

# Усиливающие волноводы и концентрация излучения на сверхмалых масштабах

Т.И.Кузнецова

*Показано, что в однородном цилиндрическом волноводе, содержащем усиливающую среду, нет отсечки по частотам. Волны любой частоты нарастают в направлении распространения, при этом для малых поперечных сечений волновода инкремент обратно пропорционален его диаметру. Рассмотрен также неоднородный волновод, состоящий из усиливающего и поглощающего участков. Для волны за критической частоты пропускание такого волновода будет существенно больше, чем пропускание однородного пассивного волновода.*

**Ключевые слова:** критический волновод, субволновое разрешение.

## Введение

Успехи субволновой микроскопии, достигнутые в последние годы, основаны, как известно, на применении квазиточечных источников света. В реальных схемах, создающих оптические поля сверхмалой протяженности, во многих случаях используются затухающие волны, из-за чего получаемые источники света являются малоинтенсивными. Это относится и к схеме с микроапертурой в экране [1], и к сужающемуся волокну, покрытому металлом [2], и к «микропипетке» с металлическим покрытием [3]. Особняком стоит схема с металлической иглой, на которую направляется световая волна (см., напр., [4, 5]); создаваемое световое пятно здесь не является малоинтенсивным, но зато наряду с ним присутствует и сильный фон излучения, от которого приходится избавляться, что в ряде случаев удается сделать с помощью временной модуляции.

Создание квазиточечного источника излучения повышенной интенсивности было бы весьма важно для задач микроскопии высокого разрешения. В связи с этим обратим внимание на одну особенность волноводов: характеристики их собственных волн существенно изменяются при переходе от пассивного волновода к активному.

## 1. Волновод с постоянным коэффициентом усиления

Рассмотрим для определенности волновод круглого сечения с идеально отражающими стенками. Пусть  $z$  – координата вдоль оси волновода,  $a$  – радиус волновода,  $\rho$  – расстояние до оси,  $\varphi$  – полярный угол. Поверхность, ограничивающая волновод, находится при  $\rho = a$ . Выберем для рассмотрения волну магнитного типа [6], у которой компоненты магнитного поля  $H_\rho$  и  $H_z$  и компонента электрического поля  $E_\varphi \equiv E$  отличны от нуля, все компоненты изменяются во времени как  $\exp(-i\omega t)$ , а

зависимость полей от переменной  $\varphi$  отсутствует. Пусть среда волновода имеет постоянную диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$ . При этом, как известно, компонента  $E$  описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E) \right) + \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \quad (1)$$

с граничным условием

$$E(\rho = a, z) = 0. \quad (2)$$

Рассмотрим волну, удовлетворяющую (1), (2):

$$E = AJ_1(q\rho) \exp(pz), \quad (3)$$

где  $A$  – константа;

$$p^2 - q^2 + \frac{\omega^2}{\varepsilon c^2} = 0; \quad q \approx \frac{3.83}{a}; \quad (4)$$

$J_1$  – функция Бесселя, а  $qa$  – первый из ее нулей. Как известно, критический радиус волновода  $a_{cr}$  – это радиус, при котором выполняется равенство

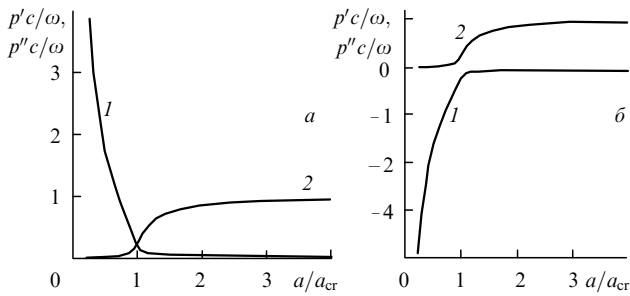
$$(\text{Re} \varepsilon) \frac{\omega^2}{c^2} - q^2(a_{cr}) = 0 \quad (5)$$

и который, как правило, вводят в случае вещественной диэлектрической проницаемости. При  $a > a_{cr}$  зависимость поля от  $z$  имеет вид распространяющейся волны  $\sim \exp[i(\varepsilon\omega^2/c^2 - q^2)^{1/2}z]$ , а при радиусах, меньших критического, обычно выбирают затухающую волну.

Рассмотрим среду с усилением и положим

$$\varepsilon = 1 - i\delta, \quad (6)$$

где  $0 < \delta \ll 1$ . Отметим, что для реальных сред усиление  $\delta$  лежит в пределах  $10^{-8} - 10^{-4}$ . Найдем зависимость поля от продольной координаты в такой среде; для этого нужно лишь вычислить показатель  $p$ . С учетом (4), (6) имеем



Зависимость инкремента (1) и волнового числа (2) собственной волны от радиусов активного волновода (*a*) и волновода с затуханием (*b*).

$$p' + ip'' \equiv p = \left( q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + i\delta \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Из (7) видно, что  $p'p'' > 0$  при  $\delta > 0$ , т.е. направление роста интенсивности волны и направление ее распространения (эквивалентное направлению потока энергии) совпадают.

