

## Сфокусированные бесселевы пучки

П.В.Адамсон

*Рассмотрено дифракционное уширение сфокусированного светового пучка с бесселевым распределением амплитуды. Кроме традиционных дифференциальных характеристик (радиальных распределений плотностей электрической энергии и аксиального потока полной электромагнитной энергии в пучке), рассчитаны и интегральные величины, характеризующие степень поперечной локализации излучения в трубке заданного радиуса внутри пучка. Показано, что и в высокоапертурном пучке бесселева типа лишь очень малая доля общей мощности пучка сконцентрирована в его центральном керне и что при сильной фокусировке бесселева пучка возникает также фокусная точка. Эта точка не находится в геометрооптической фокальной плоскости, а сдвинута от нее на некоторое расстояние.*

**Ключевые слова:** бесселевы пучки, дифракционное уширение, поперечная локализация излучения.

В последние годы значительное внимание привлекли новые типы решений волнового уравнения для свободного пространства, которые в принципе отличаются от традиционных плоских волн или классических гауссовых пучков [1–4]. Одним интересным представителем таких решений является параксиальный пучок с бесселевым распределением амплитуды [5–14]. Однако параксиальные пучки характеризуются существенным недостатком – очень слабой поперечной локализацией распределения интенсивности в целом.

В настоящей работе, во-первых, рассматривается изменение поперечного распределения и степени концентрации излучения в бесселевых пучках в результате применения высокоапертурной линзы при формировании этих пучков классическим методом кольцевой щели. Во-вторых, исследуется также пространственное распределение светового поля в фокальной области высокоапертурной фокусирующей системы с бесселевым амплитудно-фазовым фильтром (другими словами, исследуется поле, возникающее в результате сильной фокусировки пучка с бесселевым распределением амплитуды).

Рассмотрим свойства сфокусированных бесселевых пучков в рамках векторной теории дифракции [15, 16], т. е. стандартное скалярное приближение при больших апертурах уже неадекватно описывает ситуацию. При этом предположим, что число Френеля оптической системы  $N_F = a^2/\lambda f$  (где  $a$  – радиус выходного зрачка,  $\lambda$  – длина волны,  $f$  – фокусное расстояние) существенно больше единицы (у обычных высокоапертурных фокусирующих систем, как правило,  $N_F \gg 1$ ). Тогда классическое приближение Дебая работает достаточно точно [17], только учет векторного характера поля приводит теперь к векторному дифракционному интегралу [16].

Для описания сфокусированного поля используем относительные распределения плотности продольного по-

тока электромагнитной энергии (аксиальной компоненты вектора Пойнтинга)  $p$  и пространственной плотности электрической энергии  $w$  (в параксиальном случае  $w \approx p$  – интенсивность света в относительных единицах). Считая, что оптическая система обладает вращательной симметрией и является безаберрационной и апланатической (удовлетворяет условию синусов Аббе [18]), в случае, когда источник излучает линейно поляризованное поле, имеем

$$p(r, z) = |I_0|^2 - |I_2|^2, \quad (1)$$

$$w(r, \varphi, z) = |I_0|^2 + 4|I_1|^2 \cos^2 \varphi + |I_2|^2 + 2 \cos 2\varphi \operatorname{Re}(I_0 I_2^*), \quad (2)$$

$$I_n = \int_{\theta_0}^{\theta_m} i(\theta) \sqrt{\cos \theta} f_n(\theta) J_n(2\pi r \lambda^{-1} \sin \theta) \exp(i2\pi z \lambda^{-1} \cos \theta) d\theta, \quad (3)$$

$$f_0 = \sin \theta(1 + \cos \theta), \quad f_1 = \sin^2 \theta, \quad f_2 = \sin \theta(1 - \cos \theta), \quad (4)$$

где  $r, \varphi, z$  – цилиндрические координаты (ось  $z$  совпадает с оптической осью фокусирующей системы, в точке  $r = z = 0$  находится геометрический фокус,  $\varphi$  определяется относительно оси, вдоль которой направлен электрический вектор падающего поля);  $J_n$  – функция Бесселя первого рода с целочисленным индексом  $n$ ;  $0 \leq \theta_0 < \theta_m$ ;  $\theta_m$  – половина апертурного угла в пространстве изображения;  $i(\theta)$  определяет относительную угловую зависимость амплитуды на выходном зрачке (выходной сфере), сформированную амплитудно-фазовым фильтром системы. В дальнейшем вместо истинных пространственных координат  $r$  и  $z$  используем традиционные нормализованные величины – «оптические координаты»  $v = 2\pi r \lambda^{-1} \sin \theta_m$  и  $u = 2\pi z \lambda^{-1} \sin^2 \theta_m z$ .

