

# Некоторые модели распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в нелинейной среде

А.И.Маймистов

*Рассмотрены некоторые случаи модельных сред, для которых удается аналитически найти решения нелинейных волновых уравнений и получить явную зависимость напряженности электрического поля от времени для импульсов электромагнитного поля произвольно короткой длительности. При этом не делалось никаких предположений, касающихся гармонической несущей волны или скорости изменения поля таких импульсов. В число рассмотренных моделей входят резонансные двухуровневые и квазирезонансные системы. Нерезонансные среды представлены моделями ангармонических осцилляторов – моделями Дюффинга и Лоренца. В большинстве случаев можно найти только частные решения, описывающие стационарное распространение видеоимпульса – однополярного всплеска электрического поля, или импульса, имеющего небольшое число колебаний электрического поля около нуля. Эти решения отвечают достаточно сильным электромагнитным полям, таким, что присущая среде дисперсия подавляется нелинейными процессами.*

**Ключевые слова:** ультракороткие импульсы электромагнитного излучения, нелинейная среда.

## Введение

Последние два десятилетия отмечены продвижением исследований в нелинейной оптике и лазерной физике в область фемтосекундных длительностей импульсов оптического (более точно – электромагнитного) излучения [1–12]. Одним из методов получения подобных импульсов является сжатие исходного импульса с помощью различных временных компрессоров [1, 2, 5, 7], в том числе волоконно-решеточных. Данным методом были получены импульсы длительностью 6 фс [2]; обсуждалась также возможность сжатия импульса до 1 фс [8] в опытах по рассеянию свободных релятивистских электронов в поле мощного короткого импульса излучения. В [9] рассматривалось получение электромагнитных импульсов аттосекундного диапазона длительностей.

Другим методом получения фемтосекундных импульсов является непосредственная их генерация в лазерных системах [6, 10]. Так, в работе [6] была получена генерация импульсов длительностью 20 фс с энергией 1.5 мДж и частотой повторения 1кГц (после волоконно-призмного компрессора были получены импульсы длительностью 5 фс с энергией 0.5 мДж). В работе [10] были получены импульсы Ti:сапфирового лазера длительностью 6.5 фс со средней мощностью 200 мВт и частотой повторения 86 МГц. Параметрическое взаимодействие волн, их самовоздействие (самофокусировка и автомодуляция), когерентные переходные процессы в поле фемтосекундных импульсов рассматривались в работах [11]. Получению коротких мощных лазерных импульсов посвящен обзор [12].

Успехи в области генерации фемтосекундных и более коротких импульсов электромагнитного излучения делают интересным анализ теоретических моделей, описывающих распространение таких импульсов в нелинейных диспергирующих средах. Естественной основой всех рассматриваемых теорий являются уравнения Максвелла, дополненные уравнениями, которые определяют эволюцию поляризации или токов, возникающих в среде под действием электромагнитного излучения [13–25], или уравнением Шредингера для электронов, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем [26, 27]. Поскольку здесь редко удается получить точные аналитические результаты, часто используются различные приближения, позволяющие упростить задачу и найти аналитические выражения.

Важное и в то же время простое приближение получено в результате предположения о распространении электромагнитных волн только в одном из возможных направлений. Условие *однонаправленности волн* понижает порядок волнового уравнения, не внося при этом ограничений на длительность импульса. Разумеется, существуют ситуации, когда это приближение заведомо неприемлемо (например, для волн в периодических или рассеивающих средах).

Другой широкий класс приближений связан со свойствами среды. Так, газообразные среды (молекулярные газы, пары металлов), а также примеси в стеклах характеризуются дискретным спектром поглощения. Если частота монохроматического излучения совпадает с частотой атомного или молекулярного перехода или близка к ней, то взаимодействие имеет резонансный характер. Импульсы излучения не являются монохроматическими волнами, однако их можно представить *квазимонохроматической волной*

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет), Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; эл. почта: maimistov@pico.mephi.ru

$$E(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_0 t + i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}) + \text{компл. сопр.}, \quad (1)$$

где с целью упрощения рассматривается плоская скалярная волна с волновым вектором  $\mathbf{k}_0$ , отвечающим частоте несущей монохроматической волны  $\omega_0$ . Это представление достаточно корректно, если огибающая импульса  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  является медленно меняющейся в пространстве и времени функцией, такой, что справедливы неравенства

$$\left| \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right| \ll \omega_0 |\mathcal{E}| \text{ и } |\nabla \mathcal{E}| \ll |\mathbf{k}_0| |\mathcal{E}|.$$

Такое представление импульса электромагнитного излучения называется приближением *медленно меняющейся огибающей*. Условие резонанса, определенное для монохроматической волны, может быть распространено и на случай импульсного излучения, если спектральная ширина огибающей  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  много меньше частоты несущей волны и разности частот переходов между энергетическими уровнями, ближайшими к резонансному. Здесь речь идет о разрешенных в дипольном приближении переходах. Часто при этом условии пренебрегают всеми прочими энергетическими уровнями, кроме связанных с условием резонанса, и используют представление резонансной среды ансамблем *двухуровневых атомов*. В более общем случае в качестве модели резонансной среды используется ансамбль  $N$ -уровневых атомов.

Если длительность электромагнитного импульса меньше всех времен релаксации в среде, то его распространение сопровождается только вынужденным поглощением и переизлучением. При  $N = 2$  эти процессы в определенных условиях, налагаемых на амплитуду импульса, могут привести к самоиндуцированной прозрачности [28]. Электромагнитные импульсы, длительность которых меньше времен релаксации поляризации и населенности резонансных уровней, называют ультракороткими импульсами (УКИ). Хотя сейчас этот термин стал использоваться более широко, ради определенности будем понимать под ним достаточно короткие (в указанном выше смысле) импульсы, допускающие представление квази-монохроматической волной.

В приближении медленно меняющихся огибающих уравнения Максвелла или волновое уравнение Д'Аламбера редуцируются в уравнения первого порядка для  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$ , а резонансная среда описывается уравнениями Блоха. Если электромагнитный импульс представлен суперпозицией квазимонохроматических волн с различными частотами несущих, отвечающих своей паре резонансных переходов, то необходимо использовать систему редуцированных волновых уравнений и систему уравнений Блоха, обобщенных на случай многоуровневой среды. В [19, 29–32] представлены примеры таких ситуаций.

Квазигармонические сигналы чрезвычайно широко используются в теоретических исследованиях, посвященных нелинейным когерентным явлениям, и в нелинейной волоконной оптике. Однако это не единственный пример уединенной электромагнитной волны. Начиная еще с тех времен, когда были открыты явления когерентного взаимодействия электромагнитного излучения с резонансными системами, сохраняется интерес к теоретическому описанию распространения столь коротких импульсов излучения, когда приближение медленно меняющейся огибающей перестает работать. Известно [13, 33, 34], что полные уравнения Максвелла–Блоха имеют решение, которое отвечает распространению импульса электромагнитного излучения без заполнения высокочастотной несущей. Такие импульсы позже были названы *видеоим-*

*пульсами* [36–39]. Численное моделирование распространения видеоимпульсов [40] показало их неустойчивость относительно столкновения друг с другом, а в [41] выявлено отсутствие у полных уравнений Максвелла–Блоха свойства Пенлеве, что указывает на несолитонный характер видеоимпульсов.

Кроме того, полные уравнения Максвелла–Блоха обладают решениями, отвечающими уединенным волнам, которые содержат небольшое число колебаний напряженностей электрического и магнитного полей. Такие волны называют предельно короткими электромагнитными импульсами. Если число колебаний велико, то эти импульсы можно приближенно описать квазигармонической волной (или суперпозицией таких волн при наличии нескольких несущих частот). В этом случае их можно называть УКИ. При этом предполагается, что длительность УКИ остается много меньшей времени необратимой релаксации поляризации.

Рассмотрение распространения видеоимпульсов следует начать с условий применимости для этой задачи двухуровневого приближения. Для квазимонохроматической волны принимается во внимание только резонансный переход, если частота несущей волны близка к частоте атомного перехода, а полуширина спектра импульса существенно мала по сравнению с ней. Максимум спектра видеоимпульса находится на нулевой частоте, и для определения критерия, позволяющего учитывать лишь один из переходов, можно использовать только полуширину спектра видеоимпульса  $\Delta\omega_p$ . Таким критерием будем полагать условие, что спектральная полуширина видеоимпульса меньше или порядка частоты перехода из основного состояния в ближайшее (на шкале энергий) возбужденное состояние, тогда как прочие возбужденные состояния удалены по частоте от основного состояния более чем на несколько полуширин  $\Delta\omega_p$ .

Спектры подобной структуры можно найти среди спектров ионов или атомов. (Например, для атома калия частота перехода из основного состояния  $4S$  в состояние  $4P$  примерно в два раза меньше, чем частота перехода  $4S - 5P$ ; для ионов  $\text{Er}^{3+}$  так же соотносятся частоты переходов из основного состояния  $^4I_{15/2}$  в нижнее возбужденное состояние  $^4I_{13/2}$  и частоты переходов  $^4I_{15/2} \rightarrow ^4I_{9/2}$ ,  $^4I_{15/2} \rightarrow ^4F_{9/2}$ .) В таких случаях реальные атомы или ионы можно аппроксимировать двухуровневыми атомами (в описанном выше смысле). Учет вырождения энергетических уровней двухуровневых атомов приведет к обобщению уравнений Блоха, но на первом этапе можно ограничиться минимальной кратностью вырождения.

Пусть  $\omega_a$  – частота перехода из основного состояния в самое нижнее возбужденное состояние. Эта частота выступает как естественный масштаб времени. Когда длительность импульса  $t_p$  удовлетворяет неравенству  $t_p \omega_a \gg 1$ , для описания распространения УКИ может быть использовано приближение медленно меняющихся огибающих. При этом предполагается, что соответствующие условия выполняются для скорости изменения огибающей УКИ. Наоборот, если  $t_p \omega_a \leq 1$ , то это приближение неприемлемо, но можно, по крайней мере, использовать приближение однонаправленного распространения волн.

В модели двухуровневой среды имеется еще один параметр, который определяет временной масштаб, – это частота Раби  $\omega_R$ . Кроме того, отношение  $\varepsilon = \omega_R / \omega_a$  может оказаться малым. В этом случае можно попытаться найти решение уравнения Блоха в виде ряда по степеням

$\varepsilon$ , а затем, оборвав этот ряд, найти поляризацию с точностью до некоторого порядка малости  $\varepsilon$  и, таким образом, получить приближенное волновое уравнение для электрического поля импульса, не прибегая к приближению медленно меняющихся огибающих. Условие  $\varepsilon \approx 1$  означает, что напряженность электрического поля импульса сравнима с напряженностью «атомного» поля, так что параметр  $\varepsilon$  определяет применимость понятия «сильное поле». Условие  $\Delta\omega_p \ll \omega_a$  при  $\omega_R \ll \omega_a$  будет называться условием *квазирезонанса*.

Следует отметить, что уравнения Блоха упоминались здесь в связи с использованием резонансной среды в качестве примера уравнений, определяющих поведение поляризации среды. В ином случае можно использовать какие-либо другие уравнения, связанные с иной моделью нелинейной среды, например модель ангармонического осциллятора, модель электронной плазмы в металле, электроны проводимости в полупроводниках, экситоны в молекулярных кристаллах, спиновые волны в магнитных диэлектриках.

В последующих разделах будут рассматриваться электромагнитные уединенные волны настолько малой длительности, что приближение медленно меняющейся огибающей будет неприменимо. В качестве нелинейных сред, в которых распространяются такие импульсы, мы рассмотрим некоторые самые простые модели, используемые в нелинейной оптике. Выбор конкретной модели нелинейной среды позволяет вывести уравнения, которые приближенно описывают эволюцию предельно коротких импульсов, причем условие медленности изменения огибающей импульса или квазигармоническое приближение (в котором содержится предположение о возможности выделения гармонической волны в качестве несущей) не используется. Большинство представленных здесь уравнений не может быть решено точно аналитическими методами, но некоторые частные случаи решений можно найти. Именно такие решения будут рассматриваться в основной части данной статьи.

### 1. Приближение однонаправленных волн

В изотропном диэлектрике система уравнений Максвелла сводится к одному волновому уравнению для напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = E\mathbf{l}$ . Для плоской волны с постоянным вектором поляризации  $\mathbf{l}$  можно получить волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где поляризация среды  $P$  определяется выбором модели, которую используют для описания нелинейной среды.

Следуя [14, 42], введем вспомогательную функцию  $B(z, t)$ , удовлетворяющую уравнению  $\partial B/\partial t = c\partial E/\partial z$ , так что (2) может быть представлено в эквивалентной форме

$$\frac{\partial B}{\partial t} - c \frac{\partial E}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial t} - c \frac{\partial B}{\partial z} = -4\pi \frac{\partial P}{\partial t}.$$

После некоторых преобразований можно записать

$$\left( \frac{\partial B}{\partial t} + c \frac{\partial B}{\partial z} \right) - \left( \frac{\partial E}{\partial t} + c \frac{\partial E}{\partial z} \right) = 4\pi \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (3.1)$$

$$\left( \frac{\partial B}{\partial t} - c \frac{\partial B}{\partial z} \right) + \left( \frac{\partial E}{\partial t} - c \frac{\partial E}{\partial z} \right) = -4\pi \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (3.2)$$

Уравнения, определяющие характеристики этой системы, имеют следующий вид:  $\xi = t + z/c$  и  $\eta = t - z/c$ . Таким образом, характеристическая форма уравнений (3) записывается как

$$\frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\partial E}{\partial \eta} = -2\pi \frac{\partial P}{\partial t}, \quad \frac{\partial B}{\partial \xi} - \frac{\partial E}{\partial \xi} = 2\pi \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (4)$$

Предположим теперь, что  $E, B$  и  $P$  являются волнами, движущимися преимущественно в одном направлении, которое характеризуется, например, параметром  $\eta = t - z/c$ . Если бы среда была составлена из атомов или молекул, дающих линейный отклик на действующее на них поле, то все переменные  $E, B$  и  $P$  действительно зависели бы только от  $\eta$ ; в общем же случае имеется отраженная волна. Сделаем вспомогательную замену  $P \rightarrow \varepsilon P$  и разложим  $E, B$  и  $P$  по степеням  $\varepsilon$ , считая параметр  $\varepsilon$  малым:

$$E = E^{(0)}(\eta) + \varepsilon E^{(1)}(\eta, \xi) + \varepsilon^2 E^{(2)}(\eta, \xi) + \dots,$$

$$B = B^{(0)}(\eta) + \varepsilon B^{(1)}(\eta, \xi) + \varepsilon^2 B^{(2)}(\eta, \xi) + \dots,$$

$$P = P^{(0)}(\eta) + \varepsilon P^{(1)}(\eta, \xi) + \varepsilon^2 P^{(2)}(\eta, \xi) + \dots$$

Подстановка этих разложений в первое уравнение из системы (4) дает в первом порядке по  $\varepsilon$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (B^{(0)} + \varepsilon B^{(1)}) + \frac{\partial}{\partial \eta} (E^{(0)} + \varepsilon E^{(1)}) = -\varepsilon \frac{\partial P^{(0)}}{\partial \eta},$$

или

$$B + E = -\varepsilon P^{(0)}.$$

В представленных выше уравнениях предполагалось, что  $P^{(0)}$  не зависит от  $\xi$  и что поля исчезают одновременно с поляризацией среды. Точнее говоря, предполагалось, что как поля, так и поляризация исчезают при  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Подставляя полученное выше выражение во второе уравнение системы (4) и удерживая члены в правой части этого уравнения только до первого порядка по  $\varepsilon$ , можно получить

$$\frac{\partial E}{\partial \xi} = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial \eta}.$$

В исходных переменных  $z$  и  $t$  это уравнение можно записать как

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi}{c} \frac{\partial P}{\partial t}, \quad (5)$$

что соответствует волновому уравнению в приближении однонаправленной волны.

