PACS 42.79.Gn; 14.70.Bh

# Релятивистская кинематика электромагнитных полей волноводной моды

**Л.А.Ривлин**

*Показано, что при наблюдении волны в волноводе из сопровождающей системы отсчета, перемещающейся со скоростью, равной групповой скорости волны, происходит остановка распространения волны и содержащаяся в волноводе электромагнитная энергия оказывается неподвижной. Эквивалентом этой покоящейся энергии является ненулевая масса покоя фотонов в волноводе, совпадающая с той, что проявляется в динамических экспериментах.*

***Ключевые слова***: *преобразование Лоренца, волноводная мода, покоящаяся энергия.*

## Введение

Все без исключения реально существующие в природе электромагнитные поля в большей или меньшей мере отличаются от идеального, никогда не реализуемого образа неограниченной плоской волны. Наглядными примерами могут служить поля излучения диполя и дифракции на щели, квазигауссов пучок лазера, поле волноводной моды и др. В противоположность идеальной плоской волне все эти поля обладают стоячей составляющей и продольными компонентами электрического и магнитного векторов, групповой скоростью, уступающей скорости света $c$ в свободном пространстве, дисперсией, дефектом импульса и т. п. Фотонам, представляемым такими реальными полями, удается приписать массоподобную величину $M > 0$, которая в различных мысленных динамических экспериментах с ускоренным движением проявляет признаки, неотличимые от признаков инертной и гравитационной массы покоя обычных массивных тел (см. обзор [1] и ссылки на оригинальные работы в нем).

Оказывается, что массоподобное поведение фотонов реально существующих полей проявляется и при применении к ним стандартных преобразований специальной теории относительности, т. е. в чисто кинематическом эксперименте, отличающемся от динамических задач [1]. Очевидно, что для обнаружения свойств, присущих массе покоя, следует попросту остановить исследуемый объект, т. е. наблюдать его в сопровождающей системе координат, где его относительная скорость равна нулю. Такая попытка применительно к фотону не представляется невозможной, поскольку, как отмечено выше, в реальных волновых полях групповая скорость транспортировки электромагнитной энергии, отождествляемая со скоростью фотонов, уступает скорости света в свободном пространстве $c$.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет), Россия, 117454 Москва, просп. Вернадского, 78; эл. почта: rla@superlum.msk.ru

Поступила в редакцию 29 июля 1999 г.

## 1. Двумерная потенциальная яма бесконечной глубины для фотонов (металлический волновод)

Наиболее удобной для анализа моделью в силу простоты своих граничных условий может служить электромагнитное поле в двумерной потенциальной яме бесконечной глубины для фотонов, т. е. мода полого металлического волновода. Как известно [2], поле моды такого волновода произвольного сечения (рис.1) состоит из бегущих волн

$$\boldsymbol{E}(x, y, z, t) = \boldsymbol{e}(x, y)\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)],$$
$$\boldsymbol{H}(x, y, z, t) = \boldsymbol{h}(x, y)\exp[\mathrm{i}(\omega t - kz)] \quad (1)$$

с поперечными собственными функциями $\boldsymbol{e}(x, y)$ и $\boldsymbol{h}(x, y)$ и собственными значениями (критическими частотами) $\omega_{nm}$ с целочисленными индексами $n$ и $m$, где $\omega$ – частота;

$$k = \frac{\omega}{c}\left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} \quad (2)$$

– постоянная распространения; $x$, $y$ – поперечные координаты; $t$ – время. При этом фазовая скорость волны вдоль продольной оси $z$

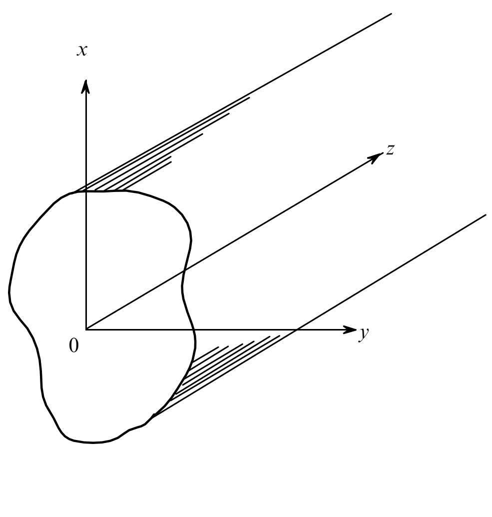


Рис.1.

