

Распространение предельно коротких импульсов в нерезонансной квадратично-нелинейной среде в приближении однонаправленных волн

Е.В.Казанцева, А.И.Маймистов

Рассмотрено распространение и взаимодействие предельно коротких импульсов в нерезонансной квадратично-нелинейной среде. Аналитически найдено стационарное решение. Численно продемонстрировано, что импульсы с энергией, много меньшей энергии стационарного импульса, при распространении разрушаются под влиянием дисперсии, тогда как импульсы с энергией, большей, чем у стационарных, распадаются на ряд импульсов, движущихся как стационарные. Исследовано влияние аддитивной и мультипликативной амплитудной модуляции на распространение импульсов. Показано, что стационарные импульсы устойчивы к слабой модуляции и к столкновениям друг с другом.

Ключевые слова: предельно короткие импульсы света, квадратично-нелинейная среда.

Введение

В последнее десятилетие наблюдается активное освоение области фемтосекундных длительностей импульсов электромагнитного излучения [1–11]. Одним из методов достижения таких длительностей является сжатие исходного импульса с помощью волоконно-решеточных компрессоров [1–3]. Так, например, были получены импульсы длительностью 6 фс [2]. Другим способом формирования фемтосекундных импульсов является непосредственная их генерация в лазерных системах [4–8]. В [4] была осуществлена генерация импульсов длительностью 20 фс с энергией 1.5 мДж и частотой повторения 1кГц. Последующее их сжатие с помощью волоконно-призматического компрессора дало импульсы длительностью 5 фс с энергией 0.5 мДж. В работе [6] была продемонстрирована генерация Ti:сапфировым лазером импульсов длительностью 6.5 фс со средней мощностью 200 мВт и частотой повторения 86 МГц. Параметрическое взаимодействие волн, самофокусировка и автомодуляция, а также когерентные переходные процессы в поле фемтосекундных импульсов рассмотрены в работах [9–11].

Достижения в области генерации предельно коротких импульсов (ПКИ) излучения делают актуальным анализ их распространения в нелинейных диспергирующих средах в рамках различных моделей среды. Естественной основой всех теорий здесь являются уравнения Максвелла, дополненные или материальными уравнениями, которые определяют эволюцию поляризации или токов в среде, возникающих под действием излучения [12–17], или уравнением Шредингера для электронов, взаимодействующих с внешним электромагнитным полем [18, 19]. Поскольку редко удается получить точные аналитические результаты, широко используются различные приближе-

ния, позволяющие упростить задачу и найти аналитические выражения.

Среди многих моделей нелинейной среды, в которых исследовалось распространение ПКИ, упомянем кубически-нелинейную среду [20, 21], где для определения нелинейного отклика использовалась модель Дюффинга. Как отмечено в [22], для более точного описания дисперсии нелинейного показателя преломления необходимо использовать модель по меньшей мере двух связанных осцилляторов. В последующих работах взаимодействие ПКИ с диэлектрическими средами рассматривалось с помощью модели двух [23, 24] и трех [25] связанных осцилляторов. Необходимо отметить также работу [26], где была отмечена роль электронно-колебательного (рамановского) взаимодействия в формировании нелинейного отклика среды на действие ПКИ электромагнитного поля.

Таким образом, в рамках классической физики нелинейные свойства изотропного диэлектрика могут быть описаны моделью Дюффинга (или ангармонического осциллятора с кубическим ангармонизмом) для связанных электронов и моделью Плачека [27] (или моделью Бломбергера–Шена [28]), используемой для описания комбинационного рассеяния, как в [23–26]. Следующим шагом в обобщении этих моделей является учет векторного характера электромагнитного излучения и переход к модели ангармонического осциллятора с двумя степенями свободы [29–31].

В анизотропных нелинейных средах потенциальная энергия связанных электронов не является четной функцией смещения электрона из положения равновесия. Следовательно, модель Дюффинга должна быть заменена моделью ангармонического осциллятора с квадратичной нелинейностью (ее можно назвать квадратичной моделью Дюффинга). Такая модель была использована в [31, 32] для описания распространения ПКИ произвольно поляризованного излучения в квадратично-нелинейной среде с дисперсией или без нее. Как и в кубически-нелинейных средах, здесь можно ожидать обобщения чисто электронной модели путем включения в рассмотрение взаимодействия рамановского типа (подобно [23–28]) с

Московский государственный инженерно-физический институт (технический университет), Россия, 115409 Москва, Каширское ш., 31; эл. почта: maimistov@pico.mephi.ru

Поступила в редакцию 6 сентября 1999 г., после доработки – 27 февраля 2000 г.