### 2. Резонансные среды

Чтобы уравнения (2) или (5) могли быть использованы для развития теории распространения коротких импульсов электромагнитного излучения, необходимо указать, каким образом надо вычислить поляризацию нели-

нейной среды. Многие годы наиболее популярной моделью нелинейной диспергирующей среды является резонансная среда. Более того, часто такая нелинейная среда представляет собой ансамбль двухуровневых атомов. Из недавних работ можно отметить [24, 25], в которых рассматривается распространение в такой среде импульсов длительностью в несколько колебаний несущей. В этом случае наиболее просто определить правила, согласно которым находится поляризация среды. Эти правила сформулированы как уравнения Блоха для вектора, компоненты которого связаны определенным образом с матричными элементами матрицы плотности двухуровневого атома (за подробностями можно обратиться к работе [14]).

**2.1. Стационарное решение уравнений Максвелла – Блоха**

В скалярном приближении уравнения Максвелла – Блоха, в которых не используется приближение медленно меняющихся огибающих, имеют вид [13, 14, 43]

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi n_{at} d}{c^2} \frac{\partial^2 r_1}{\partial t^2}, \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial t} = -\omega_a r_2, \quad \frac{\partial r_2}{\partial t} = \omega_a r_1 + \frac{2d}{\hbar} E r_3, \quad \frac{\partial r_3}{\partial t} = -2d E r_2, \tag{6.2}$$

где  $n_{at}$  – плотность резонансных атомов и  $d$  – дипольный момент атомного перехода; кроме того, не учитывается неоднородное уширение линии резонансного поглощения (все атомы имеют одинаковую частоту перехода  $\omega_a$ ). В новых переменных  $\tau = \omega_a t$ ,  $\xi = \omega_a z/c$  и  $q(\tau, \xi) = 2dE/\hbar\omega_a$  эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} = \alpha \frac{\partial^2 r_1}{\partial \tau^2}, \tag{7.1}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \tau} = -r_2, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \tau} = r_1 + q r_3, \quad \frac{\partial r_3}{\partial \tau} = -q r_2, \tag{7.2}$$

где безразмерный параметр  $\alpha = 8\pi n_{at} d^2/\hbar\omega_a$ . Его можно выразить через характерное для двухуровневой системы время [44, 45]  $t_c^{-1} = 4\pi n_{at} d^2 \hbar^{-1}$ , так что  $\alpha = 2/t_c \omega_a$ .

Чтобы получить уравнения, определяющие стационарное распространение импульса электромагнитного излучения, следует предположить, что компоненты вектора Блоха и нормированная огибающая импульса зависят только от одной переменной  $t \pm z/V$  или от безразмерной переменной  $\zeta = \omega_a(t \pm z/V)$ , где  $V$  – скорость распространения импульса. Это означает, что стационарные волны распространяются только в одном направлении. В этом случае система (7) преобразуется в систему обыкновенных уравнений. Приняв в качестве граничных условий при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  условия  $dq/d\zeta = q = 0$ ,  $r_1 = r_2 = 0$ ,  $r_3 = -1$ , можно решить полученную систему уравнений и найти при этом, что

$$q(\zeta) = \frac{2}{\theta} \operatorname{sech} \left[ \frac{\omega_a}{\theta} \left( t \pm \frac{z}{V} \right) \right],$$

где  $\theta^2 = (c^2 - V^2)/[(1 + \alpha)V^2 - c^2] > 0$ . Из этого выражения видно, что длительность стационарного импульса можно определить в виде  $t_p = \theta/\omega_a$ ; при этом выражение для напряженности электрического поля принимает следующий вид:

$$E(t, z) = E_0 \operatorname{sech} \left[ \frac{dE_0}{\hbar} \left( t \pm \frac{z}{V} \right) \right], \tag{8}$$

где амплитуда  $E_0 = \hbar t_p^{-1} d^{-1}$ . Это выражение для стационарного импульса совпадает с полученным в работе [13] и представленным в [14]. Поскольку в (8) несущая волна отсутствует, такой электромагнитный импульс является примером видеоимпульса.

Скорость распространения стационарного видеоимпульса (8) может быть найдена из определений его длительности и амплитуды. Как и в теории самоиндуцированной прозрачности (СИП) МакКолла – Хана [28], эти величины связаны друг с другом таким образом, чтобы импульс мог инвертировать двухуровневую систему и вернуть ее в исходное состояние в течение своей длительности. После некоторых алгебраических преобразований найдем, что

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{c^2} \left( 1 + \frac{\alpha \theta^2}{1 + \theta^2} \right) = \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{4(t_p/t_c)^2}{1 + (t_p \omega_a)^2} \right],$$

или

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{8\pi n_{at} d^2 \hbar \omega_a}{(dE_0)^2 + (\hbar \omega_a)^2} \right], \tag{9}$$

что совпадает с выражением, приведенным в [14].

Помимо уединенных волн, среди стационарных решений уравнений Максвелла – Блоха (6) или (7) формально можно найти другой класс решений – *кноидальные* волны, описывающие периодические протяженные волны. Поскольку сами уравнения (6) справедливы, пока длительность уединенной волны меньше или много меньше времен релаксации в атомной подсистеме, кноидальные волны представляют собой просто математический пример, лежащий за пределами физического смысла исходных уравнений. Тем не менее в качестве иллюстрации свойств рассматриваемой модели целесообразно упомянуть и этот класс решений уравнений Максвелла – Блоха.

**2.2. Видеоимпульс поляризованного излучения в резонансной среде**

Рассмотрим световой импульс, распространяющийся в резонансной среде, содержащей двухуровневые атомы с квантовыми переходами между уровнями, которые вырождены по проекциям угловых моментов  $j_a, j_b$  [46, 47], и рассмотрим случай  $j_a = 1 \rightarrow j_b = 0$ . Для матричных элементов матрицы плотности  $\hat{\rho}$ , описывающей переходы между состояниями  $|a, m\rangle = |j_a = 1, m = \pm 1\rangle$  и  $|b\rangle = |j_b = 0, m = 0\rangle$ , удобно ввести следующие обозначения:

$$\rho_{12} = \langle a, -1 | \hat{\rho} | a, +1 \rangle, \quad \rho_{13} = \langle a, -1 | \hat{\rho} | b \rangle, \quad \rho_{23} = \langle a, +1 | \hat{\rho} | b \rangle,$$

$$\rho_{11} = \langle a, -1 | \hat{\rho} | a, -1 \rangle, \quad \rho_{22} = \langle a, +1 | \hat{\rho} | a, +1 \rangle, \quad \rho_{33} = \langle b | \hat{\rho} | b \rangle,$$

$$\rho_{kl} = \rho_{lk}^*, \quad l, k = 1, 2, 3.$$

Обобщенная система уравнений Максвелла – Блоха может быть записана следующем виде:

$$\frac{\partial E^{(+1)}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^{(+1)}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle d_{13} \rho_{31} + d_{31} \rho_{13} \rangle, \tag{10.1}$$

$$\frac{\partial E^{(-1)}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E^{(-1)}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \langle d_{23} \rho_{32} + d_{32} \rho_{23} \rangle, \tag{10.2}$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{13}}{\partial t} = -\hbar\omega_a \rho_{13} + d_{13}(\rho_{33} - \rho_{11})E^{(+)} - d_{23}\rho_{12}E^{(-)}, \quad (11.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} = -\hbar\omega_a \rho_{23} + d_{23}(\rho_{33} - \rho_{22})E^{(-)} - d_{13}\rho_{21}E^{(+)}, \quad (11.2)$$

$$i\hbar \frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = d_{13}\rho_{32}E^{(+)} - d_{32}\rho_{13}E^{(-)}, \quad (11.3)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{11} - \rho_{33}) = 2(d_{13}\rho_{31} - d_{31}\rho_{13})E^{(+)} + (d_{23}\rho_{32} - d_{32}\rho_{23})E^{(-)}, \quad (11.4)$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{22} - \rho_{33}) = (d_{13}\rho_{31} - d_{31}\rho_{13})E^{(+)} + 2(d_{23}\rho_{32} - d_{32}\rho_{23})E^{(-)}. \quad (11.5)$$

Здесь  $E^{(q)}$  – сферическая  $q$ -компонента вектора напряженности электрического поля световой волны ( $q = \pm 1$ );  $d_{kl}$  – матричные элементы оператора дипольного момента атомного перехода  $j_a = 1 \rightarrow j_b = 0$ ;  $d_{13} = d_{23} = d_{31}^* = d_{32}^*$ ; угловые скобки означают суммирование по всем атомам с частотой  $\omega_a$ .

Удобно перейти к вещественным переменным и ввести безразмерную напряженность электрического поля

$$\rho_{13} = r_1 + ir_2, \quad \rho_{23} = s_1 + is_2, \quad \rho_{12} = p_1 + ip_2, \quad \rho_{33} - \rho_{11} = n_1,$$

$$\rho_{33} - \rho_{22} = n_2, \quad dE^{(+)} / \hbar\omega_a = q_1, \quad dE^{(-)} / \hbar\omega_a = q_2. \quad (12)$$

В вещественных переменных система уравнений будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial \tau} &= -r_2 - q_2 p_2, & \frac{\partial r_2}{\partial \tau} &= r_1 - q_1 n_1 + q_2 p_1, \\ \frac{\partial s_1}{\partial \tau} &= -s_2 + q_1 p_2, & \frac{\partial s_2}{\partial \tau} &= s_1 - q_2 n_2 + q_1 p_1, \end{aligned} \quad (13.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} &= -q_1 s_2 - q_2 r_2, & \frac{\partial p_2}{\partial \tau} &= -q_1 s_1 + q_2 r_1, \\ \frac{\partial n_1}{\partial \tau} &= 4q_1 r_2 + 2q_2 s_2, & \frac{\partial n_2}{\partial \tau} &= 2q_1 r_2 + 4q_2 s_2, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 q_1}{\partial \tau^2} = \alpha \frac{\partial^2 r_1}{\partial \tau^2}, \quad \frac{\partial^2 q_2}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 q_2}{\partial \tau^2} = \alpha \frac{\partial^2 s_1}{\partial \tau^2}, \quad (13.2)$$

где  $\tau = \omega_a t$ ;  $\xi = \omega_a z c^{-1}$ ; параметр  $\alpha$  уже фигурировал в уравнении (7.1).

Уравнения (13) описывают распространение ультракороткого (в том числе и предельно короткого) импульса поляризованного электромагнитного излучения в резонансной среде. Найти полное решение этой системы аналитическими методами вряд ли удастся, однако, следуя традиционному подходу к изучению нелинейных волн, можно найти стационарные решения.

Для этого снова предположим, что искомое решение системы уравнений (13) представляется функциями, зависящими от переменной  $\zeta = \omega_a(t \pm z/V)$ . Опустив детали вывода системы уравнений для нормированных напряженностей электрических полей  $q_1$  и  $q_2$ , данные в [48], представим их окончательный вид:

$$\frac{d^2 q_1}{dy^2} + (q_1^2 + q_2^2)q_1 = \frac{1}{2}(q_0^2 n_{10} - 1)q_1, \quad (14.1)$$

$$\frac{d^2 q_2}{dy^2} + (q_1^2 + q_2^2)q_2 = \frac{1}{2}(q_0^2 n_{20} - 1)q_2, \quad (14.2)$$

где  $y = \sqrt{2}\zeta$ ;  $q_0^2 = \alpha V^2(c^2 - V^2)^{-1}$ .

Введем параметры  $a_i^2 = (q_0^2 n_{i0} - 1)/2$ ,  $i = 1, 2$ . Если населенности возбужденных уровней одинаковы и все атомы находятся в основном состоянии, следует выбрать  $n_{10} = n_{20} = 1$  и  $a_1 = a_2 = \Omega$ . Это случай предварительно неполяризованной резонансной среды. Решение системы уравнений (13) имеет простой вид:

$$q_1(\zeta) = \sqrt{2\Omega}e^{(+)} \operatorname{sech}[\sqrt{2\Omega}\zeta], \quad q_2(\zeta) = \sqrt{2\Omega}e^{(-)} \operatorname{sech}[\sqrt{2\Omega}\zeta],$$

где  $e^{(\pm)}$  – компоненты единичного вектора, определяющие состояния поляризации поля импульса электромагнитного излучения. Полученное решение зависит от скорости распространения, но более удобно использовать параметр  $q_0^2$ . Вещественные переменные матрицы плотности среды связаны с этими решениями соотношениями

$$q_1 = q_0^2 r_1, \quad q_2 = q_0^2 s_1, \quad \frac{dq_1}{d\zeta} = -q_0^2 r_2, \quad \frac{dq_2}{d\zeta} = -q_0^2 s_2,$$

$$p_1 = q_0^{-2} q_1 q_2, \quad n_1 + q_0^{-2}(2q_1^2 + q_2^2) = n_{10},$$

$$n_2 + q_0^{-2}(q_1^2 + 2q_2^2) = n_{20}.$$

Возвращаясь к исходным физическим переменным, напряженность электрического поля импульса электромагнитного излучения можно записать как

$$E^{(\pm)}(t, z) = e^{(\pm)} E_0 \operatorname{sech} \left[ \frac{dE_0}{\hbar} \left( t \pm \frac{z}{V} - t_0 \right) \right]. \quad (15)$$

Уравнение (15) является простым обобщением результатов работы [13] на случай векторного (поляризованного) УКИ и конкретной модели резонансной среды. Здесь, как и в [13], длительность стационарного УКИ  $t_p$  выражается через пиковую амплитуду импульса соотношением  $t_p = \hbar(dE_0)^{-1}$ , а скорость распространения импульса следует из определения параметров  $q_0$  и  $\Omega$ :

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{c^2} \left[ 1 + \frac{8\pi n_{at} |d|^2 \hbar \omega_a}{(\hbar \omega_a)^2 + 2(dE_0)^2} \right].$$

Помимо решения (15), описывающего поляризованный видеоимпульс, формально можно найти периодические решения, отвечающие нелинейным негармоническим волнам, среди которых имеются и кноидальные.