$$v = \frac{\omega}{k} = c\left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2} > c, \tag{3}$$

а групповая скорость транспортировки электромагнитной энергии и продольного перемещения фотонов по волноводу

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\left[1 - \left(\frac{\omega_{nm}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2} < c. \tag{4}$$

Собственные значения и постоянные распространения связаны с частотой волны дисперсионным соотношением

$$\omega^2 = \omega_{nm}^2 + (ck)^2, \tag{5}$$

а поперечные компоненты собственных функций $e_x$, $e_y$, $h_x$ и $h_y$ выражаются через пространственные производные продольных компонент $e_z$ и $h_z$:

$$\begin{aligned}
e_x &= -\mathrm{i}\left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2\left(k\frac{\partial e_z}{\partial x} + \mu_0\omega\frac{\partial h_z}{\partial y}\right),\\
e_y &= -\mathrm{i}\left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2\left(k\frac{\partial e_z}{\partial y} - \mu_0\omega\frac{\partial h_z}{\partial x}\right),\\
h_x &= -\mathrm{i}\left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2\left(k\frac{\partial h_z}{\partial x} - \varepsilon_0\omega\frac{\partial e_z}{\partial y}\right),\\
h_y &= -\mathrm{i}\left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2\left(k\frac{\partial h_z}{\partial y} + \varepsilon_0\omega\frac{\partial h_z}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\mu_0$ и $\varepsilon_0$ – магнитная и диэлектрическая проницаемости вакуума. В свою очередь продольные компоненты $e_z$ и $h_z$ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned}
\nabla_\perp e_z + \left(\frac{\omega_{nm}}{c}\right)^2 e_z = 0,\\
\nabla_\perp h_z + \left(\frac{\omega_{nm}}{c}\right)^2 h_z = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

с граничными условиями на поверхности металла ($\nabla_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным координатам $x$ и $y$).

В зависимости от направления вектора поляризации существуют два типа решений: решения для ТМ-поляризации, когда $h_z = 0$, и решения для ТЕ-поляризации, когда $e_z = 0$, чему отвечает соответствующее упрощение системы (6) с одночленными правыми частями.

Продольная составляющая вектора Пойнтинга вдоль оси $z$ волновода

$$P = \left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_{nm}}\right)^2\left\{\left[1 + \left(\frac{u}{c}\right)^2\right]\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\frac{\partial h_z}{\partial y} - \frac{\partial e_z}{\partial y}\frac{\partial h_z}{\partial x}\right) + \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\frac{u}{c}\left[\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_z}{\partial y}\right)^2\right] + \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{u}{c}\left[\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_z}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \tag{8}$$

или для ТМ- и ТЕ-поляризаций соответственно

$$P_{\mathrm{TM}} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2\frac{u/c}{1-(u/c)^2}\left[\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial e_z}{\partial y}\right)^2\right], \tag{9}$$

$$P_{\mathrm{TE}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(\frac{c}{\omega_{nm}}\right)^2\frac{u/c}{1-(u/c)^2}\left[\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_z}{\partial y}\right)^2\right]. \tag{10}$$

В металлическом волноводе набор массоподобных величин $M$ однозначно определяется собственными значениями (критическими частотами) $\omega_{nm}$ [1, 2]:

$$M = \frac{\hbar\omega_{nm}}{c^2}, \tag{11}$$

а полная масса покоя всех фотонов моды с индексами $nm$

$$M(N+1) = \frac{\hbar\omega_{nm}}{c^2}(N+1), \tag{12}$$

где $N$ – фотонное число заполнения моды, а единица $(1 = 1/2 + 1/2)$ отражает вклад нулевых квантовых вакуумных флуктуаций обоих направлений распространения.