учетом анизотропии среды и векторного характера электромагнитного поля.

Важное и в то же время простое приближение можно получить в предположении, что электромагнитные волны распространяются только в одном из возможных направлений [33]. Условие однонаправленности волн понижает порядок волнового уравнения, не внося при этом ограничений на длительность импульса, что было достаточно подробно показано в [12, 20, 33, 34]. Важно, что это приближение не опирается на представление о квазигармоническом характере этой волны. (Разумеется, существуют ситуации, когда это приближение заведомо неприменно, например волны в периодических или в рассеивающих средах.)

Настоящая работа посвящена распространению и взаимодействию предельно коротких импульсов линейно поляризованного электромагнитного излучения, имеющих одно или несколько колебаний напряженности электрического поля, в среде, которая характеризуется нелинейным откликом и дисперсией.

1. Основные уравнения модели

Распространение электромагнитной линейно поляризованной плоской волны в предположении, что вектор поляризации сохраняет свое направление, описывается скалярным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где P – поляризация среды. Задача упрощается, если рассматривать распространение ПКИ в приближении однонаправленной волны [12, 33, 34]. В этом случае вместо уравнения (1) используется более простое уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} = -\frac{2\pi}{c} \frac{\partial P}{\partial t}. \quad (2)$$

Чтобы вычислить поляризацию P , надо выбрать модель среды. Нами будет использована модель ангармонического осциллятора – квадратичная модель Дюффинга, которая рассматривалась при описании параметрических процессов в квадратично-нелинейных средах [35–37]. Считается, что электроны находятся в потенциальной яме и под действием внешнего поля совершают колебания около своего положения равновесия с частотой ω_0 . Если обозначить усредненное по ансамблю всех связанных электронов смещение из положения равновесия через X , то, следуя [37], уравнение движения можно записать как

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + \omega_0^2 X + \kappa_2 X^2 = \frac{e}{m_{\text{ef}}} E(z, t), \quad (3)$$

где κ_2 – константа ангармонизма; $m_{\text{ef}} = 3m/(\varepsilon + 2)$ – эффективная масса электрона. Затуханием колебаний здесь пренебрегаем, полагая длительность взаимодействия ПКИ с электронной системой много меньшей времени ее релаксации. Поляризация единицы объема среды определяется как $P = n_a e X$, где n_a – число атомов в единице объема.

Удобно перейти к новым безразмерным переменным $\zeta = x/L$, $\tau = \omega_0(t - z/c)$ и полям $\mathcal{E} = E/A_0$, $q = X/X_0$, используя нормировочные параметры

$$A_0 = \frac{m_{\text{ef}} \omega_0^4}{e |\kappa_2|}, \quad X_0 = \frac{\omega_0^2}{|\kappa_2|}, \quad L^{-1} = \frac{2\pi n_a e^2}{m_{\text{ef}} c \omega_0} = \frac{\omega_p^2}{2c \omega_0},$$

где $\omega_p = (4\pi n_a e^2 / m_{\text{ef}})^{1/2}$ – плазменная частота. В безразмерных переменных уравнения (1) и (2) принимают вид

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2} + q + q^2 = \mathcal{E}. \quad (4)$$

Переход от волнового уравнения (1) к приближенному уравнению (2) описан в ряде статей [12, 20, 33, 34]. Однако целесообразно еще раз обсудить условие применимости такого перехода. Введем характеристические переменные $T = t - z/c$ и $Z = t + z/c$. В случае $P = 0$ (или $P = \chi E$, где восприимчивость χ является константой) волновое уравнение (1) имеет решения в виде волн, бегущих либо вдоль характеристики $T = \text{const}$, либо вдоль $Z = \text{const}$ (или вдоль характеристик $T = t - z/c'$ и $Z = t + z/c'$, где c' – скорость света в среде без дисперсии с восприимчивостью χ). Такая картина нарушается, если P отличается от нуля (или среда диспергирующая и/или нелинейная). Сделаем формальную замену $P \rightarrow \varepsilon P$ и разложим E , V и P по степеням ε , считая этот параметр малым:

$$E = E^{(0)}(T) + \varepsilon E^{(1)}(T, Z) + \varepsilon^2 E^{(2)}(T, Z) + \dots, \quad (5)$$

$$P = P^{(0)}(T) + \varepsilon P^{(1)}(T, Z) + \varepsilon^2 P^{(2)}(T, Z) + \dots$$