Отметим, что дифракционный интеграл (3) работает лишь в такой фокальной области, которая локализована вдали от выходного зрачка, иными словами, расстояние до геометрооптической фокальной плоскости должно быть существенно меньше, чем расстояние до выходной сферы ( $z \ll f$ ). Поскольку у высокоапертурных систем практически  $a \simeq f$  и  $N_F \simeq a/\lambda$ , то, считая достаточным

условие  $z/f \lesssim 0.01$ , получаем, что при  $a = 10$  см и  $\lambda = 0.5$  мкм ( $N_F = 2 \cdot 10^5$ ) максимальное значение  $|u|$  может составить  $\sim 10^4$ . Обратим внимание и на то, что, как легко видно из формул (1)–(3), в приближении Дебая дифракционное поле в области фокуса всегда обладает симметрией зеркального отражения относительно геометрооптической фокальной плоскости  $z \equiv 0$ , т. е.  $p(-z) = p(z)$  и  $w(-z) = w(z)$ . Известный «фокальный сдвиг» [19] возникает, если  $N_F \lesssim 1$  (вопрос фокусировки бесселевых пучков в этом случае рассмотрен в [20]).

Зависимость величин  $p$  и  $w$  от координат  $v$  и  $u$  дает хорошее представление об экстремумах поля, но судить на их основе об эффективности пространственной локализации излучения в пучках бесселева типа невозможно, т. к. именно многочисленные слабые боковые лепестки переносят основную часть общей мощности таких пучков. Для описания степени пространственной локализации света введем интегральные характеристики

$$K_p(v, u) = \int_0^v p(v, u) dv / \int_0^\infty p(v, u) dv, \quad (5)$$

$$K_w(v, u) = \int_0^v \int_0^{2\pi} w(v, \varphi, u) dv d\varphi / \int_0^\infty \int_0^{2\pi} w(v, \varphi, u) dv d\varphi, \quad (6)$$

которые точно (количественно) описывают изменение степени поперечной концентрации излучения в пучке при его распространении в свободном пространстве. Под шириной бесселева пучка понимаем ширину распределения в целом ( $K_{p,w} \rightarrow 1$ ), а не только ширину его центрального ядра.

Рассмотрим теперь высокоапертурные пучки бесселева типа, генерируемые методом узкой кольцевой щели [6]. При этом в выражении (3) следует брать  $\theta_0 = \theta_m - \Delta\theta_m$  ( $\Delta\theta_m$  – угловая ширина щели,  $\Delta\theta_m \ll \theta_m$ ) и  $t(\theta) \equiv 1$ . Результаты численных расчетов величин  $p$ ,  $w$  и  $K_p$ ,  $K_w$  по формулам (1), (2) и (5), (6) соответственно приведены на рис. 1–3. Отметим сразу, что рассматриваемые высокоапертурные пучки являются векторными пучками – электрический (магнитный) вектор поля имеет не только поперечные компоненты, но также и зависящую от поперечных координат осевую компоненту;