## 2. Релятивистское преобразование частоты и постоянной распространения

Рассмотрим, что происходит с частотой и постоянной распространения волны, заданных в лабораторной системе отсчета, при переходе в другую инерциальную систему, перемещающуюся вдоль оси $z$ со скоростью $c\beta$. Стандартный релятивистский вывод формулы эффекта Доплера основан на постулате инвариантности фазы волны $\varphi = \omega t - kz = \mathrm{const}$ в разных инерциальных системах координат. Подставляя в формулу для $\varphi$ соотношения

$$t = \frac{t' + \beta z'/c}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad z = \frac{z' + c\beta t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{13}$$

выраженные через лоренц-преобразованные штрихованные координаты движущейся системы, нетрудно получить соотношение для фазы в штрихованной системе:

$$\varphi = \omega\frac{1 - c\beta k/\omega}{\sqrt{1-\beta^2}}t' - k\frac{1 - \beta\omega/ck}{\sqrt{1-\beta^2}}z', \tag{14}$$

где множители перед $t'$ и $z'$ суть частота $\omega'$ и постоянная распространения $k'$ в движущейся системе, а вторые члены в числителях преобразуются с помощью (4) и дисперсионного соотношения (5), так что

$$\omega' = \omega\frac{1 - \beta\left[1 - (\omega_{nm}/\omega)^2\right]^{1/2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \omega\frac{1 - \beta(u/c)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{15}$$

$$k' = k\frac{1 - \beta\left[1 - (\omega_{nm}/\omega)^2\right]^{-1/2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = k\frac{1 - \beta(c/u)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{16}$$

Выражение (15) есть ничто иное как формула для эффекта Доплера в волноводе, демонстрирующая ожидаемую зависимость частоты от относительной скорости источника и приемника.

Из (15) и (16) проистекают замечательные следствия. Если скорость перемещения штрихованной системы $c\beta$ совпадает с групповой скоростью волны $u$ в лабораторной системе отсчета (что возможно в силу того, что $u < c$), то

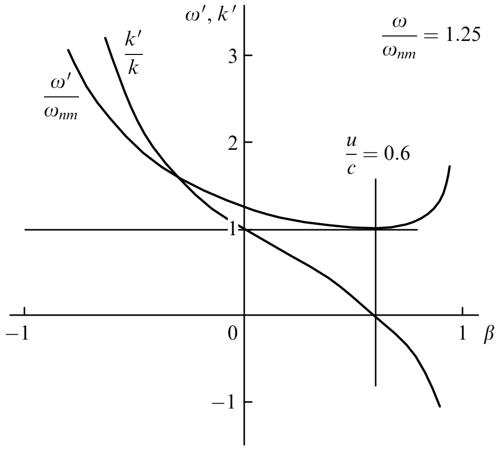


Рис.2.

$$\omega' = \omega_{nm} = \omega\sqrt{1-\beta^2} \tag{17}$$

и

$$k' = 0, \qquad u' = 0. \tag{18}$$

Последнее означает, что в штрихованной системе волна *останавливается* и транспортировка электромагнитной энергии прекращается (чего и следовало ожидать, поскольку $c\beta = u$), бегущая составляющая волны исчезает вовсе и сохраняется лишь поперечная стоячая составляющая с частотой $\omega'$ (17), отвечающей поперечному эффекту Доплера второго порядка. В этой *остановленной* световой волне аккумулирована *покоящаяся* электромагнитная энергия $N\hbar\omega_{nm}$, или, иными словами, содержатся $N$ *остановленных* фотонов, каждый с энергией $\hbar\omega' = \hbar\omega_{nm}$, равной энергии кванта собственной (критической) частоты волноводной моды. В соответствии с принципом эквивалентности от *покоящейся* энергии фотона $\hbar\omega_{nm}$ лишь один шаг до неподвижной массы (11), которая в точности совпадает с ненулевой массой *покоя* фотона, обнаруживаемой в серии динамических экспериментов [1].

При дальнейшем увеличении скорости перемещения штрихованной системы отсчета ($c\beta > u$) происходит обращение направления распространения волны ($k' < 0$) и возрастание ее частоты $\omega'$ (рис.2).