Как правило, населенности возбужденных состояний, отвечающих разным проекциям углового момента, одинаковы. Однако можно нарушить эту симметрию, пропустив, например, через резонансную среду слабое циркулярно поляризованное излучение. Если это излучение непрерывное, то установившаяся разность населенностей между энергетическими уровнями, связанными различными переходами, будет зависеть от интенсивности и типа его поляризации. Для мощного короткого импульса, который направляется затем в приготовленную подобным образом среду, она будет поляризованной, т. е. населенности возбужденных уровней будут различаться:

$n_{10} \neq n_{20}$ . В системе уравнений (14) для такой среды  $a_1 \neq a_2$ . Если, следуя работам [49, 50], положить  $q_1 = g/f$  и  $q_2 = h/f$ , то (14) можно переписать в билинейной форме

$$D^2(g \cdot f) = a_1^2 g f, \quad D^2(h \cdot f) = a_2^2 h f, \quad D^2(f \cdot f) = g^2 + h^2, \quad (16)$$

где  $D(a \cdot b) = (da/dy)b - a(db/dy)$  – оператор Хироты [51, 52].

Решение билинейных уравнений осуществляется следующим способом. Функции  $g, h, f$  записываются в форме полиномов, например

$$g = \varepsilon g_1 + \varepsilon^3 g_3, \quad h = \varepsilon h_1 + \varepsilon^3 h_3, \quad f = 1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^4 f_4.$$

Подстановка этих разложений в (16) и приравнивание друг другу коэффициентов при одинаковых степенях  $\varepsilon$  дает систему «зацепляющихся» линейных уравнений с переменными коэффициентами

$$D^2(g_1 \cdot 1) = a_1^2 g_1, \quad D^2(h_1 \cdot 1) = a_2^2 h_1, \quad 2D^2(f_2 \cdot 1) = g_1^2 + h_1^2,$$

$$D^2(g_3 \cdot 1) = a_1^2 g_3 + a_1^2 g_1 f_2 - D^2(g_1 \cdot f_2),$$

$$D^2(h_3 \cdot 1) = a_2^2 h_3 + a_2^2 h_1 f_2 - D^2(h_1 \cdot f_2),$$

$$2D^2(f_4 \cdot 1) = 2(g_1 g_3 + h_1 h_3) - D^2(f_2 \cdot f_2),$$

$$D^2(g_3 \cdot f_2) + D^2(g_1 \cdot f_4) = a_1^2 (g_1 f_4 + g_3 f_2),$$

$$D^2(h_3 \cdot f_2) + D^2(h_1 \cdot f_4) = a_2^2 (h_1 f_4 + h_3 f_2),$$

$$2D^2(f_2 \cdot f_4) = g_3^2 + h_3^2, \quad D^2(g_3 \cdot f_4) = a_1^2 g_3 f_4,$$

$$D^2(h_3 \cdot f_4) = a_2^2 h_3 f_4, \quad D^2(f_4 \cdot f_4) = 0.$$

Решая эти уравнения одно за другим, можно получить решение системы (16):

$$g = 2\sqrt{2}a_1 \exp(\theta_1) [1 + \exp(2\theta_2 + a_{12})],$$

$$h = 2\sqrt{2}a_2 \exp(\theta_2) [1 - \exp(2\theta_1 + a_{12})],$$

$$f = 1 + \exp(2\theta_1) + \exp(2\theta_2) + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + a_{12}),$$

где  $\exp a_{12} = (a_1 - a_2)/(a_1 + a_2)$ ;  $\theta_{1,2} = a_{1,2}(y - y_{1,2})$ ;  $y_{1,2}$  – постоянные интегрирования; прочие постоянные интегрирования были выбраны такими, чтобы получаемое решение отвечало уединенной волне. Теперь решение исходной системы уравнений (14) можно записать следующим образом:

$$q_1(y) = \frac{2\sqrt{2} \exp(\theta_1) [1 + \exp(2\theta_2 + a_{12})]}{1 + \exp(2\theta_1) + \exp(2\theta_2) + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + a_{12})}, \quad (17)$$

$$q_2(y) = \frac{2\sqrt{2} \exp(\theta_2) [1 - \exp(2\theta_1 + a_{12})]}{1 + \exp(2\theta_1) + \exp(2\theta_2) + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + a_{12})}. \quad (18)$$

Если положить  $n_{10} = n_{20}$ , т. е. перейти к случаю неполяризованной среды, то полученное решение редуцируется к  $q_1(y) = q_2(y) = a_1 \operatorname{sech}[a_1(y - y_1)]$ . Записав его в ис-

ходных физических переменных, мы получим выражение для электрического поля циркулярно поляризованного видеоимпульса, определяемое формулой (15).

Проведенный выше анализ возможности распространения стационарного импульса электромагнитного поля предельно короткой длительности в резонансной среде в условиях вырождения верхнего энергетического уровня показал, что характер такого импульса зависит от состояния среды. Решение, известное для скалярного случая [13, 14], тривиально обобщается на случай векторного видеоимпульса, если для разностей населенностей между основным и возбужденными состояниями с различными проекциями углового момента выполняется условие  $n_{10} = n_{20} = 1$ . Таким образом мы получаем циркулярно поляризованный импульс длительностью в половину периода колебания, соответствующего атомному переходу. Скорость распространения такого видеоимпульса не зависит от поляризации и совпадает с полученной в [13].

Новое решение системы полных уравнений Максвелла–Блоха возникает при условии, что предварительно приготовленная резонансная среда имела несимметричное распределение населенностей возбужденных состояний с различными проекциями углового момента:  $n_{10} \neq n_{20}$ . Одна из сферических компонент вектора напряженности электрического поля, ведущая себя как в скалярном случае, – это однополярный всплеск электрического поля. Другая компонента – знакопеременная уединенная волна. На рис.1 приведены зависимости от времени сферических компонент вектора напряженности электрического поля импульса для двух различных значений пары параметров  $n_{10}$  и  $n_{20}$ . При стремлении  $q_0^2 n_{01}$  или  $q_0^2 n_{02}$  к единице справа осциллирующая компонента исчезает и в целом видеоимпульс становится циркулярно поляризованным.

Аналогично можно исследовать распространение импульсов поляризованного излучения в средах, характеризующихся переходами с  $j_a = 0 \rightarrow j_b = 1$  и  $j_a = 1 \rightarrow j_b = 1$ .

Опираясь на полученное решения (15), можно более подробно проанализировать условие применимости модели двухуровневых атомов. Найдем полуширину спектра полученного видеоимпульса. Если определить длительность видеоимпульса как  $\tau_p = 2\hbar(dE_0)^{-1}$ , то его фурье-образ дается выражением

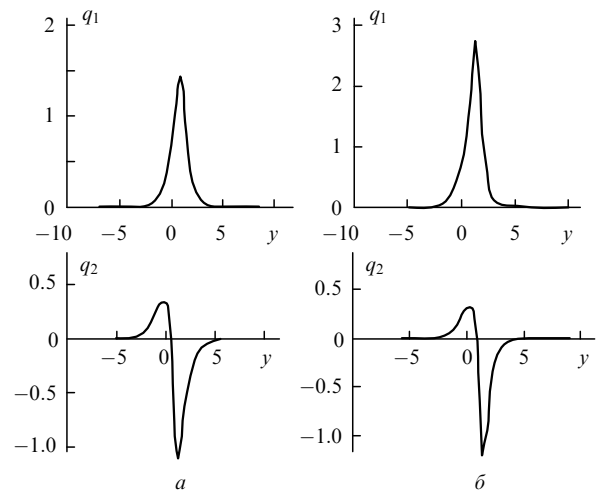


Рис.1. Зависимость сферических компонент видеоимпульса от приведенного времени  $y = \sqrt{2}\omega_a(t \pm z/V)$  при  $q_0^2 n_{01} = 4, q_0^2 n_{02} = 7$  (а) и  $q_0^2 n_{01} = 9, q_0^2 n_{02} = 8$  (б).

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} |E^{(q)}(t, z)| \exp(i\omega t) dt = \frac{\pi}{2} E_0 \tau_p \operatorname{sech}\left(\frac{\pi}{4} \omega \tau_p\right).$$

Следовательно, полуширина спектра видеоимпульса  $\Delta\omega_p$  определяется соотношением  $\Delta\omega_p \tau_p = (4/\pi) \ln(2 + \sqrt{3}) \approx 1.677$ .

В отличие от спектра квазимонохроматической волны максимум  $E(\omega)$  находится в точке  $\omega = 0$ , но с ростом  $\omega$  амплитуды фурье-компонент, которые составляют волновой пакет (15), экспоненциально убывают. Таким образом, модель двухуровневого атома применима в случае, когда  $\hbar\Delta\omega_p$  меньше, например, одной десятой энергетического зазора между возбужденным и основным состояниями.

Применение двухуровневой модели предполагает отказ от возможности каскадных переходов. Учет такого рода переходов сделан в [19].

Существует дополнительное ограничение длительности видеоимпульса, определяемого как формулой (15), так и формулами (17), (18), связанное с фотоионизационным пределом амплитуды электрического поля:  $E_0 \leq E_{\text{at}} \sim 10^9$  В/см. Поскольку длительность  $\tau_p$  связана с  $E_0$ , то можно заключить, что  $\tau_p \geq \tau_{\text{at}}$ , где  $\tau_{\text{at}} = 2\hbar(dE_{\text{at}})^{-1}$ . Пусть  $d=1$ Д, тогда  $\tau_{\text{at}} \approx 70$  фс. Используя полученное выше соотношение между  $\tau_p$  (15) и  $\Delta\omega_p$ , получим фотоионизационный предел для полуширины спектра видеоимпульса:  $\Delta\omega_p \leq \Delta\omega_{\text{ph}} \approx 2.25 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

Следовательно, стационарные видеоимпульсы могут распространяться в резонансных средах, у которых энергия возбужденного состояния превышает энергию основного состояния как минимум на  $10\hbar\Delta\omega_{\text{ph}}$  (что составляет примерно  $2 \cdot 10^{-20}$  Дж). При длительности видеоимпульса менее рассмотренного предела ( $\tau_{\text{at}} \approx 70$  фс) амплитуда стационарного импульса может стать настолько большой, что рассмотрение взаимодействия атомов с электромагнитным полем в рамках теории возмущений может оказаться некорректным. В [20], например, предложено рассматривать атомную систему классически, если напряженности электрического и атомного полей сравнимы. В этом случае интересно было бы исследовать взаимодействие поляризованного излучения видеоимпульса с нелинейным осциллятором с двумя (или более) степенями свободы.

### 2.3. Распространение импульсов однонаправленных волн

Рассмотренные выше стационарные видеоимпульсы являются слишком частными примерами, демонстрирующими возможность распространения предельно коротких импульсов. Чтобы получить более широкий класс уединенных волн подобного типа аналитическими методами, приходится принимать дополнительные предположения. Как было отмечено, условие стационарности видеоимпульсов неявно предполагает выбор одного из возможных направлений его распространения. Таким образом, естественно сразу принять приближение однонаправленных волн в исходных полных уравнениях Максвелла – Блоха, не ограничиваясь требованием стационарности решений.

Система уравнений, описывающих распространение коротких электромагнитных импульсов в принятом приближении, вытекает из полной системы (6), где волновое уравнение (6.1) следует заменить редуцированным волновым уравнением согласно правилу из разд.1. Таким

образом, в данном случае уравнение (5) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = - \left( \frac{2\pi d}{c} \right) \left\langle \frac{\partial r_1}{\partial t} \right\rangle.$$

Уравнения Блоха (6.2) сохраняются прежними. В новых нормированных переменных  $\tau = \omega_a(t - z/c)$ ,  $\zeta = (4\pi n_{\text{at}} d^2 / \hbar c) z$  и  $q = (2d/\hbar\omega_a) E$  редуцированные уравнения Максвелла – Блоха (РМБ-уравнения) записываются как

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} = - \frac{\partial}{\partial \tau} \langle r_1 \rangle, \quad \frac{\partial r_1}{\partial \tau} = -r_2, \quad \frac{\partial r_2}{\partial \tau} = r_1 + q r_3, \quad \frac{\partial r_3}{\partial \tau} = -q r_2. \quad (19)$$

Здесь угловые скобки обозначают суммирование по всем двухуровневым атомам и деление полученной суммы на концентрацию этих атомов  $n_{\text{at}}$ .

Известно [14, 15, 53], что система РМБ-уравнений может быть представлена как условие совместности пары линейных матричных уравнений, что является основой для применения метода обратной задачи рассеяния (ОЗР) [54, 55] к решению системы (19). Предположив, что до прихода импульса и после его прохождения все атомы резонансной среды находятся в основном состоянии, можно найти точные решения РМБ-уравнений, которые будут описывать распространение как видеоимпульсов, так и обладающих несущей УКИ. Все детали решения системы (19) методом ОЗР можно найти в [53], здесь же представлены только результаты.

В общем случае  $N$ -солитонное решение РМБ-уравнений имеет следующий вид:

$$q(\zeta, \tau)^2 = 4 \frac{d^2}{d\tau^2} \ln \det (1 + \hat{H}^* \hat{H}), \quad (20)$$

где матрица  $\hat{H}$  определена своими матричными элементами

$$H_{nm} = \frac{(C_n C_m)^{1/2} \exp[i\tau(\lambda_n - \lambda_m^*)]}{\lambda_n - \lambda_m^*},$$

$$C_n(\zeta) = C_n(0) \exp \left( \left\langle \frac{2i\lambda_n \omega_a}{4\lambda_n^2 - \omega_n^2} \right\rangle \zeta \right).$$

Комплексные числа  $\lambda_n$  и  $C_n$ , где  $n, m = 1, 2, \dots, N$ , определяются начальными условиями для электрического поля импульса на входе в среду (при  $\zeta = 0$ ).

Следуя [53], выражение (20) удобно преобразовать к более симметричному виду. В первую очередь определяется матрица  $\hat{J}$ , такая, что

$$(\hat{H}\hat{J})_{nm} = \frac{-i \exp[i(\lambda_n - \lambda_m)\tau - \alpha_n - \alpha_m]}{\lambda_n + \lambda_m}, \quad (21.1)$$

$$(\hat{J}\hat{H}^{-1})_{nm} = \frac{-i \exp[i(\lambda_n + \lambda_m)\tau + \alpha_n + \alpha_m + 2(\beta_n + \beta_m)]}{\lambda_n + \lambda_m}, \quad (21.2)$$

где параметры  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  определяются из следующих выражений:

$$iC(\zeta) = \exp[-2\alpha_n(\beta\zeta)],$$

$$\prod_j (\lambda_j + \lambda_n) \left[ \prod_{j \neq n} (\lambda_j - \lambda_n) \right]^{-1} = -i \exp(2\beta_n).$$

Напомним, что  $q(\zeta, \tau)$  – вещественная величина. Это приводит к тому, что  $\lambda_m$  и  $C_n$  являются либо чисто мнимыми, либо образуют антиэрмитовы пары:  $\lambda_m^* = -\lambda_n$ ,  $C_m^* = -C_n$ . Доказательство этого факта базируется на свойствах спектральной задачи метода ОЗР [54, 55] и здесь не обсуждается. Более того, справедливо соотношение  $\hat{H}\hat{J} = \hat{J}\hat{H}^*$ , так что уравнения (21) дают

$$(\hat{J}\hat{H}^{-1} + \hat{J}\hat{H}^*)_{nm} = M_{nm} \exp(\beta_n + \beta_m),$$

где

$$M_{nm} = \frac{\cosh(\vartheta_n + \vartheta_m)}{2i(\lambda_n + \lambda_m)};$$

$$\vartheta_n = \frac{1}{4} \left( k_n \tau - \left\langle \frac{4\omega_a k_n}{k_n^2 + \omega_a^2} \right\rangle \zeta + \delta_n \right); k_n = 4i\lambda_n.$$

С учетом этих результатов формула (20) переписывается в более изящном виде:

$$q(\zeta, \tau)^2 = 4 \frac{d^2}{d\tau^2} \ln \det (\hat{M}). \tag{22}$$

Благодаря тому что все  $\lambda_m$  можно сгруппировать в  $L_1$  чисто мнимых чисел и в  $L_2$  антиэрмитовых пар (причем  $N = L_1 + 2L_2$ ),  $N$ -солитонные решения РМБ-уравнений состоят из  $L_1$  фундаментальных солитонов (1-солитонов) и из  $L_2$  бризеров (breather) (или бионов – связанных пар солитон – антисолитон). Бризеры представляют собой устойчивые уединенные волны, обладающие внутренними осцилляциями. В теории СИП их называют  $0\pi$ -импульсами, в отличие от  $2\pi$ -импульсов, которым отвечают 1-солитоны [14, 43]. Бризеры, как и 1-солитоны, устойчивы по отношению к столкновениям друг с другом или с другими солитонами.