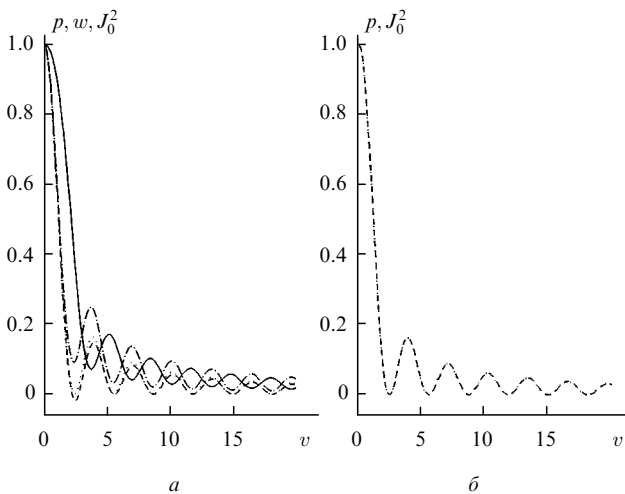


Рис. 1. Зависимости  $p$  (штриховые кривые),  $w$  для  $\varphi = 0$  (сплошная кривая) и  $90^\circ$  (штрих-пунктир), а также функции  $J_0^2$  (пунктир; на рис. 1, б пунктир сливается со штриховой кривой) от  $v$  в геометрооптической фокальной плоскости ( $u = 0$ ) при  $\theta_m = 60^\circ$  (а) и  $6^\circ$  (б),  $\Delta\theta_m = 0.5$  (а) и  $0.05^\circ$  (б).

другими словами, направление электрического вектора (поляризация света) в определенной точке внутри пучка зависит от координат этой точки. Особенность таких пучков состоит и в том, что вращательной симметрией обладает лишь  $p$ , а для  $w$  возникает зависимость от угла  $\varphi$  (в поперечном сечении) внутри пучка (рис. 1, а). Кроме того,  $w = p$  только при  $v \equiv 0$ , а вне оптической оси ( $v \neq 0$ ) поперечное распределение  $w$  отличается от соответствующего распределения для  $p$  ( $w$  можно считать симметричным относительно поворота при малых апертурах – в парааксиальных пучках  $w$  практически не отличается от  $p$ ). Действительно, проведенные нами расчеты прямо показывают (рис. 1, а), что у таких пучков поперечное распределение  $w$ , в основном из-за вклада интегралов  $I_{1,2}$  (см. формулы (1) и (2)), заметно отличается от функции  $J_0^2(r)$ .

Основная черта парааксиальных бесселевых пучков, состоящая в том, что лишь очень малая доля общей мощности пучка локализована в его центральном максимуме, четко характеризует и их высокоапертурные (векторные) аналоги. Однако высокоапертурные пучки в целом сильнее сконцентрированы вокруг своей оси, чем парааксиальные пучки. Расчеты показывают, что в представлении оптических координат интегральные характеристики пучка  $K_{p,w}$  для разных апертурных углов по порядку величины совпадают (конкретные результаты для  $\theta_m = 6$  и  $60^\circ$  приведены на рис. 2 и 3). Поскольку  $r \sim v / \sin \theta_m$ , то при фиксированном  $v$ , например для  $\theta_m = 6$  и  $60^\circ$ , отношение истинных пространственных радиусов, которые охватывают примерно одинаковую часть полной мощности

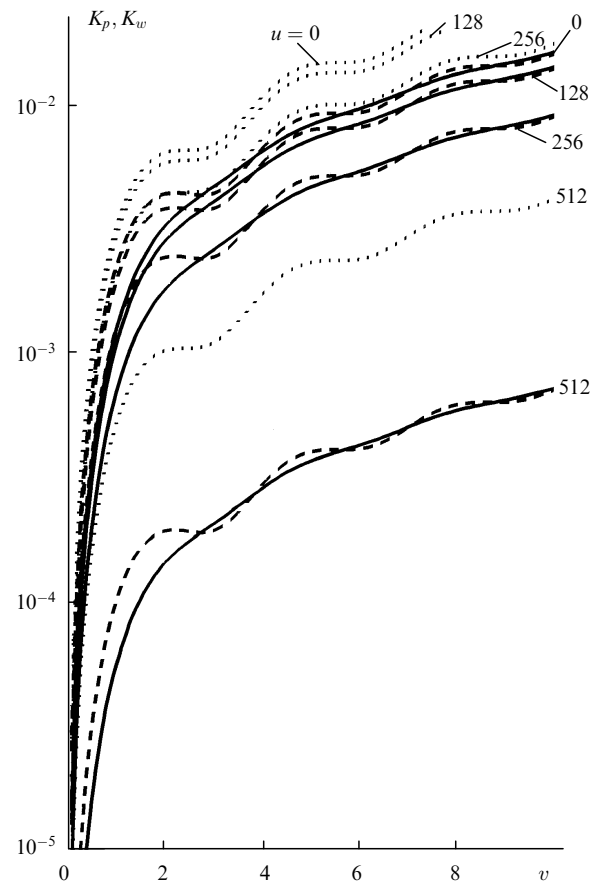


Рис. 2. Зависимости  $K_w$  (сплошные кривые и пунктир) и  $K_p$  (штриховые кривые) от  $v$  при разных  $u$  для  $\theta_m = 6$  (пунктир) и  $60^\circ$  (остальные кривые),  $\Delta\theta_m = 0.05$  (пунктир) и  $0.5^\circ$  (остальные кривые).