## 3. Релятивистские преобразования векторов поля

При переходе в движущуюся штрихованную систему координат векторы поля также подлежат трансформации. При этом продольные компоненты векторов поля остаются неизменными ($e'_z = e_z$, $h'_z = h_z$), а поперечные трансформируются по известным релятивистским правилам:

$$\begin{aligned}
e'_x &= (1-\beta^2)^{-1/2}\left(e_x - \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\beta h_y\right),\\
e'_y &= (1-\beta^2)^{-1/2}\left(e_y + \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\,\beta h_x\right),\\
h'_x &= (1-\beta^2)^{-1/2}\left(h_x + \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,\beta e_y\right),\\
h'_y &= (1-\beta^2)^{-1/2}\left(h_y - \sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\,\beta e_x\right)
\end{aligned} \tag{19}$$

или с учетом (6)

$$\begin{aligned}
e'_x &= -\mathrm{i}\frac{c}{\omega_{nm}}\frac{\omega}{\omega_{nm}}\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}\left[\left(\frac{u}{c}-\beta\right)\frac{\partial e_z}{\partial x}\right.\\
&\quad\left.+\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(1-\beta\frac{u}{c}\right)\frac{\partial h_z}{\partial y}\right],\\
e'_y &= -\mathrm{i}\frac{c}{\omega_{nm}}\frac{\omega}{\omega_{nm}}\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}\left[\left(\frac{u}{c}-\beta\right)\frac{\partial e_z}{\partial y}\right.\\
&\quad\left.-\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left(1-\beta\frac{u}{c}\right)\frac{\partial h_z}{\partial x}\right],\\
h'_x &= -\mathrm{i}\frac{c}{\omega_{nm}}\frac{\omega}{\omega_{nm}}\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}\left[\left(\frac{u}{c}-\beta\right)\frac{\partial h_z}{\partial x}\right.\\
&\quad\left.-\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(1-\beta\frac{u}{c}\right)\frac{\partial e_z}{\partial y}\right],\\
h'_y &= -\mathrm{i}\frac{c}{\omega_{nm}}\frac{\omega}{\omega_{nm}}\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}\left[\left(\frac{u}{c}-\beta\right)\frac{\partial h_z}{\partial y}\right.\\
&\quad\left.+\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left(1-\beta\frac{u}{c}\right)\frac{\partial e_z}{\partial x}\right].
\end{aligned} \tag{20}$$

Отсюда составляющая вектора Пойнтинга, характеризующая плотность потока электромагнитной энергии вдоль оси волновода $z'$ в штрихованной системе отсчета,

$$\begin{aligned}
P' &= \left(\frac{c}{\omega_{nm}}\frac{\omega}{\omega_{nm}}\right)^2\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}\left\{\left[\left(1-\beta\frac{u}{c}\right)^2\right.\right.\\
&\quad\left.+\left(\frac{u}{c}-\beta\right)^2\right]+\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\frac{\partial h_z}{\partial y}-\frac{\partial e_z}{\partial y}\frac{\partial h_z}{\partial x}\right)\\
&\quad+\left(\frac{u}{c}-\beta\right)\left(1-\beta\frac{u}{c}\right)\left[\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\left[\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)^2\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.+\left(\frac{\partial e_z}{\partial y}\right)^2\right]+\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\left[\left(\frac{\partial h_z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h_z}{\partial y}\right)^2\right]\right]\right\},
\end{aligned} \tag{21}$$

что с учетом (10) для ТМ- и ТЕ-поляризаций соответственно дает

$$\begin{aligned}
P'_{\mathrm{TM}} &= \left(1-\beta\frac{u}{c}\right)\left(1-\beta\frac{c}{u}\right)\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}P_{\mathrm{TM}},\\
P'_{\mathrm{TE}} &= \left(1-\beta\frac{u}{c}\right)\left(1-\beta\frac{c}{u}\right)\left(1-\beta^2\right)^{-1/2}P_{\mathrm{TE}}\,.
\end{aligned} \tag{22}$$

В итоге в сопровождающей системе отсчета с $\beta = u/c$ вектор Пойнтинга обращается в нуль ($P'_{\mathrm{TM}} = 0$, $P'_{\mathrm{TE}} = 0$), т. е. транспортировка энергии прекращается и аккумулированная электромагнитная энергия *останавливается*, а фотоны в волноводе оказываются *покоящимися*. При дальнейшем увеличении скорости штрихованной системы ($\beta > u/c$) поток энергии меняет знак и обращается вспять. Эта картина в точности повторяет результат разд.2, полученный при анализе поведения постоянной распространения $k$.