Решение РМБ-уравнений, отвечающее 1-солитону, записывается как

$$q\omega_a(\zeta, \tau) = k_1 \operatorname{sech} \left[ \frac{1}{2} k_1 \left( t - \frac{z}{V_1} \right) \right], \tag{23}$$

где групповая скорость  $V_1 = c[1 + \langle \alpha' \omega_a (k_1^2 + 4\omega_a^2)^{-1} \rangle]^{-1}$  и  $\alpha' = 4\pi n_{\text{ан}} d^2 / \hbar \omega_a$ . Это решение является РМБ-версией стационарного решения полной системы уравнений Максвелла – Блоха (8.2). Электромагнитный импульс такого сорта не имеет несущей волны и представляет собой однополярный всплеск электромагнитного излучения, т. е. по принятому здесь определению является видеоимпульсом.

Среди двухсолитонных решений РМБ-уравнений (19) есть решение, которое выглядит как

$$q\omega_a(t, z) = \frac{\left( \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \right) \times k_1 \operatorname{sech} \vartheta_1 + k_2 \operatorname{sech} \vartheta_2}{1 - B_{12}(\tanh \vartheta_1 - \tanh \vartheta_2 - \operatorname{sech} \vartheta_1 \operatorname{sech} \vartheta_2)}, \tag{24}$$

где

$$B_{12} = \frac{2k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} \text{ и } \vartheta_n = \frac{k_n}{2} \left( t - \frac{z}{c} \left\langle 1 + \frac{4\alpha' \omega_a}{k_n^2 + 4\omega_a^2} \right\rangle \right).$$

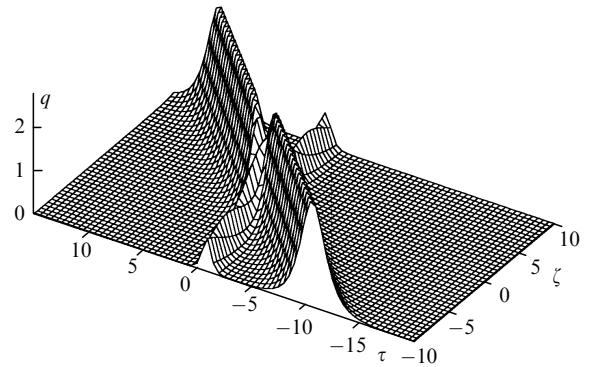


Рис.2. Столкновение двух видеоимпульсов согласно (24) при их нормированных длительностях  $\tau_{p1,2} = 1$  и 0.5 соответственно.

Это решение описывает столкновение двух видеоимпульсов (рис.2) в том же смысле, как это имеет место в теории СИП для столкновения двух  $2\pi$ -импульсов МакКолла – Хана. Однако  $2\pi$ -импульс – это солитон с медленно меняющейся во времени огибающей, тогда как здесь рассматриваются вещественные напряженности электрического поля. Более того, двухсолитонное решение системы уравнений (19) можно использовать для получения обобщения  $2\pi$ -импульса. Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  или  $k_1$  и  $k_2$  образуют пару антиэрмитовых комплексных чисел (т. е.  $k_1 = -k_2^*$ ). В этом случае двухсолитонное решение РМБ-уравнений соответствует бризеру, представляющему собой вещественную уединенную волну с внутренними осцилляциями (рис.3). Огибающая этой волны есть аналог  $0\pi$ - импульса МакКолла – Хана.

Действительно, пусть  $k_1 = -k_2^* = k_0 + 2i\Omega$  и  $\delta_1 = -\delta_2^* = \delta' + i\delta''$ . Тогда выражение (24) дает точное решение уравнений (19) [43]:

$$q\omega_a(t, z) = 2k_0 \operatorname{sech} \vartheta_{\text{real}} \left( \frac{\cos \vartheta_{\text{im}} - \gamma \sin \vartheta_{\text{im}} \tanh \vartheta_{\text{real}}}{1 + \gamma^2 \sin^2 \vartheta_{\text{im}} \operatorname{sech}^2 \vartheta_{\text{real}}} \right), \tag{25}$$

где  $\gamma = k_0/2\Omega$  и

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{real}} &= \frac{1}{2} k_0 \left\{ t - \frac{z}{c} \left\langle 1 + \frac{4\alpha' \omega_a [k_0^2 + 4(\omega_a^2 + \Omega^2)]}{k_0^4 + 8k_0^2(\omega_a^2 + \Omega^2) + 16(\omega_a^2 + \Omega^2)^2} \right\rangle \right\} + \delta', \\ \vartheta_{\text{im}} &= \Omega \left\{ t - \frac{z}{c} \left\langle 1 + \frac{4\alpha' \omega_a [4(\omega_a^2 - \Omega^2) - k_0^2]}{k_0^4 + 8k_0^2(\omega_a^2 + \Omega^2) + 16(\omega_a^2 + \Omega^2)^2} \right\rangle \right\} + \delta''. \end{aligned}$$

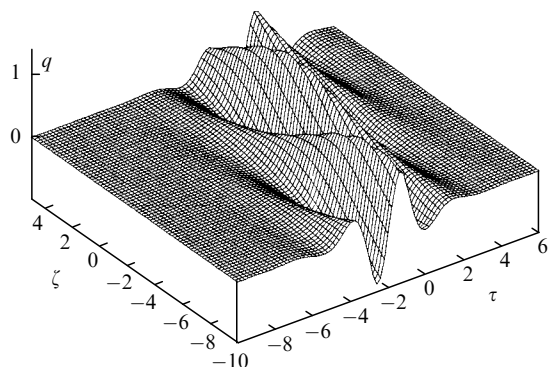


Рис.3. Видеоимпульс в форме бризера с небольшим числом колебаний напряженности электрического поля, подобный  $0\pi$ -импульсу МакКолла – Хана.



Как и в теории СИП для  $0\pi$ -импульса, решение (25) РМБ-уравнений описывает импульс с нулевой площадью. Выберем параметры  $k_0$  и  $\Omega$  такими, при которых  $k_0 \ll \Omega$ . Раскладывая выражение (25) до нулевого порядка по  $\gamma$ , получаем

$$q\omega_a(t, z) \approx 2k_0 \operatorname{sech} \vartheta_{\text{real}} \cos \vartheta_{\text{im}}.$$

Таким образом,  $2\pi$ -импульс МакКолла–Хана является предельным случаем бризера системы РМБ-уравнений (19). Раскладывая выражение (25) в ряд по степеням  $\gamma$ , можно получить поправки к стационарному импульсу в теории СИП (т. е. к  $2\pi$ -импульсу). В первом порядке по  $\gamma$  из (25) следует, что

$$q\omega_a(t, z) \approx 2k_0 \operatorname{sech} \vartheta_{\text{real}} \cos[\vartheta_{\text{im}} + \phi(t, z)], \quad (26)$$

где  $\phi(t, z) = \gamma \tanh \vartheta_{\text{real}}$ . Эта формула описывает  $2\pi$ -импульс с фазовой модуляцией (последнюю также называют чирпом). Определив мгновенную частоту как  $\Delta\omega_{\text{ch}} = \partial\phi/\partial t$ , найдем, что  $\Delta\omega_{\text{ch}} = \gamma^2 \omega_a \operatorname{sech}^2 \vartheta_{\text{real}}$ .

Таким образом, теория распространения предельно коротких импульсов электромагнитного излучения, основанная на РМБ-уравнениях (19), представляет собой интерполирующую теорию, результаты которой простираются от случая видеоимпульсов в форме симметричных однополярных всплесков электромагнитного поля до случая медленно меняющихся в пространстве и времени комплексных огибающих УКИ. Недостатки этой теории определяются принятой в ней моделью двухуровневых атомов, составляющих резонансную среду.

### 3. Двухуровневые среды при условии квазирезонанса

Если на двухуровневую среду падает волна монохроматического излучения с амплитудой  $E_m$ , то при условии строгого резонанса населенность резонансных уровней периодически меняется во времени с частотой Раби  $\omega_R = dE_m/\hbar$ . В общем случае, когда электромагнитная волна является немонахроматической, можно формально определить мгновенную частоту Раби по тому же принципу, понимая теперь под  $E_m$  мгновенную напряженность импульса электромагнитного излучения. Определенная так частота Раби не ассоциируется теперь с частотой осцилляций населенности энергетических уровней, а служит мерой напряженности электрического поля волны.

Пусть амплитуда импульса будет такова, что частота Раби оказывается малой по сравнению с частотой резонансного перехода. Это значит, что в теории распространения таких импульсов появился малый параметр  $\varepsilon = \omega_R/\omega_a$ . Теперь можно попытаться решить уравнения Блоха приближенно, представив их решения как разложение по степеням  $\varepsilon$ . Подставив полученное решение в формулы, определяющие поляризацию среды, можно получить нелинейное волновое уравнение для описания эволюции напряженности электрического поля электромагнитного импульса.

#### 3.1. Случай скалярной волны

Рассмотрим уравнения Блоха (6.2), которые описывают эволюцию двухуровневого атома под действием электромагнитного импульса, характеризуемого скалярной величиной напряженности электрического поля  $E$ . Введя новые переменные  $q = p = iE/|E_0|$ ,  $B = r_1 + ir_2$  и  $C = r_1 - ir_2$ , уравнения (6.2) можно представить как

$$\omega_R \frac{\partial B}{\partial T} - i\omega_a B = 2\omega_R q r_3, \quad \omega_R \frac{\partial C}{\partial T} + i\omega_a C = -2\omega_R p r_3, \quad (27.1)$$

$$\frac{\partial r_3}{\partial T} = Bp - Cq, \quad (27.2)$$

где  $\omega_R = d|E_0|/\hbar$ ;  $|E_0|$  – максимальное значение  $|E|$ ;  $T = \omega_R t$ . Формально уравнение (27.2) можно проинтегрировать:

$$r_3 = \sigma + \int_{-\infty}^T (Bp - Cq) dT',$$

где  $\sigma = -1$  для поглощающей среды. Если определить двухкомпонентные векторы  $\chi = \operatorname{colon}(B, C)$ ,  $\psi = \operatorname{colon}(q, p)$ , то уравнения (27.1) могут быть представлены как одно векторное уравнение

$$(\omega_R \hat{R} - i\omega_a) \chi = 2\omega_R \sigma \psi, \quad (28)$$

в котором матричный оператор

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial T} - 2 \begin{pmatrix} q \int p & -q \int q \\ p \int p & -p \int q \end{pmatrix}.$$

Этот оператор используется также в теории солитонов [55]. Интегральные операторы  $u \int v$ , входящие в определение  $\hat{R}$ , заданы следующим правилом:

$$\left( u \int v \right) f(T) = u(T) \int_{-\infty}^T v(t) f(t) dt, \quad \forall f(t).$$

Используя резольвентный оператор  $\hat{G} = (1 + i\varepsilon \hat{R})^{-1}$ , решение уравнения (28) можно записать как  $\chi = 2i\sigma\varepsilon \hat{G} \psi$ . Поскольку параметр  $\varepsilon = \omega_R/\omega_a$  является малым, представим этот оператор в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ :

$$\hat{G} = (1 + i\varepsilon \hat{R})^{-1} = 1 - i\varepsilon \hat{R} - \varepsilon^2 \hat{R}^2 + \dots$$

Используя соотношения, следующие из определения оператора  $\hat{R}$ ,

$$\hat{R} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q}{\partial T} \\ -\frac{\partial p}{\partial T} \end{pmatrix}, \quad \hat{R}^2 \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} - 2q(pq) \\ \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} - 2p(qp) \end{pmatrix},$$

с точностью до второго порядка по  $\varepsilon$  запишем

$$B = 2i\varepsilon\sigma \left[ q - i\varepsilon \frac{\partial q}{\partial T} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 q}{\partial T^2} + 2\varepsilon^2 q(qp) \right],$$

$$C = 2i\varepsilon\sigma \left[ p + i\varepsilon \frac{\partial p}{\partial T} - \varepsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial T^2} + 2\varepsilon^2 p(pq) \right].$$

Учитывая, что  $r_1 = (B + C)/2$  и  $q = p$ , получим выражение для поляризации, приходящейся на один атом:  $r_1 = 2i\varepsilon\sigma(q - \varepsilon^2 \partial^2 q/\partial T^2 + 2\varepsilon^2 q^3)$ . Таким образом, в правой части волнового уравнения (6.1) должно стоять выражение для средней поляризации одного атома

$$\langle r_1 \rangle = - \left\langle \frac{2d\sigma}{\hbar\omega_a} \right\rangle E + \left\langle \frac{2d\sigma}{\hbar\omega_a^3} \right\rangle \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \left\langle \frac{4d^3\sigma}{\hbar^3\omega_a^3} \right\rangle E^3. \quad (29)$$

Теперь рассмотрим некоторые примеры волновых уравнений.

**3.2. Нелинейное волновое уравнение**

Подстановка выражения (29) в (6.1) с учетом неоднородного уширения резонансной линии поглощения приводит к следующему уравнению [56]:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( a_1 E^3 + b_1 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right), \tag{30}$$

где коэффициенты  $a_1$ ,  $b_1$  и перенормированная скорость распространения импульса электромагнитного излучения  $V$  даются следующими выражениями:

$$a_1 = \left\langle \frac{16\pi n_{at} \sigma |d|^4}{c^2 \hbar^3 \omega_a^3} \right\rangle, \quad b_1 = \left\langle \frac{8\pi n_{at} \sigma |d|^2}{c^2 \hbar \omega_a^3} \right\rangle,$$

$$\frac{1}{V^2} = \frac{1}{c^2} \left( 1 - \left\langle \frac{8\pi n_{at} \sigma |d|^2}{\hbar \omega_a} \right\rangle \right).$$

Введем новые переменные  $\tau = (|b_1|V^4)^{-1/2}z$ ,  $\zeta = (|b_1|V^2)^{-1/2}t$  и нормированную напряженность электрического поля импульса  $u(\tau, \zeta) = (|a_1|V^2)^{1/2}E(z, t)$ . В этих переменных уравнение (30) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left( u + \sigma u^3 + \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} \right), \tag{31}$$

где  $\sigma = \text{sign} a_1 = \text{sign} b_1$  определяет знак равновесной разности населенностей резонансных энергетических уровней. Это нелинейное волновое уравнение описывает распространение предельно коротких импульсов излучения в диспергирующей нелинейной среде при условии, что амплитуда этих импульсов мала по сравнению с напряженностью атомного поля. Это описание свободно от ограничений, связанных с условием медленности изменения огибающей импульса, но имеют место иные ограничения, главное из которых – приближение двухуровневых атомов для среды.