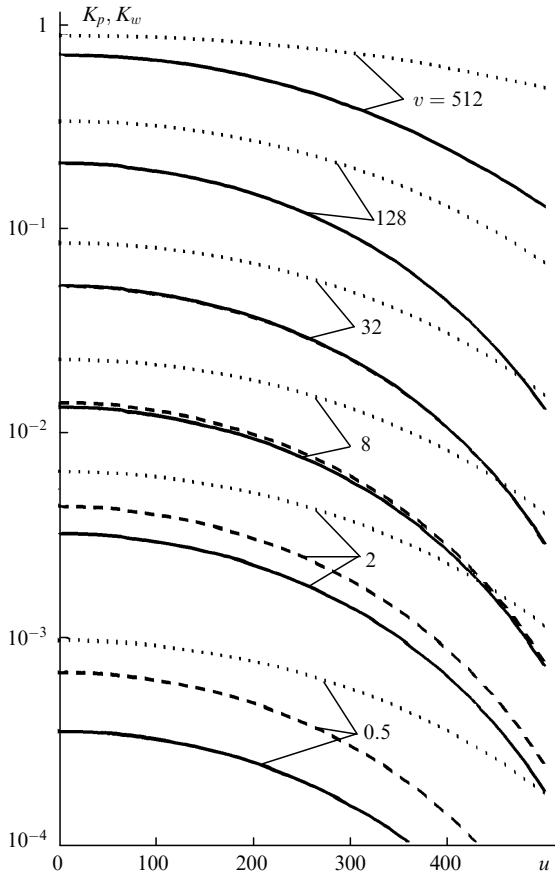


Рис.3. Зависимости  $K_w$  (сплошные кривые) и  $K_p$  (штриховые кривые) для  $\theta_m = 60^\circ$ ,  $\Delta\theta_m = 0.5^\circ$ , а также  $K_w$  (пунктир) для  $\theta_m = 6^\circ$ ,  $\Delta\theta_m = 0.05^\circ$  в аксиальном направлении при фиксированных  $v$  от оптической координаты  $u$ .

пучка,  $r(\theta_m = 6^\circ)/r(\theta_m = 60^\circ) = \sin 60^\circ / \sin 6^\circ \approx 8.3$ , т. е. радиус центральной части (центрального максимума) высокоапертурного пучка бesselева типа с  $\theta_m = 60^\circ$  практически на порядок меньше, чем у малоапертурного пучка с  $\theta_m = 6^\circ$ .

При распространении пучка величины  $p$  и  $w$  на оптической оси системы и на определенных расстояниях от нее уменьшаются почти одинаковым образом, другими словами, расходимость энергии в поперечном сечении пучка имеет практически однородный характер. На последний факт указывают и зависимости  $K_{p,w}$  от  $u$  (рис.3), причем различие интегральных параметров  $K_p$  и  $K_w$  менее заметно, чем различие  $p$  и  $w$ . Заметим еще, что при фиксированной апертуре степень поперечной локализации данных пучков будет тем меньше, чем меньше ширина кольцевой щели (в первом приближении эту зависимость можно считать линейной), а для заданной ширины щели степень пространственной локализации пучка в поперечном направлении можно повысить, увеличивая апертурный угол фокусирующей системы (однако это приводит к быстрому дифракционному уширению вдоль оси).