Вычисляя квадратный корень (7), находим зависимость вещественной и мнимой частей показателя  $p$  от радиуса волновода  $a$ . Эта зависимость приведена на рис. *a* для одного из решений (второе дается величинами  $-p'$ ,  $-p''$ ). При построении графиков использованы безразмерные инкремент, волновое число,  $p'c/\omega$ ,  $p''c/\omega$  и безразмерный радиус  $a/a_{cr}$ , где  $a_{cr} = 3.83\lambda/2\pi$ . Графики построены для усиления  $\delta = 0.1$ . При меньших  $\delta$  пересечение кривых при  $a/a_{cr} = 1$  сохранится, графики не изменят своего характера, но будут менее удобны для визуального анализа. Из рисунка видно, что при больших радиусах решение представляет собой распространяющуюся волну со слабым усилением  $p' \rightarrow \delta\omega/2c$  и с продольным волновым числом  $p'' \rightarrow \omega/c$ . При стремлении радиуса волновода к нулю инкремент увеличивается и составляет

$$p' \approx q(a). \quad (8)$$

Продольное волновое число при этом остается положительным, убывая вместе с  $a$ :

$$p'' \approx \delta \frac{\omega^2}{2c^2 q(a)}. \quad (9)$$

Поток электромагнитной энергии, как нетрудно вычислить, здесь направлен по оси  $z$  и знак его совпадает со знаком  $p''$ , так что положительные  $p'$  и  $p''$  с определенностью означают, что волна распространяется от входа в глубину волновода и при этом интенсивность ее нарастает. Для сравнения на рис. *b* приведены зависимости  $p'$  и  $p''$  от радиуса, которые имеют место в волноводе с малым затуханием.

Следует подчеркнуть, что показатель роста поля в усиливающем волноводе очень велик и на несколько порядков превышает то усиление, которое данная активная среда обеспечивала бы в свободном пространстве. Усиление амплитуды в  $e$  раз происходит здесь на расстоянии, меньшем длины волны излучения. Большое усиление связано с характеристиками волны в волноводе. Обратим внимание на то, что при малых радиусах волновода волна распространяется почти перпендикулярно его стенкам: действительно, из (9) легко получить, что  $p'' \ll q$ . При этом, проходя по оси расстояние  $\Delta z$ , свет фактически проходит многократно увеличенный путь  $\Delta z 2q^2 c^2 / \omega^2 \delta$ , что и объясняет возрастание результирующего усиления.

Таким образом, излучение, войдя в однородно усиливающий волновод, будет далее распространяться с усилением, каково бы ни было соотношение диаметра волновода и длины волны.

## 2. Усиление, изменяющееся вдоль оси волновода

Создание усиления в волноводе требует специальных мер. Впрочем, некоторые варианты активных волноводов можно предложить уже сейчас. Один такой вариант может быть осуществлен при введении в микроволновод какого-либо комбинационно-активного вещества, при этом нужно использовать две световые волны на входе – волну накачки и стоксову компоненту рассеяния (см. [7]). На участке, где сильна накачка, стоксова компонента находится в режиме усиления, которое, впрочем, из-за затухания накачки постепенно подавляется.

Другой вариант связан с экспериментами (см. [8, 9]), в которых использовалась специфическая активная среда, переносившая в волноводе энергию за счет безызлучательного взаимодействия. Интересно было бы на вход такой схемы дополнительно подать сигнал на смещенной частоте, усиление для которого в среде фактически уже обеспечено, что и будет означать работу с усиливающим волноводом. Разумеется, усиление не будет однородным по длине: на него будет влиять как плотность используемой активной среды, так и интенсивность процессов, приводящих к девозбуждению.

Возвращаясь к варианту с оптической накачкой, подчеркнем, что для него тоже характерна неоднородность усиления. Накачка будет заведомо ослабевать, если она поступает с торца, а диаметр волновода меньше критического. Это будет означать уменьшение коэффициента усиления в продольном направлении. К убыванию усиления приведет также эффект насыщения, если исследуемая волна в волноводе будет иметь большую интенсивность. Продольные вариации коэффициента усиления могут, вообще говоря, изменить условия прохождения излучения по волноводу. Чтобы оценить характер возможных эффектов, выберем волновод с усилением, зависящим от продольной координаты. Рассмотрим, какие при этом возникают особенности распространения волн и не будет ли усиление подавляться отражениями поля от неоднородностей.