Следует отметить, что нелинейное волновое уравнение (31) отличается от известного уравнения Буссинеска (см. [55], с. 117) более высокой нелинейностью и по этой причине предположительно не является вполне интегрируемым. Однако найти стационарные решения уравнения (31) несложно.

Пусть  $u$  зависит только от одной переменной  $y = \zeta \pm \alpha\tau$  и при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  поле обращается в нуль одновременно со всеми производными. Данное требование можно рассматривать как краевое условие для стационарной уединенной волны с нулевыми асимптотиками. Из (31) следует, что  $d^2u/dy^2 = \sigma(\alpha^2 - 1)u - u^3$ . Это уравнение часто встречается в теории нелинейных волн и его решение находится стандартными методами. Вещественное решение этого уравнения, удовлетворяющее крайним условиям, имеет место при  $p^2 = \sigma(\alpha^2 - 1) > 0$ . Интегрируя это уравнение, получим следующее решение:

$$u(y) = \frac{p}{\sqrt{2} \cosh[p(y - y_0)]},$$

где  $y_0$  – константа интегрирования, которая может быть выбрана равной нулю. В исходных нормированных переменных решение уравнения (31) записывается как

$$u(\zeta, \tau) = u_0 \text{sech} \left\{ \sqrt{2} u_0 \left[ \zeta \pm \tau (1 + 2\sigma u_0^2)^{1/2} \right] \right\}. \tag{32}$$

Различные знаки в аргументе функции в правой части (32) соответствуют разным направлениям распространения стационарной уединенной волны. Отметим, что в поглощающей среде (т.е. при  $\sigma = -1$ ) максимальная амплитуда напряженности поля ограничена:  $u_0^2 \leq 0.5$ .

Помимо стационарных решений в форме видеоимпульсов (32) уравнение (31) имеет периодические решения, отвечающие кноидальным волнам, и решения с ненулевыми асимптотиками при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , которые отвечают *темновым уединенным волнам* [57, 58]. Среди темновых уединенных волн имеется класс *алгебраических солитонов*, т.е. уединенных волн, амплитуды которых спадают на бесконечности неэкспоненциально.

Для рассматриваемого здесь уравнения такое решение выглядит следующим образом:

$$u(y) = u_1 - \frac{4u_1}{1 + \left[ \zeta \pm \tau (1 + 3\sigma u_1^2)^{1/2} \right]^2},$$

где  $u_1 = \lim u$  при  $\tau \rightarrow \pm\infty$ . Эти решения не соответствуют УКИ электромагнитного излучения и упоминаются только для иллюстрации многообразия стационарных решений нелинейного волнового уравнения (31).

**3.3. Однонаправленные нелинейные скалярные волны**

Для определения поляризации в редуцированном волновом уравнении

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi n_{at} d}{c} \left\langle \frac{\partial r_1}{\partial t} \right\rangle,$$

полученном в предположении, что электромагнитные волны распространяются только в одном из возможных направлений [14, 56], подставим в него выражение для поляризации (29) и получим уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial E}{\partial t} + aE^2 \frac{\partial E}{\partial t} + b \frac{\partial^3 E}{\partial t^3} = 0, \tag{33}$$

коэффициенты в котором и групповая скорость  $V$  даются выражениями

$$a = \left\langle \frac{24\pi n_{at} \sigma |d|^4}{c \hbar^3 \omega_a} \right\rangle, \quad b_1 = \left\langle \frac{4\pi n_{at} \sigma |d|^2}{c \hbar \omega_a^3} \right\rangle,$$

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{c} \left( 1 - \left\langle \frac{4\pi n_{at} \sigma |d|^2}{\hbar \omega_a} \right\rangle \right).$$

В новых переменных  $\tau = |b|z$ ,  $\zeta = t - z/V$ ,  $u(\tau, \zeta) = (a/6b)^{1/2}E(z, t)$  уравнение (33) принимает форму модифицированного уравнения Кортевега – де Фриза (МКФ-уравнения)

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial \tau} + 6u^2 \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 u}{\partial \zeta^3} = 0.$$

Известно [59], что это уравнение является вполне интегрируемым и его солитонные решения могут быть получены методом ОЗР [54, 55]. Так, односолитонное решение имеет вид

$$u_s(\tau, \zeta) = u_0 \text{sech}(u_0^3 \tau - \sigma u_0 \zeta + \delta_0), \tag{34}$$

где параметры  $u_0$  и  $\delta_0$  определяются из начальных условий в рамках метода ОЗР. Это решение соответствует электромагнитному импульсу, который можно интер-

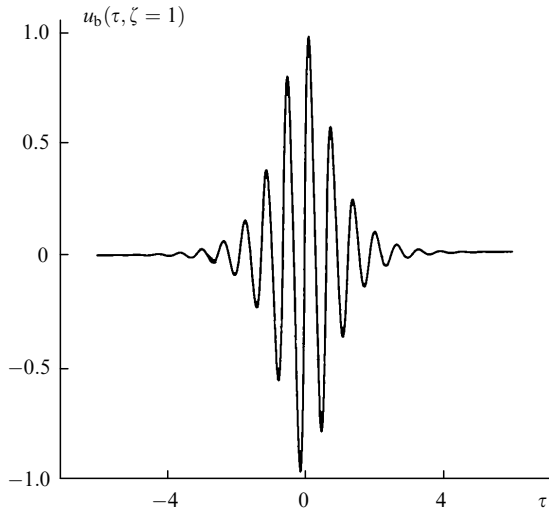


Рис.4. Бризер МКФ-уравнения как пример предельно короткого импульса электромагнитного излучения в квазирезонансной среде.

претировать как видеоимпульс. Многосолитонные решения МКФ-уравнения описывают распространение и взаимодействие нескольких видеоимпульсов различной полярности, а также бризеры (рис.4), которые можно интерпретировать как УКИ, обладающие несущей волной. Рассмотрим такое бризерное решение МКФ-уравнения [59]:

$$u_b(\tau, \zeta) = -\frac{4u_0 v \cosh \vartheta_1 \sin \vartheta_2 - u_0 \sinh \vartheta_1 \cos \vartheta_2}{v_0 \cosh^2 \vartheta_1 + (u_0/v_0) \cos^2 \vartheta_2}, \quad (35)$$

где  $\vartheta_1 = 2u_0\zeta + 8u_0(3v_0^2 - u_0^2)\tau + \delta_1$ ;  $\vartheta_2 = 2v_0\zeta + 8v_0(v_0^2 - 3u_0^2)\tau + \delta_2$ .

Параметры  $u_0, v_0, \delta_1$  и  $\delta_2$  определяются из начальных условий. Если эти условия таковы, что  $u_0 \ll v_0$ , то решение (35) запишется как

$$u_b(\tau, \zeta) \approx -4u_0 \operatorname{sech} \vartheta_1 \sin \vartheta_2.$$

Это выражение описывает УКИ, имеющий огибающую в виде гиперболического секанса и высокочастотное наполнение, т. е. несущую (гармоническую) волну. Таким образом, можно предположить, что бризерное решение уравнения (33) описывает фемтосекундные оптические импульсы более адекватно, чем решение нелинейного уравнения Шредингера, которое часто используется в нелинейной волоконной оптике [60].

Следует отметить, что среди решений уравнения (33) существуют решения, соответствующие темновым солитонам, внимание к которым было привлечено в нелинейной волоконной оптике [57, 58]. Среди них существуют алгебраические солитоны [61, 62], например

$$u(\tau, \zeta) = u_0 - \frac{4u_0}{1 + 4u_0^2(\zeta - 6u_0^2\tau)^2}.$$

Таким образом, уравнение (33) дает описание оптических УКИ, предельно коротких импульсов электромагнитного излучения и видеоимпульсов в нелинейной среде с дисперсией без приближения медленно меняющихся комплексных огибающих и при выполнении условия однонаправленности волн. Тот же результат был получен в [63] иным способом.

### 3.4. Квазирезонансное распространение поляризованного импульса

Для описания распространения импульса поляризованного электромагнитного излучения в условиях квазирезонанса воспользуемся моделью двухуровневой среды, основанной на обобщенных уравнениях Блоха (11) и рассмотренной в разд. 2.2. Пусть амплитуда электрического поля импульса настолько мала, что выполняется условие  $\varepsilon = \omega_R/\omega_a = |d_{13}|E_0/\hbar\omega_a$ , где  $E_0 = \max |E^{(\pm 1)}|$  – постоянная амплитуда электрического поля. Решение системы уравнений (11) может быть получено методом резольвентного оператора [64] точно так же, как это было сделано для скалярных волн в разд.3.1. Введем вспомогательные обозначения

$$B_1 = \rho_{13}, \quad B_2 = \rho_{23}, \quad C_1 = \rho_{31}, \quad C_2 = \rho_{32},$$

$$\omega_R q_1 = i\hbar^{-1}d_{13}E^{(+1)}, \quad \omega_R q_2 = i\hbar^{-1}d_{23}E^{(-1)},$$

$$\omega_R r_1 = i\hbar^{-1}d_{31}E^{(+1)}, \quad \omega_R r_2 = i\hbar^{-1}d_{32}E^{(-1)},$$

$$T = \omega_R t, \quad \omega_R = |d_{13}|E_0/\hbar.$$

В этих переменных обобщенные уравнения Блоха (11) могут быть переписаны в следующем виде:

$$\omega_R \frac{\partial B_1}{\partial T} = i\omega_a B_1 + \omega_R q_1(\rho_{11} - \rho_{33}) + \omega_R q_2 \rho_{12}, \quad (36.1)$$

$$\omega_R \frac{\partial B_2}{\partial T} = i\omega_a B_2 + \omega_R q_2(\rho_{22} - \rho_{33}) + \omega_R q_1 \rho_{21}, \quad (36.2)$$

$$\omega_R \frac{\partial C_1}{\partial T} = -i\omega_a C_1 - \omega_R r_1(\rho_{11} - \rho_{33}) - \omega_R r_2 \rho_{21}, \quad (36.3)$$

$$\omega_R \frac{\partial C_2}{\partial T} = -i\omega_a C_2 - \omega_R r_2(\rho_{22} - \rho_{33}) - \omega_R r_1 \rho_{12}, \quad (36.4)$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial T} = (B_1 r_2 - C_2 q_1), \quad \frac{\partial \rho_{21}}{\partial T} = (B_2 r_1 - C_1 q_2), \quad (37.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(\rho_{11} - \rho_{33}) = 2(B_1 r_1 - C_1 q_1) + (B_2 r_2 - C_2 q_2), \quad (37.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial T}(\rho_{22} - \rho_{33}) = (B_1 r_1 - C_1 q_1) + 2(B_2 r_2 - C_2 q_2). \quad (37.3)$$

Из (37) формально можно найти

$$\rho_{12} = \hat{I}(B_1 r_2 - C_2 q_1), \quad \rho_{21} = \hat{I}(B_2 r_1 - C_1 q_2), \quad (38.1)$$

$$(\rho_{11} - \rho_{33}) = \sigma + 2\hat{I}(B_1 r_1 - C_1 q_1) + \hat{I}(B_2 r_2 - C_2 q_2), \quad (38.2)$$

$$(\rho_{22} - \rho_{33}) = \sigma + \hat{I}(B_1 r_1 - C_1 q_1) + 2\hat{I}(B_2 r_2 - C_2 q_2), \quad (38.2)$$

где для поглощающей среды  $\sigma = -1$  и использован оператор интегрирования  $\hat{I}(f)$ . Удобно ввести матрицы  $\hat{J} \operatorname{diag}(1, -1, 1, -1)$ ,  $\chi = \operatorname{colon}(B_1, C_1, B_2, C_2)$ ,  $\psi = \operatorname{colon}(q_1, r_1, q_2, r_2)$  и оператор  $\hat{R} = \hat{J} \partial/\partial T - \hat{A}$ , где  $\hat{A}$  – матрица интегральных операторов, определенных в предыдущих разделах:

$$\hat{A} =$$

$$\begin{pmatrix} 2q_1 \int r_1 + q_2 \int r_2 & -2q_1 \int q_1 & q_1 \int r_2 & -q_1 \int q_2 - q_2 \int q_1 \\ 2q_1 \int r_1 & -2r_1 \int q_1 - r_2 \int q_2 & r_1 \int r_2 + r_2 \int r_1 & -r_1 \int q_2 \\ q_2 \int r_1 & -q_2 \int q_1 - q_1 \int q_2 & 2q_2 \int r_2 + q_1 \int r_1 & -2q_2 \int q_2 \\ r_2 \int r_1 + r_1 \int r_2 & -r_2 \int r_1 & 2r_2 \int r_2 & -2r_2 \int q_2 - r_1 \int q_1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения (36) можно теперь представить в форме матричного уравнения относительно  $\chi$ :  $(1 + i\epsilon\hat{R})\chi = i\sigma\epsilon\psi$ . Используя резольвентный оператор  $\hat{G} = (1 + i\epsilon\hat{R})^{-1}$ , выразим решение этого уравнения в форме ряда  $\chi = i\sigma\epsilon(1 + i\epsilon\hat{R} - \epsilon^2\hat{R}^2 + \dots)\psi$ . Ограничившись членами этого ряда до третьего порядка по  $\epsilon$ , явно запишем приближенное решение уравнений (36):

$$\chi = \begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \\ B_2 \\ C_2 \end{pmatrix} = i\sigma\epsilon \begin{bmatrix} q_1 - i\epsilon \frac{\partial q_1}{\partial T} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 q_1}{\partial T^2} + 2\epsilon^2 q_1(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \\ r_1 + i \frac{\partial r_1}{\partial T} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 r_1}{\partial T^2} + 2\epsilon^2 r_1(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \\ q_2 - i\epsilon \frac{\partial q_2}{\partial T} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial T^2} + 2\epsilon^2 q_2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \\ r_2 + i\epsilon \frac{\partial r_2}{\partial T} - \epsilon^2 \frac{\partial^2 r_2}{\partial T^2} + 2\epsilon^2 r_2(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Таким образом, с точностью не выше  $\epsilon^3$  для поляризации в правых частях волновых уравнений (10)  $P^{(+1)} = d_{13}\rho_{31} + d_{31}\rho_{13}$  и  $P^{(-1)} = d_{23}\rho_{32} + d_{32}\rho_{23}$  получим приближенное выражение

$$P^{(q)} = -\frac{2\sigma|d_{13}|^2}{\hbar\omega_a} \left[ E^{(q)} - \frac{1}{\omega_a^2} \frac{\partial^2 E^{(q)}}{\partial t^2} - \frac{2|d_{13}|^2}{(\hbar\omega_a)^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) E^{(q)} \right]. \quad (40)$$

Подстановка (40) в уравнения для полей позволяет записать нелинейное волновое уравнение, которое приближенно дает описание эволюции импульса электромагнитной волны:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} - \frac{1}{V^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - b \frac{\partial^4 \mathbf{E}}{\partial t^4} - a \frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}] = 0, \quad (41)$$

где  $a = \langle 16\pi n_{at}\sigma|d_{13}|^4/c^2(\hbar\omega_a)^3 \rangle$ ;  $b = \langle 8\pi n_{at}\sigma|d_{13}|^2/c^2\hbar\omega_a^3 \rangle$ . Скорость распространения импульса  $V$  изменяется из-за дисперсии, вносимой резонансной средой, и определяется выражением

$$V^{-2} = c^{-2} \left( 1 - \left\langle \frac{8\pi n_{at}\sigma|d_{13}|^2}{\hbar\omega_a} \right\rangle \right).$$

Если перейти к новым нормированным переменным  $\mathbf{W}(\tau, \zeta) = V\sqrt{|a|}\mathbf{E}(x, t)$ ,  $\tau = V^{-2}|b|^{-1/2}t$  и  $\zeta = V^{-1}|b|^{-1/2}z$ , то нелинейное волновое уравнение примет более изящный вид,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \left[ \mathbf{W} + \sigma(\mathbf{W} \cdot \mathbf{W})\mathbf{W} + \sigma \frac{\partial^2 \mathbf{W}}{\partial \zeta^2} \right], \quad (42)$$

и станет простым обобщением нелинейного волнового уравнения из [56] на случай поляризованного излучения.