Далее рассмотрим случай, когда в формуле (3)  $\theta_0 = 0$  и

$$t(\theta) = J_0(C \sin \theta / \sin \theta_m), \quad (7)$$

где действительная постоянная  $C > 2.405$ . Иначе говоря, исследуем световое поле в области фокуса фокусирующих систем с амплитудно-фазовыми фильтрами с пропусканием типа (7). При больших  $C$  такие фильтры формируют сходящуюся сферическую волну практически с бesselевым распределением амплитуды на волновом

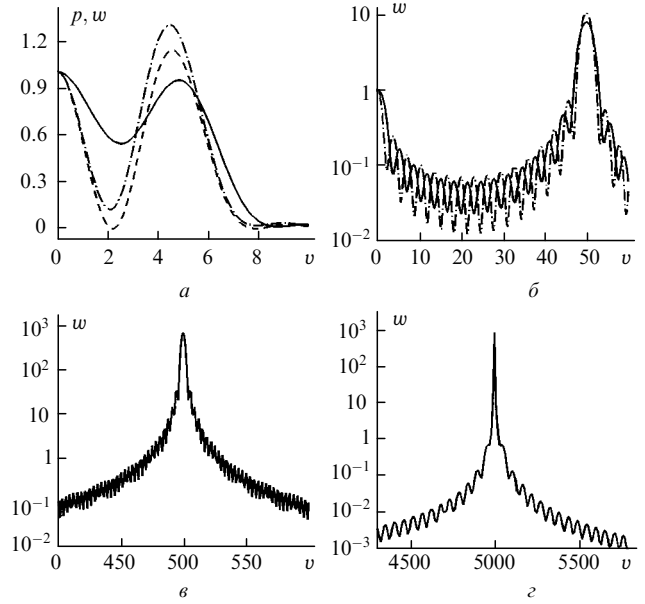


Рис.4. Зависимости  $p$  (штриховая кривая) и  $w$  для  $\varphi = 0$  (сплошные кривые) и  $90^\circ$  (штрих-пунктир) от  $v$  в геометрооптической фокальной плоскости ( $u = 0$ ) при  $\theta_m = 60^\circ$ ,  $C = 5$  (а), 50 (б), 500 (в) и 5000 (г).

фронте, а при небольших  $C$  они представляют собой усеченные бesselевы фильтры. Зависимость дифракционной картины от  $C$  на геометрооптической фокальной плоскости приведена на рис.4. При  $C \rightarrow \infty$  дифракционное изображение преобразуется к единственному световому кольцу, что в скалярной теории показано уже давно [7, 21]. В принципе, это следует просто из того факта, что фурье-образом функции  $J_0(x)$  является круг [9]. Следовательно, при фокусировке нулевого бesselева пучка его яркий центральный максимум полностью подавля-

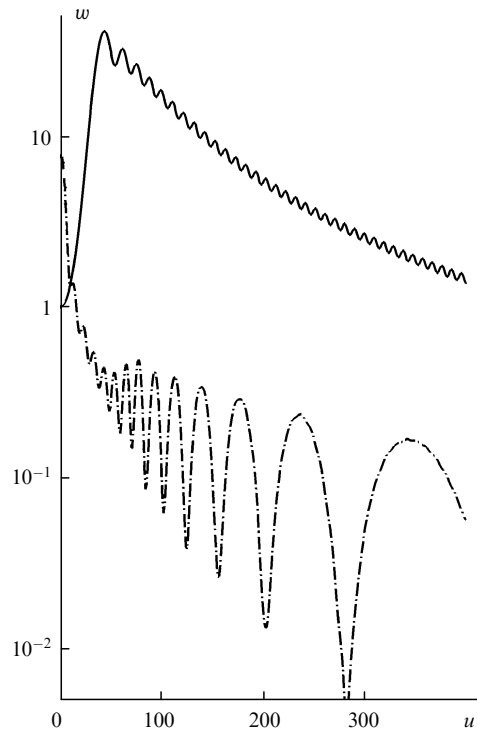


Рис.5. Зависимости  $w$  в аксиальном направлении от оптической координаты  $u$  на оси симметрии пучка  $v = 0$  (сплошная кривая) и на расстоянии  $v = 50$  от этой оси (штрих-пунктир) при  $C = 50$ ,  $\theta_m = 60^\circ$ .

ется в геометрооптической фокальной плоскости и там образуется лишь один интенсивный боковой максимум на расстоянии  $v = C$ .

Однако это справедливо лишь в геометрооптической фокальной плоскости  $u = 0$  и в непосредственной близости от нее. Зависимость величины  $w$  на оси пучка (при  $v = 0$ ) от  $u$  (рис.5) показывает, что при удалении от этой плоскости  $w$  начинает увеличиваться, достигает своего максимума на определенном расстоянии  $u = C$  и за данной точкой (в сторону возрастания  $u$ ) при больших  $C$  уменьшается весьма медленно, долго сохраняя свое высокое значение, как это имеет место у рассмотренных выше высокоапертурных пучков бесселева типа прямо за их геометрооптическим фокусом.