Итак, допустим, что диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  в волноводе имеет вид

$$\varepsilon = 1 - i\delta_1 - i \frac{\delta_2 - \delta_1}{1 + \exp(-z/l)}. \quad (10)$$

При таком  $\varepsilon$  для волн рассматриваемого типа по-прежнему справедливо уравнение (1).

Будем считать, что  $\delta_1 > 0$ , а  $\delta_2 = -\bar{\delta}_2 < 0$ , что означает усиление на входе волновода и поглощение на выходе. Выбирая зависимость поля от координат в виде

$$E = AJ_1(q\rho)Z(z), \quad (11)$$

где  $A$  – константа, и вводя обозначения

$$P_1^2 = l^2 \left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 - i\delta_1) \right], \quad (12)$$

$$P_2^2 = l^2 \left[ q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (1 + i\bar{\delta}_2) \right],$$

из (1), (10), (11) находим

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - \frac{1}{l^2} \left[ P_1^2 + \frac{P_2^2 - P_1^2}{1 + \exp(-z/l)} \right] Z = 0. \quad (13)$$

Используя для решения (13) тот же подход, который изложен в [10] применительно к случаю вещественных параметров  $P_1^2$  и  $P_2^2$ , получаем

$$Z(z) = (-e^{-z/l})^{P_2} F(P_2 + P_1, P_2 - P_1; 1 + 2P_2; -e^{-z/l}), \quad (14)$$

где  $F$  – гипергеометрическая функция. Выбор параметров гипергеометрической функции произведем так, чтобы  $\text{Re}P_1$  и  $\text{Re}P_2$  были положительны; при этом  $\text{Im}P_1 > 0$  и  $\text{Im}P_2 < 0$ , а поле при  $z \rightarrow \infty$  имеет вид уходящей волны.

Используя, как и в [10], формулы преобразования гипергеометрических рядов, можно из выражения (14) получить другую запись для решения:

$$\begin{aligned} Z(z) = & (-1)^{P_2} \frac{\Gamma(1 + 2P_2)\Gamma(-2P_1)}{\Gamma(P_2 - P_1)\Gamma(P_2 - P_1 + 1)} \exp\left(\frac{P_1 z}{l}\right) \\ & \times F(P_2 + P_1, P_1 - P_2; 2P_1 + 1; -e^{z/l}) \\ & + (-1)^{P_2} \frac{\Gamma(1 + 2P_2)\Gamma(2P_1)}{\Gamma(P_2 + P_1)\Gamma(P_2 + P_1 + 1)} \exp\left(-\frac{P_1 z}{l}\right) \\ & \times F(P_2 - P_1, -P_1 - P_2; -2P_1 + 1; -e^{z/l}). \end{aligned} \quad (15)$$

При  $z \rightarrow \infty$  выражение (14) принимает вид

$$Z(z) \approx (-1)^{P_2} \exp\left(-\frac{P_2 z}{l}\right), \quad (16)$$

причем здесь требуется, чтобы выполнялось условие

$$e^{-z/l} \ll 1. \quad (17)$$

Допустим, что  $\text{Re}2P_1$  не является положительным целым числом. Тогда при  $z \rightarrow -\infty$ , учитывая формулы (12) и малость параметров  $\delta_1$  и  $\bar{\delta}_2$ , выражение (15) можно преобразовать к виду

$$Z(z) \approx (-1)^{P_2} \left[ \frac{\pi(P_2 - P_1)}{\sin 2\pi P_1} \exp\left(\frac{P_1 z}{l}\right) + \exp\left(-\frac{P_1 z}{l}\right) \right], \quad (18)$$

причем здесь требуется выполнение неравенства

$$e^{-|z|/l} \ll 1. \quad (19)$$

В особых точках, т.е. при  $\text{Re}2P_1 = n + 1$ , где  $n = 0, 1, 2, \dots$ , прямая волна по-прежнему хорошо аппроксимируется первым слагаемым в формуле (18), а отраженная волна описывается более сложным выражением, чем второе слагаемое в (18). Лишь при переходе к еще большему  $|z|$ , при которых будет выполнено более сильное, чем (19), условие, а именно

$$e^{-|z|/l} \ll \delta_1, \quad (20)$$

формула (18) становится применимой и в особых точках. Формула (18) в удобной форме представляет поле на входном участке волновода: оно состоит из нарастающей волны, идущей в положительном направлении, и отраженной волны, которая усиливается в направлении  $-z$ .