Часто самое простое, что можно получить из нелинейных эволюционных уравнений, – это решение в виде бегущей волны. Естественно сделать это и для уравнения (42). Пусть нормированное поле  $\mathbf{W}(\tau, \zeta)$  зависит от одной переменной  $y = \zeta \pm \alpha\tau$ . В этом случае для комплексного поля  $Z = W_1 + iW_2$  уравнение (42) дает

$$\frac{d^2 Z}{dy^2} = p^2 Z - |Z|^2 Z, \quad (43)$$

где  $p^2 = \sigma(\alpha^2 - 1) > 0$ .

При переходе от (42) к (43) учитывалось, что на бесконечности электромагнитное поле исчезает, так что постоянные интегрирования обращаются в нуль. Положив

$Z = W \exp(i\Phi)$ , из (43) получим систему уравнений для вещественных переменных:

$$\frac{d^2 W}{dy^2} - W \left( \frac{d\Phi}{dy} \right)^2 = p^2 W - W^3, \quad 2 \frac{d\Phi}{dy} \frac{dW}{dy} + W \frac{d^2 \Phi}{dy^2} = 0. \quad (44)$$

Проинтегрировав второе уравнение в (44) после умножения на  $W$ , получим интеграл движения  $W^2 d\Phi/dy = \text{const} = 0$ . Выбор константы интегрирования продиктован граничными условиями для электрического поля на бесконечности. Поскольку решение уравнений (44) с  $W = 0$  не представляет интереса, остается потребовать, чтобы  $d\Phi/dy = 0$  для всех значений переменной  $y = \zeta \pm \alpha\tau$ .

Таким образом, стационарные решения уравнения (42), которые описывают распространение короткого импульса электромагнитного излучения, получаются при условии неизменности состояния поляризации волны (вектор  $\mathbf{e} = \mathbf{E}/|\mathbf{E}| = \{e_1 = W \cos \Phi, e_2 = W \sin \Phi\}$ ) в процессе распространения. В этом случае уравнение (42) или первое уравнение в (44) переходит в уравнение (16) из [56]. Воспользовавшись известными результатами, можно сразу записать соответствующие решения.

Для нулевых краевых условий при  $\tau \rightarrow \pm\infty$  стационарное решение (9) имеет вид

$$W(\zeta \pm \alpha\tau) = W_0 e \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{2} W_0 \left[ \zeta \pm \tau(1 + 2\sigma W_0^2)^{1/2} - \zeta_0 \right] \right\}, \quad (45)$$

где постоянная интегрирования  $\zeta_0$  может быть выбрана нулевой.

Для ненулевых краевых условий и при фиксированном векторе поляризации стационарные решения имеют вид уединенной темновой волны, а также алгебраических уединенных волн, подобных рассмотренных в разд.3.2, и нелинейных периодических волн [56]. Анализ решений такого рода находится за пределами темы настоящей статьи.

Рассмотрим вопрос, не выходит ли полученное решение за рамки принятых приближений, согласно которому частота Раби должна быть много меньше  $\bar{\omega}$  – характерной частоты квантового перехода. В ненормированных (физических) переменных решение (45) можно представить как

$$\mathbf{E}(z, t) = E_0 e \operatorname{sech} \left[ t_s^{-1} \left( t \pm \frac{\alpha z}{V} - t_0 \right) \right], \quad (46)$$

где  $t_s = E_0^{-1}(|b|/2|a|)^{1/2}$ ;  $\alpha = (1 + 2\sigma E_0^2 V^2 |a|)^{1/2}$ . Ширина спектра (46) составляет  $\sim t_s^{-1}$ . Следовательно, резонансное приближение будет справедливым, если  $t_s^{-1} \ll \bar{\omega}$ . Из определения параметров  $|a|$  и  $|b|$ , входящих в уравнение (41), можно оценить их отношение как  $|a|/|b| \approx 2|d_{13}|^2 \bar{\omega}^2 \hbar^{-2}$  (при этом пренебрегалось неоднородным уширением и все  $\omega_a$  были заменены на  $\bar{\omega}$ ). Таким образом, условие резонансного приближения совпадает с условием малости амплитуды:  $\omega_R \ll \bar{\omega}$ .

Если рассматривать распространение импульса электромагнитного излучения в приближении однонаправленных волн, то вместо уравнений (10) следует использовать пару редуцированных уравнений Максвелла:

$$\frac{\partial E^{(\pm 1)}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E^{(\pm 1)}}{\partial t} = -\frac{2\pi n_{at}}{c} \frac{\partial}{\partial t} \langle P^{(\pm 1)} \rangle, \quad (47)$$

где поляризации  $P^{(\pm 1)}$  определяются выражениями (40). Подстановка (40) в уравнения для полей (47) позволяет записать нелинейное уравнение, которое приближенно описывает эволюцию импульса электромагнитной волны:

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} + \frac{1}{V} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + b \frac{\partial^3 \mathbf{E}}{\partial t^3} + a \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E}] = 0, \quad (48)$$

где параметры  $a$  и  $b$  в два раза меньше таких же параметров в уравнении (41), а скорость распространения  $V^{-1} = c^{-1}(1 - \langle 4\pi n_{\text{at}} \sigma |d_{13}|^2 / \hbar \omega_a \rangle)$ .

Если перейти к новым нормированным переменным  $\tau = |b|z$ ,  $\zeta = t - z/V$  и  $\psi(\tau, \zeta) = \sqrt{a/b}[E^{(+1)}(z, t) + iE^{(-1)}(z, t)]$ , то нелинейное уравнение (48) примет вид

$$\sigma \frac{\partial \psi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + |\psi|^2 \psi \right) = 0. \quad (49)$$

Это уравнение, названное комплексным модифицированным уравнением Кортевега – де Фриза, рассмотрено в [65]. Если предположить, что в процессе распространения фаза комплексного поля  $\psi$  не меняется, то (49) переходит в обычное (вещественное) МКФ-уравнение, которое, в принципе, может быть точно решено методом ОЗР [59], и можно выписать явно солитонные его решения. Уравнение МКФ и его решения обсуждались ранее в разд.3.3, где 1-солитонное и бризерное решения даны формулами (34) и (35).

Нам ничего не известно о более общем случае, когда уравнение (49) не сводится к вещественному МКФ-уравнению. Можно предположить, что несолитонный характер его решений в наибольшей мере проявится при взаимодействии отдельных импульсов. Отметим, что уравнение (49) может иметь решения, которые описывают распространение как предельно коротких импульсов (в частном случае – видеоимпульсов), так и импульсов поляризованного электромагнитного излучения, имеющих произвольное число колебаний поля, причем представление этих сигналов квазигармонической волной не используется.

#### 4. Распространение электромагнитных импульсов в кубически-нелинейных средах

Рассмотрим распространение импульса электромагнитного излучения в приближении однонаправленной волны. Пусть нелинейная среда такова, что резонансные переходы в ней отсутствуют. Подобная модель была исследована в работе [66] при изучении СИП в ионных кристаллах в рамках модели Дюффинга для нелинейной нерезонансной среды. Укороченное уравнение Максвелла в этом приближении имеет вид (5). Полезно рассмотреть два случая модели Дюффинга, которые описывают частный случай кубически-нелинейной среды. Этот случай следует понимать так, что при описании нелинейной поляризации в заданном поле монохроматической волны первая ненулевая нелинейная восприимчивость является восприимчивостью третьего порядка.

##### 4.1. Скалярная модель Дюффинга

Дополним уравнение для напряженности электрического поля (5) уравнением, описывающим поляризацию  $P = n_{\text{at}} d_a P_1$ :

$$\frac{\partial^2 P_1}{\partial t^2} + \omega_a^2 P_1 + \beta_a P_1^3 = \frac{e^2}{m d_a} E, \quad (50)$$

где  $P_1$  – координата нормальных колебаний ангармонического одномерного осциллятора. Будем считать, что все осцилляторы имеют одинаковые частоты собственных колебаний  $\omega_a$ , и пренебрежем релаксацией колебаний. С помощью безразмерных переменных

$$\zeta = \frac{z}{c t_{p0}}, \quad \tau = \left( t - \frac{z}{c} \right) t_{p0}^{-1},$$

$$E = E_0 q(\zeta, \tau), p = 2\pi n_{\text{at}} d_a E_0^{-1} P_1, \quad Q = 2\pi n_{\text{at}} d_a E_0^{-1} \frac{\partial P_1}{\partial t}$$

система уравнений (5) и (50) может быть представлена как

$$\frac{\partial q}{\partial \zeta} = -Q, \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial \tau} + v_a^2 p + 2b_a p^3 = \alpha_a q, \quad (51)$$

где  $\alpha_a = (2\pi e^2 n_{\text{at}} d_a t_{p0}^2 / m)$ ;  $b_a = (\beta_a / 2)(E_0 t_{p0} / 2\pi n_{\text{at}} d_a)^2$ ;  $v_a = \omega_a t_{p0}$ .

Чтобы найти стационарное решение этой системы уравнений, будем считать, что переменные  $q$ ,  $p$  и  $Q$  зависят только от одной переменной  $\eta = \tau - \zeta / V$  ( $V$  – скорость распространения стационарного импульса). В этом случае уравнения (51) можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\partial q}{\partial \eta} = VQ, \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} = Q, \quad \frac{\partial Q}{\partial \eta} + v_a^2 p + 2b_a p^3 = \alpha_a q. \quad (52)$$

Первые два уравнения этой системы дают  $q(\eta) = Vp(\eta)$ . Из (52) следует связь между  $Q(\eta)$  и  $p(\eta)$ :  $Q^2 = (\alpha_a V - v_a^2) p^2 - b_a p^4$ . В случае, когда  $\alpha_a V < v_a^2$ , равенство  $Q = p = 0$  есть единственное решение этого уравнения при условии, что  $p$  и  $Q$  – вещественные переменные. Следовательно, нетривиальное решение уравнения (52) имеет место только при  $\alpha_a V > v_a^2$ . Это означает, что скорость распространения стационарного импульса  $V$  всегда больше критической скорости  $V_c = v_a^2 / \alpha_a = 2\omega_a^2 / \omega_p^2$ , где  $\omega_p = (4\pi e^2 n_a / m)^{1/2}$  – частота плазменных колебаний.

Следует отметить, что в переменных  $z, t$  стационарный импульс распространяется со скоростью  $V_{\text{st}} = cV(1+V)^{-1}$ , которая удовлетворяет условию

$$c > V_{\text{st}} \geq c \frac{2\omega_a^2}{\omega_a^2 + \omega_p^2}.$$

Форма стационарного импульса определяется из (52):

$$q(\eta) = V \left( \frac{\alpha_a V - v_a^2}{b_a} \right)^{1/2} \text{sech} \left[ \eta \left( \alpha_a V - v_a^2 \right)^{1/2} \right]. \quad (53)$$

Данное решение описывает предельно короткий импульс электромагнитного излучения, реализуемый в рассмотренной модели нелинейной среды. Этот импульс не имеет несущей волны и может быть определен как видеоимпульс. В более общем случае распространение коротких импульсов (не только стационарных) исследовалось численно в [67], где было показано, что распространение биполярного видеоимпульса, имеющего несколько колебаний напряженности электрического поля около нулевого значения, сопровождается образованием на заднем фронте высокочастотных колебаний. На рис.5 представлен один из графиков, полученных в [67], иллюстрирующий такое поведение предельно короткого импульса.

#### 4.2. Векторная модель Дюффинга

Представим нелинейную среду, в которой распространяется УКИ, в виде набора молекул, внутренние степени свободы которых описываются потенциальным полем

$$U(x, y) = \frac{1}{2}\omega_1 x^2 + \frac{1}{2}\omega_2 y^2 + \frac{1}{2}\kappa_2 x^2 y^2 + \frac{1}{4}\kappa_4 (x^4 + y^4). \quad (54)$$

Если параметр связи  $\kappa_2 = 0$ , то этот потенциал описывает скалярную модель Дюффинга для ангармонического осциллятора, который может совершать независимые колебания в двух ортогональных направлениях. Выражение (54) является простейшим обобщением этой модели. Поляризация молекулы определяется выражением  $\mathbf{p} = ex_1\mathbf{e}_1 + ey_2\mathbf{e}_2$ , полная поляризация есть произведение плотности атомов  $n_{at}$  на поляризацию одной молекулы.

Распространение электромагнитного импульса будет рассматриваться в приближении однонаправленной волны, так что волновые уравнения для напряженностей электрического поля, отвечающих различным компонентам поляризации УКИ, записываются в следующем виде:

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_1}{\partial t} = -\frac{2\pi n_{at} e \partial x}{c \partial t}, \quad \frac{\partial E_2}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E_2}{\partial t} = -\frac{2\pi n_{at} e \partial y}{c \partial t}.$$

Уравнения движения для осциллятора следуют из классического уравнения Ньютона и записываются как

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_1^2 x + \kappa_2 x y^2 + \kappa_4 x^3 = \frac{e}{m} E_1(z, t),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_2^2 y + \kappa_2 y x^2 + \kappa_4 y^3 = \frac{e}{m} E_2(z, t).$$

Введем новые независимые переменные  $\zeta = z/ct_{p0}$ ,  $\tau = (t - z/c)/t_{p0}$ ,  $p_j = \partial q_j / \partial \tau$ ,  $q_1 = (2\pi n_{at} x)$  и  $q_2 = (2\pi n_{at} y)$ . Таким образом, двухкомпонентная (векторная) модель Дюффинга будет описываться следующей системой уравнений:

$$\frac{\partial E_j}{\partial \zeta} = -p_j, \quad \frac{\partial q_j}{\partial \tau} = p_j, \quad i = 1, 2, \quad (55)$$

$$\frac{\partial p_1}{\partial \tau} = aE_1 - v_1^2 q_1 - b_2 q_1 q_2^2 - b_4 q_1^3, \quad (56)$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial \tau} = aE_2 - v_2^2 q_2 - b_2 q_2 q_1^2 - b_4 q_2^3.$$

Здесь  $a = 2\pi n_{at} e^2 t_{p0}^2 / m$ ;  $b_{2,4} = \kappa_{2,4} (2\pi n_{at} t_{p0}^2)^{-2}$ ;  $v_{1,2} = \omega_{1,2} t_{p0}$ .