В то же время достаточно далеко от оптической оси поведение  $w$  имеет обратный характер: при удалении от геометрооптической фокальной плоскости плотность энергии уменьшается (рис.5). Возникновение сильной локализации поля на оси пучка в точке  $u = C$  демонстрирует лучше всего рис.6, где приведены зависимости величин  $p$  и  $w$  в поперечной плоскости  $u = C$  от радиальной оптической координаты  $v$  для разных  $C$ . Таким образом, фокус в обычном (истинном) смысле, т. е. как точка на оси пучка, где плотность энергии является максимальной, существует и в данном случае, только он сдвинут от геометрического фокуса на определенное расстояние  $u \approx C$ . Для больших  $C$  плотность энергии в истинном фокусе превышает плотность энергии в геометрооптическом фокусе на несколько порядков (см. рис.6, б, з).

При удалении от истинного фокуса ( $u > C$ ) поле будет расходиться и степень его локализации уменьшается. Однако это уменьшение будет весьма медленным для сфокусированных бесселевых пучков, т. е. в случае фильтров с большими  $C$ . Для получения более детального представления о поведении степени концентрации светового поля за геометрооптической фокальной плоскостью рассмотрим интегральные характеристики  $K_{p,w}$ , поскольку распределение величин  $p$  и  $w$  лишь качественно характеризует пространственную локализацию излучения в пучке.

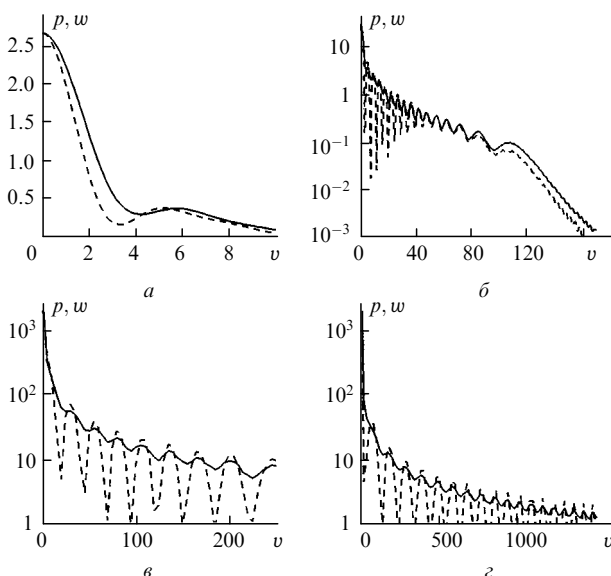


Рис.6. Зависимости  $w$  (сплошные кривые) и  $p$  (штриховые кривые) от  $v$  в поперечной плоскости  $u = C$  при  $\theta_m = 60^\circ$ ,  $C = 5$  (а), 50 (б), 500 (в) и 5000 (з).

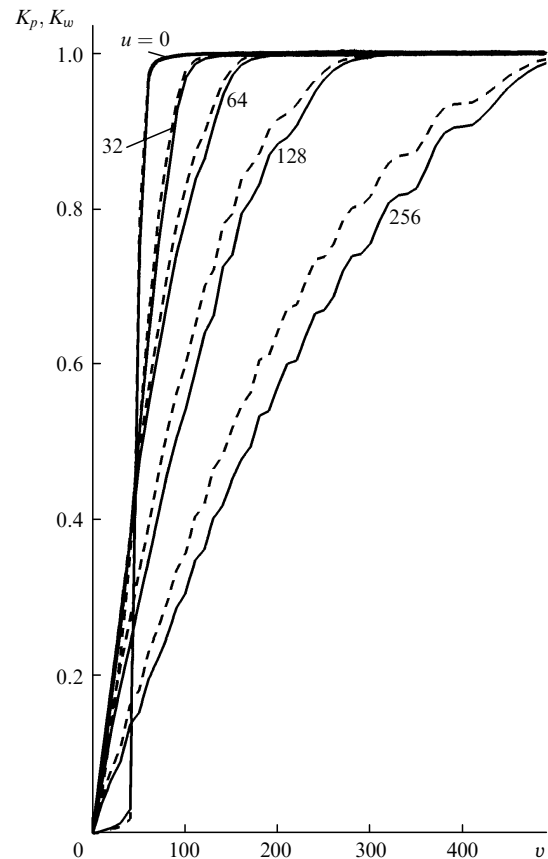


Рис.7. Зависимости  $K_w$  (сплошные кривые) и  $K_p$  (штриховые кривые) в разных поперечных плоскостях  $u = \text{const}$  от  $v$  при  $C = 50$  и  $\theta_m = 60^\circ$ .