Теперь, когда получены формулы (16), (18), можно рассмотреть конечный участок волновода  $-l_1 \leq z \leq l_2$  и определить его пропускание  $T$ . Сопоставляя (16) и (18), находим

$$T = \frac{\sin 2\pi P_1}{\pi(P_2 - P_1)} \exp\left[(P_1 l_1 - P_2 l_2)/l\right]. \quad (21)$$

Учитывая малость параметров  $\delta_1$  и  $\bar{\delta}_2$ , здесь можно перейти к следующим приближенным выражениям для  $P_1$  и  $P_2$ :

$$P_1 = P \left[ 1 + i\delta_1 \frac{1}{q^2 c^2 / (\omega^2 - 1)} \right], \quad (22)$$

$$P_2 = P \left[ 1 - i\bar{\delta}_2 \frac{1}{q^2 c^2 / (\omega^2 - 1)} \right], \quad (23)$$

где

$$P = l \left( q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Из (21) получаем выражение для минимального амплитудного пропускания

$$|T_{\min}| = \frac{2\delta_1}{\delta_1 + \bar{\delta}_2} \exp\left[\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} (l_1 - l_2)\right]. \quad (25)$$

Подчеркнем, что этот минимум достигается при условии

$$2P \equiv 2l \left( q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2} = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

При этом имеют место особенности отражения: для отраженной волны возникает область повышенной интенсивности вблизи переходного слоя.

Максимальное пропускание

$$\begin{aligned} |T_{\max}| = & \frac{2}{\delta_1 + \bar{\delta}_2} \left( q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2} \frac{c^2}{l\omega^2} \\ & \times \exp\left[\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} (l_1 - l_2)\right] \end{aligned} \quad (27)$$

достигается при условии

$$2l \left( q^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} = 1, 2, 3, \dots \quad (28)$$

Формулы (25) и (27) показывают, что прошедшая волна здесь весьма интенсивна. Для сравнения напомним, что в пассивном волноводе (когда и усиление и поглощение отсутствует) мы имели бы такое пропускание:

$$T_0 = \exp\left[-\left(q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)^{1/2} (l_1 + l_2)\right]. \quad (29)$$

В отличие от этого в активном волноводе показатель экспоненты другой (см. (25), (27)), поскольку затухание происходит только на выходном участке волновода, а начальный участок дает усиление. Кроме того, предэк-

пониженный множитель в выражениях (25) или (27) может быть весьма велик. В минимуме (т. е. в выражении (25)) он имеет порядок единицы, а в максимуме (т. е. в выражении (28)) он много больше единицы за счет малости  $\delta_1$  и  $\bar{\delta}_2$ .

Проведенное рассмотрение показывает, что неоднородности усиления в направлении оптической оси не отменяют возможности прохождения волн за критической частоты через волновод. Даже в выбранном нами неблагоприятном случае, когда усиление, уменьшаясь вдоль оси, сменяется поглощением, волна на выходе оказывается весьма интенсивной.

## Выводы

Таким образом, характеристики волноводов заметно изменяются при введении в них усиления. Даже при малом усилении в закритическом волноводе коэффициент пропускания излучения многократно возрастает. По-видимому, усиливающие волноводы могут служить основой для создания интенсивного квазиточечного источника излучения. Они также могут быть использованы для съема сигнала с субволновой площадки при исследованиях микрообъектов в режиме отражения.

1. Pohl D.W., Denk W., Lanz M. *Appl. Phys. Letts*, **44**, 651 (1984).
2. Betzig E., Trautman J.K., Harris T.D., Weiner J.S., Kostelak R.I. *Science*, **257**, 189 (1992).
3. Meixner A.J., Zeisel D., Bopp M.A., Tarrach G. *Optical Engng*, **34**, 2324 (1995).
4. Bragas A.V., Landi S.M., Martinez O.E. *Appl. Phys. Letts*, **72**, 2075 (1998).
5. Aigouy L., Larech A., Grésillon S., Cory H., Boccara A.C., Rivoal J.C. *Optics Letts*, **24**, 187 (1999).
6. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М., «Радио и связь», 1988).
7. Кузнецова Т.И. В сб. «Комбинационное рассеяние света. 70 лет исследований» (М., изд-е ФИАН, 1998, с. 191 – 195).
8. Kopelman R., Shortreed M., Shi Z.-Y., Tan W., Xu Z., Moore J., Bar-Haim A., Klafter J. *Phys. Rev. Letts*, **78**, 1239 (1997).
9. Летохов В.С., Секацкий С.К. *Письма в ЖЭТФ*, **63**, 311 (1997).
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М., Физматгиз, 1963).

### T.I.Kuznetsova. Amplifying waveguides and the concentration of radiation on supersmall scales

A uniform cylindrical waveguide containing an amplifying medium is shown to have no frequency cutoff. There, waves of an arbitrary frequency increase in the direction of propagation, and the increment obtained for small waveguide cross sections is inversely proportional to the waveguide diameter. A nonuniform waveguide consisting of amplifying and absorption sections is also analysed. The transmittance of this waveguide for the below cutoff wave is considerably higher than the transmittance of a uniform passive waveguide.