Для этой системы уравнений можно найти стационарные решения. Предположив, что поля зависят только от  $\eta = \tau - \zeta/V$ , из (55) с учетом краевых условий, отвечающих напряженности электрического поля импульса и поляризации молекул, исчезающим на бесконечности, можно получить  $E_j = Vq_j$ . Подстановка этих выражений в (56) дает

$$\frac{d^2 q_1}{d\eta^2} + (b_4 q_1^2 + b_2 q_2^2) q_1 = (aV - v_1^2) q_1, \quad (57.1)$$

$$\frac{d^2 q_2}{d\eta^2} + (b_2 q_1^2 + b_4 q_2^2) q_2 = (aV - v_2^2) q_2. \quad (57.2)$$

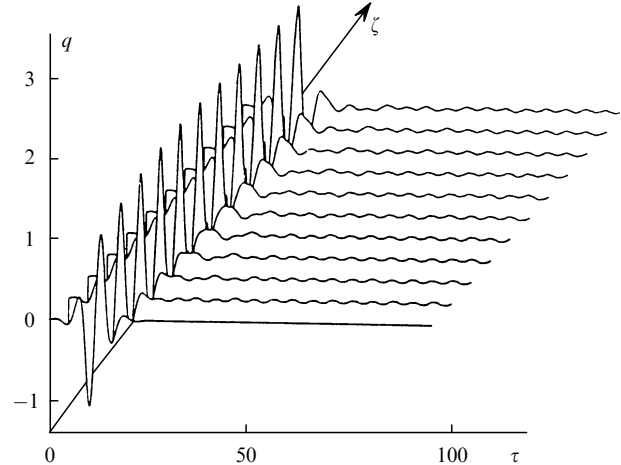


Рис.5. Нестационарный характер распространения видеоимпульса в кубически-нелинейной среде проявляющийся в образовании осцилляций на заднем фронте ( $b_a = 5$ ,  $v_a = 0.2$ ).

Эти уравнения уже фигурировали в разд.2.2 как система уравнений (14), так что найти их решение можно довольно просто. Предположим, что собственные частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  равны между собой. В этом случае частным решением системы (57) является следующее:

$$q_1(\eta) = q_2(\eta) = \left[ \frac{2(aV - v^2)}{b_2 + b_4} \right]^{1/2} \operatorname{sech} \left[ (aV - v^2)^{1/2} (\eta - \eta_0) \right],$$

где  $\eta_0$  – постоянная интегрирования. Это решение описывает линейно поляризованный видеоимпульс, распространяющийся в такой среде без искажений.

Более интересное решение имеет место, когда частоты колебаний  $\omega_1$  и  $\omega_2$  различны, а коэффициенты ангармонизма совпадают ( $b_1 = b_2$ ). В этом случае система (57) совпадает с рассмотренной в разд.2.2 и можно просто использовать полученные там решения:

$$q_1(\eta) = \frac{2\sqrt{2b_2^{-1}\mu_1} \exp(\theta_1) [1 + \exp(2\theta_2 + \mu_{12})]}{1 + \exp(2\theta_1) + \exp(2\theta_2) + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + \mu_{12})}, \quad (58)$$

$$q_2(\eta) = \frac{2\sqrt{2b_2^{-1}\mu_2} \exp(\theta_2) [1 + \exp(2\theta_1 + \mu_{12})]}{1 + \exp(2\theta_1) + \exp(2\theta_2) + \exp(2\theta_1 + 2\theta_2 + \mu_{12})},$$

где  $\exp(\mu_{12}) = (\mu_1 - \mu_2)/(\mu_1 + \mu_2)$ ;  $\mu_{1,2}^2 = (aV - v_{1,2}^2)$ ;  $\theta_{1,2} = \mu_{1,2}(\eta - \eta_{1,2})$ ;  $\eta_{1,2}$  – постоянные интегрирования. Решения (58) описывают стационарное распространение поляризованного видеоимпульса, компоненты поляризации которого изменяются несинхронно. Одна из компонент – это однополярный всплеск электрического поля, другая – знакопеременная уединенная волна.

В этих примерах было использовано предположение, что электромагнитная волна распространяется только в одном направлении. Однако если ограничиться обсуждением распространения стационарного импульса, то это приближение несущественно. Если вместо редуцированного уравнения Максвелла мы используем волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi n_{at} e \partial^2 x}{c^2 \partial t^2}$$

(или его векторное обобщение), то предположение о том, что напряженность поля зависит только от  $\eta = \tau - \zeta/V$ ,

приведет к соотношению  $E = 4\pi n_{at} e V^2 (c^2 - V^2)^{-1} x$  и окончательно – к системе уравнений вида (52). Таким путем может быть получен результат, известный из работы [20].

## 5. Распространение электромагнитных импульсов в квадратично-нелинейных средах

Здесь для описания нелинейной среды выбрана модель ангармонического осциллятора, которая часто используется при исследовании параметрических процессов в нелинейной оптике [68, 69]. Вычисление поляризации в такой модели в поле монохроматической волны дает в первую очередь нелинейную восприимчивость второго порядка, которая характерна для параметрического сложения или вычитания частот пары взаимодействующих монохроматических волн. Для видеоимпульсов такое представление о взаимодействии электромагнитных полей неприемлемо, т. к. несущая волна отсутствует. Распространение предельно коротких импульсов, содержащих одно или несколько колебаний электрического поля, целесообразно рассматривать в рамках простых моделей, не используя понятий гармонического анализа.

### 5.1. Скалярная модель ангармонического осциллятора

Для начала рассматривается скалярная модель ангармонического осциллятора. Электромагнитная волна описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (59.1)$$

где поляризация  $P$  связана с обобщенной координатой  $x$  ангармонического осциллятора соотношением  $P = n_{at} e x$ . Уравнение Ньютона для рассматриваемого осциллятора имеет вид

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_0^2 x + \kappa_2 x^2 = \frac{\mathcal{L}}{m} E(z, t), \quad (59.2)$$

где  $\omega_0$  – собственная частота колебаний осциллятора;  $\kappa_2$  – коэффициент ангармонизма;  $\mathcal{L} = (\varepsilon + 2)/3$  – фактор Лоренца;  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость. Параметр  $\mathcal{L}$  можно включить в массу  $m$ , считая ее в дальнейшем эффективной массой  $m_{ef}$ .

Первым шагом является поиск стационарного решения системы уравнений (59). Для стационарного решения напряженность электрического поля и поляризация зависят только от переменной  $\tau = t \pm z/V$ . С учетом этого предположения волновое уравнение (59.1) принимает вид  $d^2 E/d\tau^2 = \beta d^2 x/d\tau^2$ , где  $\beta = 4\pi n_{at} e V^2 (c^2 - V^2)^{-1}$ . Интегрируя это уравнение и учитывая краевые условия, характерные для уединенной волны, исчезающей на бесконечности, можно получить связь напряженности электрического поля и координаты осциллятора:  $E = \beta x$ . Уравнение (59.2) переписывается теперь как нелинейное уравнение для ангармонического осциллятора

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} + (\omega_0^2 - v\omega_p^2)x + \kappa_2 x^2 = 0, \quad (60)$$

где  $v = V^2(c^2 - V^2)^{-1}$ ;  $\omega_p^2 = 4\pi n_{at} e^2/m_{ef}$  – частота плазменных колебаний.

Первый интеграл уравнения (60) определяется стандартным образом:

$$\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + (\omega_0^2 - v\omega_p^2)x^2 + \frac{2}{3}\kappa_2 x^3 = 0, \quad (61)$$

где учитывается, что искомое решение есть уединенная волна, исчезающая на бесконечности. Обозначим

$$p^2 = v\omega_p^2 - \omega_0^2 > 0, \quad (62)$$

тогда решение (60) будет описывать несингулярную функцию, согласованную с краевыми условиями. В этом случае интегрирование (61) приводит к выражению

$$y = \operatorname{sech}^2[p(\tau - \tau_0)/2],$$

где  $y = (2\kappa_2/3p^2)x$ ;  $\tau_0$  – постоянная интегрирования. Возвращаясь к исходным физическим переменным, можно записать выражение для напряженности электрического поля видеоимпульса

$$E(\tau) = E_0 \operatorname{sech}^2\left[\frac{1}{2}(v\omega_p^2 - \omega_0^2)^{1/2}(\tau - \tau_0)\right], \quad (63)$$

где  $E_0 = 6\pi n_{at} \kappa_2^{-1} e v (v\omega_p^2 - \omega_0^2)$ .

Неравенство (62) приводит к ограничению скорости распространения найденного стационарного импульса, которое можно записать как

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \omega_p^2} < \frac{V^2}{c^2} < 1.$$

Систему уравнений (59) можно упростить, рассматривая распространение импульса в приближении однонаправленной волны. В этом случае вместо (59) используются формулы

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi n_{at} e}{c} \frac{\partial x}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_0^2 x + \kappa_2 x^2 = \frac{e}{m_{ef}} E(z, t). \quad (64.1)$$

Эта система уравнений может быть переписана в виде

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + q + q^2 = \mathcal{E}, \quad (64.2)$$

где нормированные переменные определены следующими выражениями:

$$\zeta = z \frac{\omega_p^2}{2c\omega_0}, \quad \tau = \omega_0 \left(t - \frac{z}{c}\right), \quad \mathcal{E} = \frac{e\kappa_2}{m_{ef}\omega_0^4} E, \quad q = \frac{\kappa_2}{\omega_0^2} x.$$

Численное решение системы уравнений (64.2) показало, что видеоимпульс малой амплитуды разрушается в процессе распространения (рис.6), тогда как в случае мощных импульсов (начиная с некоторой пороговой мощности) дисперсионное искажение видеоимпульса подавляется (численное решение уравнений (64.2) было выполнено Е.В.Казанцевой (МИФИ), любезно предоставившей графические материалы, представленные на рис.6 и 7).

На рис.7 иллюстрируется взаимодействие двух видеоимпульсов, отвечающих стационарным решениям системы (64). Такие импульсы из-за различия амплитуд имеют разные групповые скорости распространения, что позволяет изучать их столкновения в приближении однонаправленных волн. Если на исходный стационарный видеоимпульс (63) наложить амплитудную модуляцию в виде

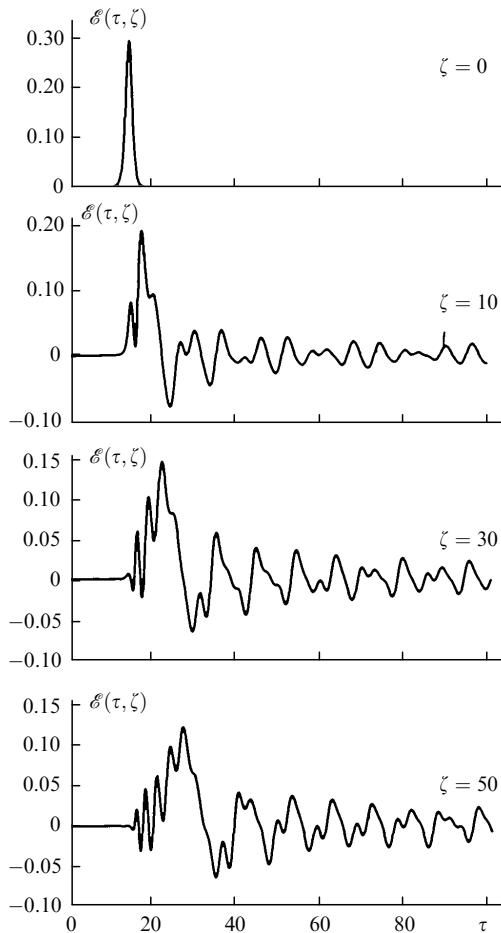


Рис.6. Разрушение слабого видеоимпульса при его распространении в квадратично-нелинейной среде, моделируемой ангармоническим осциллятором.

слабой гармонической волны, то по мере распространения стационарный импульс очистится от этой модуляции, незначительно меняя свои параметры. К сожалению, этих результатов недостаточно, чтобы назвать стационарные видеоимпульсы данной модели солитонами.

**5.2. Векторная модель ангармонического осциллятора**

При рассмотрении распространения импульса поляризованного излучения в квадратично-нелинейной среде в качестве модели можно использовать ансамбль двухкомпонентных ангармонических осцилляторов. Как простейшее обобщение рассмотренной ранее модели можно использовать следующие уравнения:

$$\frac{\partial^2 E_1}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_1}{\partial t^2} = \frac{4\pi n_{at} e}{c^2} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \tag{65}$$

$$\frac{\partial^2 E_2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial t^2} = \frac{4\pi n_{at} e}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_1^2 x + \kappa_{12} xy + \kappa_{11} x^2 = \frac{e}{m} E_1(z, t), \tag{66.1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_2^2 y + \kappa_{12} xy + \kappa_{22} y^2 = \frac{e}{m} E_2(z, t). \tag{66.2}$$

Для стационарного решения напряженность электрического поля и поляризация зависят только от переменной  $\tau = t \pm z/V$ . В этом случае (как и в случае скалярной

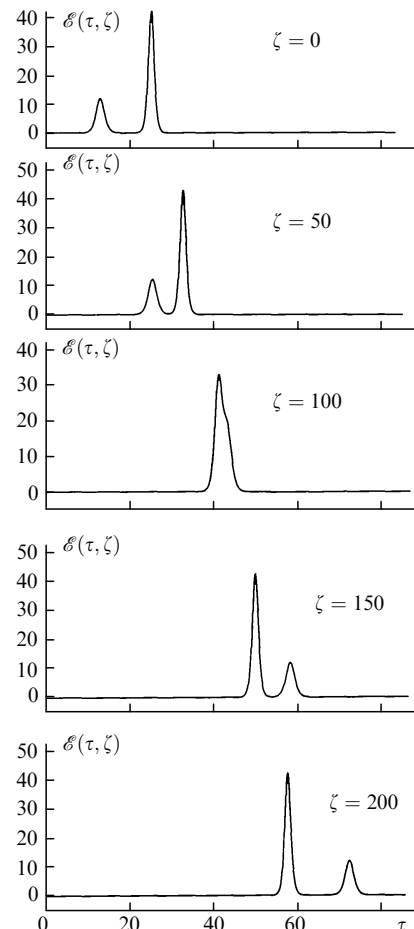


Рис.7. Столкновение двух стационарных видеоимпульсов с нормированными амплитудами  $q_{10} = 3$  и  $q_{20} = 30$ , распространяющимися в одном и том же направлении с различными скоростями.