Исследовались зависимости интегральных характеристик пучка  $K_{p,w}$  двух типов. Во-первых, это зависимости  $K_{p,w}$  от оптической координаты  $v$  как в геометрооптической фокальной плоскости, так и в других поперечных плоскостях ( $u = \text{const}$ ) на заданном расстоянии от точки геометрического фокуса (рис.7). Выяснилось, что при больших  $C$  в плоскостях  $u \lesssim C$  величины  $K_{p,w}$  достигают 0.5 при  $v \approx C$ . В более далеких плоскостях ( $u > C$ ) рост функций  $K_{p,w}$  тем меньше, чем больше  $u$ .

Во-вторых, рассчитывались и зависимости степени концентрации сфокусированного светового поля в определенной «световой трубке» с радиусом  $v$  вдоль оптической оси, т. е. зависимости  $K_{p,w}$  от  $u$  для фиксированных  $v$  (рис.8). Результаты показывают, что в центральной части пучка ( $v < C$ ), у которого в фокальной плоскости содержится меньше половины полной энергии пучка ( $K_{p,w} < 0.5$ ), самая высокая концентрация света достигается вне фокальной плоскости, примерно на расстоянии  $u \approx C$  от нее. При небольших  $C$  (но больших, чем 2.405) за этой точкой (при  $u > C$ ) степень концентрации света весьма быстро снижается (рис.8, а), т. е. дифракционное уширение пучка велико. Однако чем больше  $C$ , тем выше устойчивость пучка и тем медленнее его дифракционное уширение в области  $u > C$  (рис.8, б, з). В «световых трубках» с большими радиусами ( $v \gtrsim C$ ) самая высокая концентрация света (самые большие  $K_{p,w}$ ) достигается в геометрооптической фокальной плоскости, а за этой плоскостью  $K_{p,w}$  монотонно медленно уменьшаются. Таким образом, поведение интегральных параметров  $K_{p,w}$  пучка также показывает, что в области  $u > C$  сфокусированный бесселев пучок обладает дифракционными свойствами, похожими на соответствующие свойства высокоа-

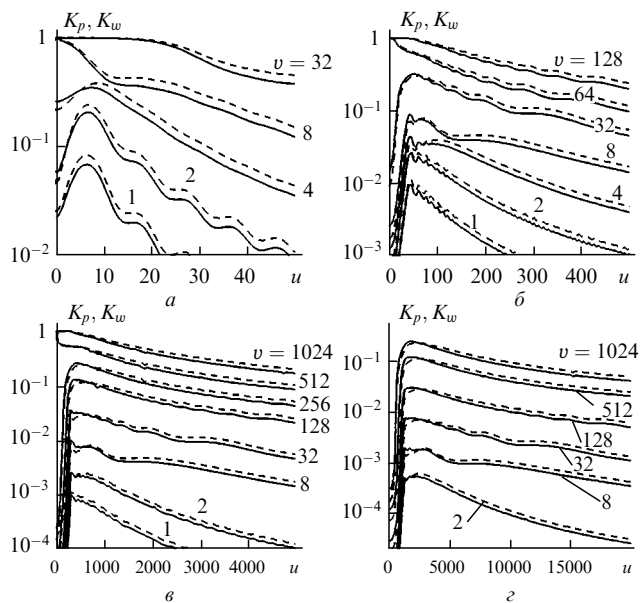


Рис.8. Зависимости  $K_w$  (сплошные кривые) и  $K_p$  (штриховые кривые) от  $u$  в «световых трубках» с разными оптическими координатами  $v$  при  $\theta_m = 60^\circ$ ,  $C = 5$  (а), 50 (б), 500 (в) и 2000 (г).

