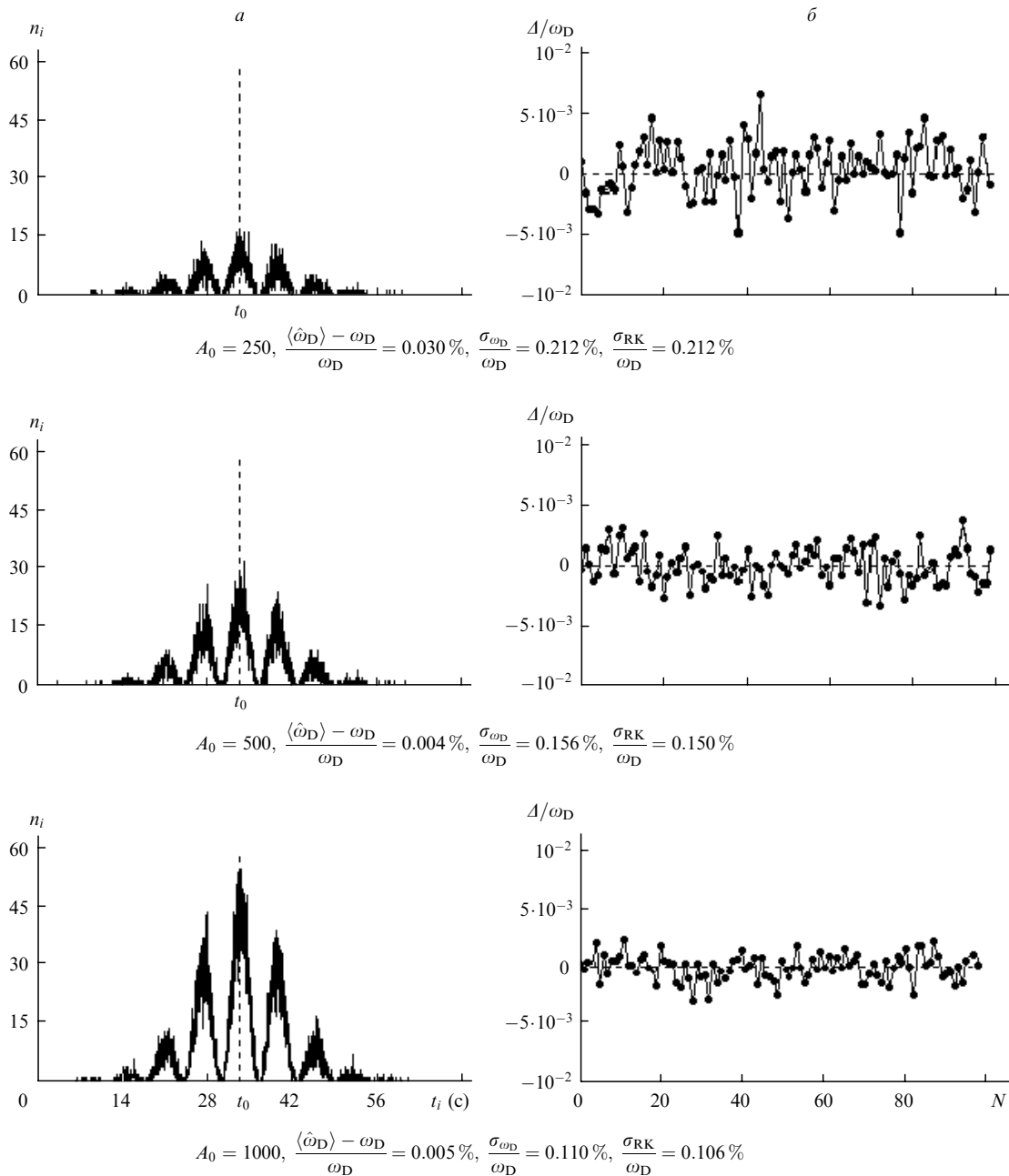


Рис.3. Модель электрического одночастичного доплеровского сигнала (а) и относительного отклонения максимально правдоподобных оценок доплеровской частоты от истинного значения (б).