модели) уравнения для полей интегрируются, приводя к соотношениям  $E_{1,2} = \beta x, \beta y$ . Уравнения (66) сводятся к следующей системе нелинейных уравнений:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \tau^2} + (\omega_1^2 - v\omega_p^2)x + \kappa_{12}xy + \kappa_{11}x^2 = 0, \tag{67.1}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} + (\omega_2^2 - v\omega_p^2)y + \kappa_{12}xy + \kappa_{22}y^2 = 0. \tag{67.2}$$

Если как собственные частоты нормальных колебаний, так и константы ангармонизма равны друг другу (модель изотропного ангармонического осциллятора), то рассматриваемая задача сводится к случаю скалярной модели. Более интересна модель анизотропного осциллятора.

Рассмотрим более общий случай, когда потенциальная энергия малых колебаний молекулы или электрона около положения равновесия записывается в произвольном виде  $U(x, y)$ . Считая обобщенные координаты малыми отклонениями от положения равновесия, разложим этот потенциал в ряд Тейлора:

$$U(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} y^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} xy + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} x^3 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} y^3 + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y} x^2 y + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 U}{\partial y^2 \partial x} y^2 x + \dots$$

Ограничившись в этом разложении только кубическими слагаемыми, можно записать уравнения Ньютона для



рассматриваемого ангармонического осциллятора, которые заменяют ранее использованные уравнения (66):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega_1^2 x + \omega_{12}^2 y + 2\kappa_{12} xy + 3\kappa_{11} x^2 + \kappa_{21} y^2 = \frac{e}{m} E_1(z, t), \quad (68.1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \omega_2^2 y + \omega_{21}^2 x + 2\kappa_{21} xy + 3\kappa_{22} y^2 + \kappa_{12} x^2 = \frac{e}{m} E_2(z, t). \quad (68.2)$$

Входящие сюда коэффициенты связаны с силовыми константами потенциала  $U(x, y)$ .

Для стационарного решения вновь определяется связь напряженности электрического поля с обобщенной координатой  $E_{1,2} = \beta x, \beta y$  и результирующие уравнения принимают вид, аналогичный виду уравнений (67):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - p_1^2 x + \omega_{12}^2 y + 2\kappa_{12} xy + 3\kappa_{11} x^2 + \kappa_{12} y^2 = 0, \quad (69.1)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - p_2^2 y + \omega_{21}^2 x + 2\kappa_{21} xy + 3\kappa_{22} y^2 + \kappa_{12} x^2 = 0. \quad (69.2)$$

Частными решениями системы (69) являются решения, получаемые в предположении о пропорциональности нормальных колебаний  $x \sim y$  и о симметрии потенциала  $U(x, y)$ . Однако больший интерес представляют решения системы (69) без привлечения ограничений на потенциал, но найти их пока не удалось.

## Заключение

Итак, были рассмотрены некоторые случаи модельных сред, в которых удается аналитически получить явную временную зависимость электрического поля для импульса электромагнитного поля произвольно короткой длительности. Мы не делали никаких предположений, касающихся гармонической несущей волны или скорости изменения поля этого импульса. В большинстве случаев можно найти только частное решение, описывающее стационарное распространение видеоимпульса. Эти решения отвечают достаточно сильным электромагнитным полям, таким, что присущая среде дисперсия подавляется нелинейными процессами.

Проведенные оценки показывают, что амплитуда напряженности стационарных видеоимпульсов близка к напряженности атомного поля в среде и, следовательно, учет возможных процессов ионизации и многофотонного поглощения является необходимым для уточнения рассмотренных моделей. Что касается более слабых и нестационарных импульсов, то из-за дисперсии нелинейной среды импульсы, содержащие одно или несколько колебаний электрического поля около нулевого значения, испытывают уширение и модуляцию на заднем фронте. Можно думать, что постепенно они эволюционируют к квазигармоническим волнам.

Мы не ставили перед собой цель дать полный обзор всех результатов в рассматриваемой области, однако полезно отметить некоторые работы. Так, например, был предпринят выход за пределы модели двухуровневых атомов. В [19, 70] исследован многочастотный ультракороткий импульс в каскадном процессе ВКР. Были найдены стационарные решения обобщенных уравнений Максвелла – Блоха, которые представляет собой нелинейную суперпозицию индивидуальных одночастотных «ярких солитонов» лоренцевской формы. Их интерференция может приводить к образованию последовательности хорошо различимых мощных импульсов длительностью около 0.2 фс.

В обзоре [71] обсуждается метод моделирования видеоимпульсов, для которых характерны произвольная крутизна фронтов и асимметрия формы. Такие импульсы предлагается представлять не волновыми пакетами из гармонических волн, а суперпозицией волн, огибающая которых определяется ортогональными полиномами. В частности, рассматривается лаггер-оптика видеоимпульсов и показано, что в линейном случае есть различие в поведении видеоимпульсов и квазигармонических волн.

Поскольку для видеоимпульсов не определено понятие несущей волны, нелинейно-оптические явления, в которых они участвуют, также приобретут иные черты. Генерация гармоник, параметрическое сложение или вычитание частот будут проявляться в ширине спектра импульса, а не в изменении хорошо разделенных (например,  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0$  и т.д.) частотных компонент излучения. Следовательно, видеоимпульс будет сокращаться. Однако, с другой стороны, из-за материальной дисперсии такое укорачивание видеоимпульса должно тормозиться. Это значит, что имеются два конкурирующих механизма, определяющих длительность экстремально короткого импульса электромагнитного излучения.

Здесь и во многих других работах обсуждаются импульсы плоских волн. Очевидным обобщением должно быть исследование электромагнитных волн более сложной геометрии, например движущихся сгустков электромагнитного излучения («оптических пульс» [72], пузырей [20] и т.п.).

1. Tai K., Tomita A. *Appl. Phys. Letts*, **48**, 1033 (1986).
2. Fork R.L., Brito Cruz C.H., Becker P.C., Shank Ch.V. *Optics Letts*, **12**, 483 (1987).
3. Aston D.A., Nuss M.C. *IEEE J. Quantum Electron.*, **24**, 184 (1988).
4. You D., Bucksbaum P.H., Dykaar D.R. *Optics Letts*, **18**, 290 (1993).
5. Tamura K., Nakazawa M. *Optics Letts*, **21**, 68 (1996).
6. Sartania S., Cheng Z., Lenzner M., Tempea G., Spielmann C., Krausz F., Ferencz K. *Optics Letts*, **22**, 1562 (1997).
7. Halbout J.-M., Grischkowsky D. *Appl. Phys. Letts*, **45**, 1281 (1984); Gouveia-Neto A.S., Gomes A.S.L., Taylor J.R. *Optics Letts*, **12**, 395 (1987); Nakazawa M., Nakashima T., Kubota H. *Optics Letts*, **13**, 120 (1988); Chernikov S.V., Dianov E.M., Richardson D.J., Payne D.N. *Optics Letts*, **18**, 476 (1993); Yelin D., Meshulach D., Silberberg Y. *Optics Letts*, **22**, 1793 (1997).
8. Christov I.P., Danailov M.B. *Optics Comms*, **69**, 291 (1988).
9. Antoine Ph., Milosevic D. B., L'Huillier A., Gaarde M.B., Salieres P., Lewenstein M. *Phys. Rev. A*, **56**, 4960 (1997); Fam Le Kien, Midorikawa K., Suda A. *Phys. Rev. A*, **58**, 3311 (1998); Платоненко В.Т., Стрелков В.В. *Квантовая электроника*, **25**, 771 (1998).
10. Yamakawa K., Aoyama M., Matsuoka S., Takuma H., Barty C.P.J., Fittinghoff D. *Optics Letts*, **23**, 525 (1998); Jung I.D., Kartner F.X., Matuschek N., Sutter D.H., Moriergenoud F., Zhang G., Keller U., Scheuer V., Tilsch M., Tschudi T. *Optics Letts*, **22**, 1009 (1997); Backus S., Durfee C.G., Mourou G., Kapteyn H.C., Murnane M.M. *Optics Letts*, **22**, 1256 (1997); Duhr O., Nibbering E.T.J., Korn G., Tempea G., Krausz F. *Optics Letts*, **24**, 34 (1999).
11. Nazarkin A., Korn G. *Phys. Rev. A*, **58**, 61R (1998); Kobayashi Y., Sekikawa T., Nabekawa Y., Watanabe S. *Optics Letts*, **23**, 64 (1998); Kaplan A. E. Shkolnikov P. L. *J. Opt. Soc. Amer. B*, **13**, 347 (1992); Shvartsburg A.B., Stenflo L., Shukla A.B. *Phys. Rev. E*, **56**, 7315 (1997); Simin Feng, Winful H.G., Hellwarth R.W. *Phys. Rev. E*, **59**, 4630 (1999); Casperson L.W. *Phys. Rev. A*, **57**, 609 (1998); Пархоменко А.Ю., Сазонов С.В. *Письма в ЖЭТФ*, **67**, 887 (1998).
12. Андреев А.А., Мак А.М., Яшин В.Е. *Квантовая электроника*, **24**, 99 (1997).
13. Bullough R.K., Ahmad F. *Phys. Rev. Letts*, **27**, 330 (1971).
14. Bullough R.K., Jack P.M., Kitchenside P.W., Saunders R. *Phys. Scr.*, **20**, 364 (1979).
15. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **10**, 360 (1983).
16. Akimoto K. *J. Phys. Soc. Jpn*, **65**, 2020 (1996).

17. Petrov V., Rudolph W. *Phys.Letts A*, **145**, 192 (1990).
18. Andreev A.V. *Phys.Letts A*, **179**, 23 (1993).
19. Kaplan E. *Phys.Rev.Letts*, **73**, 1243 (1994).
20. Kaplan E., Shkolnikov P.L. *Phys.Rev.Letts*, **75**, 2316 (1995).
21. Беленов Э.М., Крюков П.Г., Назаркин А.В., Ораевский А.Н., Усков А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **47**, 442 (1988).
22. Беленов Э.М., Назаркин А.В., Ущяповский В.А. *ЖЭТФ*, **100**, 762 (1991).
23. Беленов Э.М., Крюков П.Г., Назаркин А.В., Прокопович И.П., *ЖЭТФ*, **105**, 28 (1994).
24. Casperson L.W. *Phys.Rev.A*, **57**, 609 (1998).
25. Genkin G.M. *Phys.Rev.A*, **58**, 758 (1998).
26. Ванин Е.В., Ким А.В., Сергеев А.М., Довнер М.С. *Письма в ЖЭТФ*, **58**, 964 (1993).
27. Sergeev A.M., Gildenburg V.B., Kim A.V., Lontano M., Quiroga-Teixeiro M. *Proc.I Intern.Conf. (Varenna, Italy, 1997)* (Woodburg, N.Y., pp. 15–31).
28. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys.Rev.*, **183**, 457 (1969).
29. Нюе F.T. *Phys.Rev.A*, **26**, 1466 (1982).
30. Конорки М.И., Eberly J.H. *Phys.Rev.A*, **24**, 2567 (1981).
31. Большов Л.А., Лиханский В.В., Персианцев М.И. *ЖЭТФ*, **84**, 903 (1983).
32. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **11**, 567 (1984).
33. Lee C.T. *Optics Comm.*, **9**, 1 (1973).
34. Lee C.T. *Optics Comm.*, **10**, 111 (1974).
35. Sazonov S.V., Trifonov E.V. *J.Phys.B*, **27**, L7 (1994).
36. Sazonov S.V., Yakupova L.S. *J.Phys.B*, **27**, 369 (1994).
37. Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **107**, 20 (1995).
38. Сазонов С.В. *Оптика и спектроскопия*, **79**, 636 (1995).
39. Козлов С.А., Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **111**, 404 (1997).
40. Caudrey P.J., Eilbeck J.C. *Phys.Letts A*, **62**, 65 (1977).
41. Goldstein P.P. *Phys.Letts A*, **121**, 11 (1987).
42. Eilbeck J.C., Bullough R.K. *J.Phys.A*, **5**, 820 (1972).
43. Eilbeck J.L., Gibbon J.D., Caudrey P.J., Bullough R.K. *J.Phys.A*, **6**, 1337 (1973).
44. Arecchi F.T., Courtens E. *Phys.Rev.A*, **2**, 1730 (1970).
45. Rehler N.E., Eberly J.H. *Phys.Rev.A*, **3**, 1735 (1971).
46. Башаров А.М., Маймистов А.И. *ЖЭТФ*, **87**, 1594 (1984).
47. Башаров А.М., Маймистов А.И. *ЖЭТФ*, **94**, 61 (1988).
48. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **24**, 963 (1997).
49. Tratnik M.V., Sipe J.E. *Phys.Rev.A*, **38**, 2011 (1988).
50. Radhakrishnan R., Lakshmanan M. *J.Phys.A*, **28**, 2683 (1995).
51. Hirota R., Satsuma J. *Progr.Theor.Phys.,Suppl.*, **59**, 64 (1976).
52. Хирота Р. *Солитоны*. Под ред. Р.Будлафа, Ф.Кодри (М., Мир, 1983, с.175).
53. Gibbon J., Caudrey P.J., Bullough R.K., Eilbeck J.L. *Letts Nuovo Cimento*, **8**, 775 (1973).
54. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: Метод обратной задачи* (М., Наука, 1980).
55. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* (М., Наука, 1980).
56. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **76**, 636 (1994).
57. Gredeskul S.A., Kivshar Yu.S., Yanovskaya M.V. *Phys.Rev.A*, **41**, 3994 (1990).
58. Kivshar Yu.S., Afanasjev V.V. *Optics Letts*, **16**, 285 (1991).
59. Wadati M. *J.Phys.Soc.Jpn*, **34**, 1289 (1973).
60. Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М., Мир, 1996).
61. Ono H. *J.Phys.Soc.Jpn*, **41**, 1817 (1976).
62. Ablowitz M.J., Satsuma J. *J.Math.Phys.*, **19**, 2180 (1978).
63. Беленов Э.М., Назаркин А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **51**, 252 (1990).
64. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **78**, 483 (1995).
65. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **21**, 743 (1994).
66. Вужва А. Д. *Физика твердого тела*, **20**, 272 (1978).
67. Маймистов А.И., Елютин С.О. *Оптика и спектроскопия*, **69**, 101 (1991).
68. Ярич А. *Квантовая электроника и нелинейная оптика* (М., Сов. радио, 1973).
69. Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М., Наука, 1989).
70. Kaplan E., Shkolnikov P. L. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **13**, 347 (1992).
71. Шварцбург А.Б. *УФН*, **168**, 85 (1998).
72. Silberberg Y. *Optics Letts*, **15**, 1282 (1990).

**A.I.Maimistov. Some models of propagation of extremely short electromagnetic pulses in a nonlinear medium.**

Some cases of model media considered in this paper allow analytical solutions to nonlinear wave equations to be found and the time dependence of the electric field strength to be determined in the explicit form for arbitrarily short pulses of electromagnetic field. Our analysis does not employ any assumptions concerning a harmonic carrier wave or the variation rate of the field in such pulses. The considered class of models includes resonance two-level and quasi-resonance systems. Nonresonance media are analysed in terms of models of anharmonic oscillators – the Duffing and Lorentz models. In most cases, only particular solutions describing the stationary propagation of a video pulse (a unipolar transient of the electric field or a pulse including a small number of oscillations of the electric field around zero) can be found. These solutions correspond to sufficiently strong electromagnetic fields when the dispersion inherent in the medium is suppressed by nonlinear processes.