## Заключение

Таким образом, в дополнение к выводам работы [1] о массоподобном поведении фотонов реальных электромагнитных полей в разнообразных динамических ситуациях следует отметить, что ненулевая масса покоя фотона обнаруживается при его чисто кинематической *остановке* в результате релятивистского преобразования координат.

Важно подчеркнуть, что, несмотря на абсолютную, по-видимому, экспериментальную неотличимость этой фотонной массы покоя от инертной и тяжелой массы в стандартном понимании, вряд ли можно массу покоя считать имманентным свойством фотона, подобным неизменным свойствам массивных частиц, поскольку масса покоя фотона зависит от внешних условий (способа возбуждения электромагнитного поля, граничных условий и т. п.; например, масса изменяется по мере перемещения вдоль волновода с переменным по длине сечением).

Полученные результаты имеют скорее эвристическое значение, демонстрируя способ приобретения массы покоя частицами, изначально принадлежащими к безмассовым полям, без априорного введения понятия массы.

И наконец, попутно отметим возможность реального лабораторного проведения еще одного релятивистского эксперимента, на сей раз в рамках общей теории относительности. Речь идет о «настольной черной дыре» [1], наблюдению которой на опыте препятствует неустранимое возрастание затухания волны в волноводе по мере приближения к критическим явлениям, что сопровождается утратой последними резкого порогового характера. Это препятствие может быть устранено компенсацией затухания посредством введения в волновод усиливающей среды с шириной полосы усиления, заметно превышающей отстройку частоты волны от критической частоты.

1. Ривлин Л.А. *УФН*, **167**, 309 (1997).
2. Де Бройль Л. *Электромагнитные волны в волноводах и полых резонаторах* (М., ГИИЛ, 1948).

**L.A.Rivlin. Relativistic kinematics of the electromagnetic fields of a waveguide mode.**

**It is shown that when a waveguide wave is observed from a co-moving frame of reference, which moves with a velocity equal to the group wave velocity, the wave propagation comes to a halt and the electromagnetic energy contained in the waveguide proves to be immobile. The equivalent to this motionless energy is a nonzero rest mass of photons in a waveguide, the mass coinciding with that which manifests itself in dynamic experiments.**

*БИБЛИОГРАФИЯ*

# Рецензия на книгу М.Д.Галанина «Люминесценция молекул и кристаллов» (М., Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, 1999)

**М.В.Фок**

В книге М.Д.Галанина «Люминесценция молекул и кристаллов», выпущенной Физическим институтом им. П.Н.Лебедева РАН в 1999 г., сделана попытка в сжатом виде дать основные сведения о физике люминесценции. Автор прослеживает историю развития представлений о люминесценции и вводит основные ее характеристики. Рассматриваются спектры свечения и возбуждения, квантовый выход, длительность свечения, степень поляризации. Большое внимание уделяется принципиальным вопросам, например отличию люминесценции от других видов вторичного излучения, различию между средней длительностью возбужденного состояния молекул и длительностью их послесвечения в условиях тушения посторонними молекулами. Подробно анализируются результаты экспериментальных работ по люминесценции молекул, примесных центров в кристаллах, экситонному механизму люминесценции.

К достоинствам книги следует отнести то, что она написана хорошим языком и без излишних подробностей. Однако отсутствие подробностей иногда заставляет читателя основательно подумать, чтобы понять и усвоить прочитанное.

Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 117924 Москва, Ленинский просп., 53

Поступила в редакцию 11 января 2000 г.