Для этого вначале был смоделирован доплеровский сигнал, получаемый с выхода фотоприемника. С использованием подпрограммы, генерирующей набор случайных чисел, равномерно распределенных в диапазоне 0–1, был сформирован нестационарный пуассоновский процесс, параметром, которого служила скорость эмиссии фотоэлектронов (5) при условии, что $\omega_D = 1$ рад/с, $t_0 = 0$. Результаты моделирования для трех амплитуд $A_0 = 250, 500$ и 1000 с⁻¹ представлены на рис.3,а. По оси абсцисс отложено время, а по оси ординат – случайные отсчеты числа фотоэлектронов на последовательных интервалах Δt . Затем полученный с помощью модели поток отсчетов n_i подставлялся в уравнение правдоподобия (12) для доплеровской частоты и комбинацией метода Ньютона и метода секущих [13] находилось решение этого уравнения.

Результаты этой процедуры, выполненной 100 раз

для каждой амплитуды, представлены на рис.3,б, где показаны относительные отклонения Δ/ω_D оценок доплеровской частоты от ее истинного значения, относительные среднеквадратичные отклонения и относительные среднеквадратичные границы Рао–Крамера. Анализируя полученные результаты, можно сделать следующие выводы: относительные отклонения средней оценки от истинной частоты $(\langle \hat{\omega}_D \rangle - \omega_D)/\omega_D$ имеют порядок 10^{-5} . Они существенно меньше относительного среднеквадратичного отклонения оценки $\sigma_{\omega_D}/\omega_D$, и поэтому можно полагать, что найденные решения являются несмещенной оценкой доплеровской частоты. Сравнение среднеквадратичных отклонений оценок и среднеквадратичных границ Рао–Крамера σ_{RK} (элемент R_{22} матрицы (17)) показывает почти полное их совпадение, что позволяет сделать вывод об эффективности полученных оценок.

Заключение

Найденные в работе уравнения правдоподобия позволяют получить наилучшие по точности совместные оценки доплеровской частоты, амплитуды и момента прихода рассеивающей частицы в центр измерительного объема ЛДИС. Задача решена для лазерных доплеровских анемометров и лидаров, работающих в режиме одночастичного рассеяния со счетчиком фотонов в качестве фотоприемника. Найденны также границы Рао – Крамера, позволяющие оценить минимально возможные дисперсии оценок. Компьютерное моделирование доплеровского сигнала и численное решение уравнения правдоподобия для доплеровской частоты показали несмещенность и эффективность полученных оценок. Результаты работы открывают новые возможности высокоточного исследования газовых потоков с помощью ЛДИС.

Полученные результаты позволяют сделать важный вывод относительно оптимального приема оптических сигналов в режиме аналогового фотодетектирования. Этот режим характерен для тех случаев, когда интенсивность оптических сигналов достаточно велика и «одноэлектронные» импульсы за счет инерционных свойств фотодетектора перекрываются, образуя на его выходе непрерывный аналоговый сигнал. Если инерционные свойства таких фотоприемников характеризовать постоянной времени τ , то аналоговые сигналы, измеренные с интервалом τ , будут прямо пропорциональны числу фотоэлектронов, эмиттированных катодом на этом же интервале, что объясняется интегрирующим действием эквивалентной RC-цепи. С учетом вышесказанного уравнения правдоподобия, процедуры оптимальных оценок и границы Рао – Крамера будут аналогичны полученным в данной статье. Естественно, что постоянная времени фотоприемника, характеризующая его инерционность, при этом должна быть мала по сравнению с периодом наивысшей частоты модуляции оптического сигнала.

Приложение

1. Вывод уравнения правдоподобия для A_0

Подставив (5) и выражение для $\partial\lambda(t_i, A_0)/\partial A_0$ в (8), получаем

$$\frac{d \ln P(n_1, \dots, n_N)}{d A_0} = \sum_i \left\{ \frac{n_i}{A_0} - \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t_i - t_0)^2] \times [1 + \cos \omega_D (t_i - t_0)] \Delta t \right\}. \quad (П1)$$

Заменяя вторую часть суммы в (П1) интегралом в бесконечных пределах, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d \ln P(n_1, \dots, n_N)}{d A_0} &= \sum_i \left(\frac{n_i}{A_0} \right) - \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t - t_0)^2] [1 + \cos \omega_D (t - t_0)] dt \\ &= \sum_i \left(\frac{n_i}{A_0} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{\xi \omega_D} \left[1 + \exp\left(-\frac{1}{4\xi^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (П2)$$

Экспоненциальным членом в (П2) можно пренебречь, т. к. при $\xi \ll 1$, что выполняется на практике, он пренебрежимо мал по сравнению с единицей. Таким образом, уравнение правдоподобия для амплитуды A_0 примет окончательный вид:

$$\sum_i \left(\frac{n_i}{A_0} \right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\xi \omega_D} \text{ или } A_0 = \frac{\xi \omega_D}{\sqrt{\pi}} \sum_i n_i. \quad (П3)$$