пертурных бesselевых пучков, рассмотренных в первой части данной работы. Заметим еще, что разность  $K_p$  и  $K_w$  в принципе несущественна, т. к. не превышает нескольких процентов.

В заключение сформулируем основные выводы.

1. Радиальные распределения плотности аксиального потока полной электромагнитной энергии и пространственной плотности электрической энергии у высокоапертурных пучков бesselева типа заметно отличаются от соответствующих поперечных распределений параксиальных пучков, которые хорошо аппроксимируются функцией  $J_0^2(r)$ . Основная особенность бesselевых пучков, состоящая в том, что лишь очень малая доля общей мощности пучка сконцентрирована в главном максимуме, четко характеризует и высокоапертурные пучки бesselева типа, хотя последние в целом значительно сильнее локализованы вокруг своей оси, чем параксиальные бesselевы пучки.

2. При сильной фокусировке бesselевых пучков плотность энергии в центре пучка начинает постепенно увеличиваться при удалении от геометрического фокуса и достигает своего максимума на определенном расстоянии

от этой точки, причем плотность энергии в максимуме (истинном фокусе) на несколько порядков выше, чем в точке геометрического фокуса. При дальнейшем удалении от истинного фокуса поле расходится и степень его локализации и плотность энергии в пучке снижаются, но весьма медленно, долго оставаясь высокими.

1. Волюнкина Е.А., Ибрагимов Э.А., Усманов Т. *Квантовая электроника*, **15**, 2405 (1988).
2. Hafizi B., Sprangle P. *J.Opt.Soc.Amer.A*, **8**, 705 (1991).
3. Shaarawi A.M., Ziolkowski R.W., Besieris I.M. *J.Math.Phys.*, **36**, 5565 (1995).
4. Киселев А.П., Перель М.В. *Оптика и спектроскопия*, **86**, 357 (1999).
5. Dyson J. *Proc.Roy.Soc.A*, **248**, 93 (1958).
6. Durnin J., Miceli J.J., Eberly J.H. *Phys.Rev.Letts*, **58**, 1499 (1987).
7. Пятахин М.В., Сучков А.Ф. *Препринт ФИАН №99* (М., 1988).
8. Ананьев Ю.А. *Оптика и спектроскопия*, **64**, 1211 (1988).
9. Indebetouw G. *J.Opt.Soc.Amer.A*, **6**, 150 (1989).
10. Валяев А.Б., Кривошлыков С.Г. *Квантовая электроника*, **16**, 1047 (1989).
11. Андреев Н.Е., Аристов Ю.А., Полонский Л.Я., Пятницкий Л.Н. *ЖЭТФ*, **100**, 1756 (1991).
12. LaPointe M.R. *Opt.Laser Technol.*, **24**, 315 (1992).
13. Pyatakhin M.V., Suchkov A.F. *Spatiotemporal characteristics of laser emission* (N.Y., Nova Science Publ., 1994).
14. Soroko L.M. *Meso-optics—foundations and applications* (Singapore, World Scientific, 1996).
15. Stannnes J.J. *Waves in focal regions* (Bristol, Boston, Adam Hilger, 1986).
16. Солимено С., Крозиньяни Б., Ди Порто П. *Дифракция и волновое распространение оптического излучения* (М., Мир, 1989).
17. Wolf E., Li Y. *Optics Comms*, **39**, 205 (1981).
18. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М., Наука, 1973).
19. Bachynski M.P., Bekefi G. *J.Opt.Soc.Amer.*, **47**, 428 (1957).
20. Lü B., Huang W., Zhang B., Kong F., Zhai Q. *Optics Comms*, **131**, 223 (1996).
21. Belanger P., Rioux M. *Appl.Optics*, **17**, 1080 (1978).

#### PV.Adamson. Focused Bessel beams.

The diffraction broadening of a focused beam with a Bessel amplitude distribution is examined. Calculations are reported not only of the traditional differential characteristics (radial distributions of the electric-energy densities and of the axial total electromagnetic energy flux in the beam), but also of integral quantities characterising the degree of transverse localisation of the radiation in a tube of specified radius within the beam. It is shown that in a large-aperture Bessel beam only a very small fraction of the total beam power is concentrated in its central core and that a focal point is also observed on intense focusing of the Bessel beam. This spot is not in the geometric-optical focal plane but is displaced from the latter by a certain distance.