2. Вывод уравнения правдоподобия для ω_D

Подставляя (5) и выражение для $\partial\lambda(t_i, \omega_D)/\partial \omega_D$ в (8) и действуя аналогично предыдущему, находим

$$\begin{aligned} \frac{d \ln P(n_1, \dots, n_N)}{d \omega_D} &= 2\xi^2 \omega_D \sum_i [-n_i (t_i - t_0)^2] - \sum_i \left[\frac{n_i (t_i - t_0) \sin \omega_D (t_i - t_0)}{1 + \cos \omega_D (t_i - t_0)} \right] \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} A_0 \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t - t_0)^2] \{ 2\xi^2 \omega_D (t - t_0)^2 \times [1 + \cos \omega_D (t - t_0)] + (t - t_0) \sin \omega_D (t - t_0) \} dt. \end{aligned} \quad (П4)$$

Заменяя интеграл его значением и пренебрегая, как и ранее, экспонентой, получаем уравнение правдоподобия для ω_D в следующем виде:

$$\begin{aligned} 2\xi^2 \omega_D \sum_i n_i (t_i - t_0)^2 + \sum_i n_i (t_i - t_0) \tan \frac{\omega_D (t_i - t_0)}{2} &= \frac{\sqrt{\pi} A_0}{\xi \omega_D^2}. \end{aligned} \quad (П5)$$

3. Вывод уравнения правдоподобия для t_0

Подставляя (5) и выражение для $\partial\lambda(t_i, A_0)/\partial t_0$ в (8), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d \ln P(n_1, \dots, n_N)}{d t_0} &= 2\xi^2 \omega_D^2 \sum_i n_i (t_i - t_0) + \sum_i n_i \omega_D \tan \frac{\omega_D (t_i - t_0)}{2}. \end{aligned} \quad (П6)$$

Таким образом, уравнение правдоподобия для момента времени t_0 примет вид

$$2\xi^2 \omega_D \sum_i n_i (t_i - t_0) + \sum_i n_i \tan \frac{\omega_D (t_i - t_0)}{2} = 0. \quad (П7)$$

1. Василенко Ю.Г., Дубнищев Ю.Н., Соболев В.С. и др. *Лазерные доплеровские измерители скорости* (Новосибирск, Наука, 1975).
2. Дюррани Т., Грейтид К. *Лазерные системы в гидродинамических измерениях* (М., Энергия, 1980).
3. Дубнищев Ю.Н., Ринкевичюс Б.С. *Методы лазерной доплеровской анемометрии* (М., Наука, 1982).
4. Коронкевич В.П., Соболев В.С., Дубнищев Ю.Н. *Лазерная интерферометрия* (Новосибирск, Наука, 1983).
5. Устинов Н.Д. *Лазерная локация* (М., Машиностроение, 1984).
6. Левин Б.Р. *Теоретические основы статистической радиотехники* (М., Сов. Радио, 1958, кн.2).
7. Гродзовский Г.Л. *Ученые записки ЦАГИ*, **10**, № 5, 53 (1979).
8. Sobolev V.S. *Proc. SPIE*, **3065**, 235 (1997).

9. Соболев В.С. *Оптич. ж.*, № 10, 62 (1996).
10. Sobolev V.S., Kascheeva G.A., Filimonenko I.V. *Pattern Recognition and Image Analysis*, **9**, 320 (1999).
11. Besson O., Galtier F. *IEEE Trans. Signal Processing*, **44**, 3056 (1996).
12. Гудмен Дж. *Статистическая оптика* (М., Мир, 1988).
13. Бахвалов Н.С. *Численные методы* (М., Наука, 1975).

V.S.Sobolev, M.N.Prokopenko. Maximum likelihood estimates of frequency and other parameters of signals of laser Doppler measuring systems operating in the single-particle scattering mode.

The likelihood equations for combined estimates of the Doppler frequency (velocity) and other unknown parameters of signals of laser Doppler anemometers and lidars operating in the single-particle scattering mode are presented. The problem is solved taking into account the shot noise as the main interfering factor. The correlation error matrix is obtained and the Rao–Kramer bounds are found. The results are confirmed by computer simulations of the Doppler signal and by the numerical solution of the likelihood equation for the Doppler frequency. The obtained estimate is not shifted and its dispersion corresponds to the Rao–Kramer bound.