Подставив эти разложения в волновое уравнение (1) и собрав слагаемые одного порядка малости по ε , легко увидеть, что уравнение (2) возникает в первом порядке по ε , т. е. приближение однонаправленных волн равносильно замене разложения (5) выражением

$$E(T, Z) = E^{(0)}(T) + \varepsilon E^{(1)}(T, Z). \quad (6)$$

Влияние поляризации среды приводит к изменению характеристики стационарной волны, но не исключает возможность распространения волн с меняющимся профилем, т. е. нестационарных волн. Здесь также не используется представление о волне как о квазигармонической – нет никаких ограничений на скорость изменения напряженности электрического поля $E(T, Z) = E(t, z)$. Критерием применимости приближения (6) является малость параметра ε (что есть мера слабости влияния поляризации). Чтобы в рассматриваемом случае явно найти такой параметр, можно поступить следующим образом. Как и в (4), перейдем к переменным $\xi = \omega_0 z/c$, $\vartheta = \omega_0 t$ и к полям \mathcal{E} и q . Тогда система уравнений (1) и (3) примет вид

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \vartheta^2} = \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta^2}, \quad \frac{\partial^2 q}{\partial \vartheta^2} + q + q^2 = \mathcal{E}. \quad (7)$$

Теперь видно, что параметром, определяющим меру влияния поляризации на распространение волн, служит отношение $(\omega_p/\omega_0)^2$. Таким образом, параметр ε в (5) можно определить как $2\varepsilon = (\omega_p/\omega_0)^2$. Проведя процедуру редукции (5) к (6) и возвратившись к исходным размерным переменным, получим систему уравнений (2) и (3). Следовательно, условием применимости приближения однонаправленных волн является требование $(\omega_p/\omega_0)^2 \ll 1$. Далее будем считать, что это условие выполнено, и исследуем решения системы уравнений (4).

2. Стационарная уединенная волна

Как простой пример решения этой системы можно рассмотреть решение, которое описывает распространение уединенной стационарной волны. Пусть \mathcal{E} и q зависят только от переменной $\eta = \tau - \zeta/\alpha = \omega_0(t - z/V)$, где V – скорость распространения стационарного электромагнитного импульса, и

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{c} \left[1 + \frac{1}{2\alpha} \left(\frac{\omega_p}{\omega_0} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Видно, что α нумерует члены семейства стационарных решений уравнений (4). Эту систему уравнений можно решить, если учесть, что из ее первого уравнения следует соотношение

$$\mathcal{E} = \alpha q. \quad (9)$$

Второе уравнение из (4) принимает вид

$$\frac{d^2 q}{d\eta^2} + (1 - \alpha)q + q^2 = 0. \quad (10)$$

Решения этого уравнения, которые удовлетворяют крайним условиям

$$q \rightarrow 0, \quad \frac{dq}{d\eta} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \pm\infty, \quad (11)$$

возможны только при $\alpha > 1$. Таковым решением является следующее:

$$q = \frac{3}{2}(\alpha - 1)\text{sech}^2 \left[\frac{1}{2}(\alpha - 1)^{1/2} \eta \right]. \quad (12)$$

Используя (9), получаем

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}\alpha(\alpha - 1)\text{sech}^2 \left[\frac{1}{2}(\alpha - 1)^{1/2} \eta \right]. \quad (13)$$

Для сравнения можно найти аналогичное стационарное решение системы (1) и (3), не прибегая к приближению однонаправленных волн. Это точное решение находится тем же способом, что и (12) или (13). Положив, что \mathcal{E} и q зависят только от переменной $\eta = \omega_0(t - z/V)$, можно переписать уравнение (1) в виде обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Проинтегрировав это уравнение дважды с учетом крайних условий (11), получим

$$\mathcal{E}(\eta) = \tilde{\alpha}q(\eta), \quad (14)$$

где $\tilde{\alpha} = V^2(\omega_p/\omega_0)^2(c^2 - V^2)^{-1}$. Это соотношение аналогично (9). Следовательно, окончательное решение системы уравнений (1) и (3) определяет стационарный импульс электромагнитного поля

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2}\tilde{\alpha}(\tilde{\alpha} - 1)\text{sech}^2 \left[\frac{1}{2}(\tilde{\alpha} - 1)^{1/2} \eta \right], \quad (15)$$

которое отличается от (13) только определением параметра α . Более общие решения аналитически найти не удалось. Дальнейшее исследование распространения и взаимодействия волн в квадратично-нелинейной среде в рамках рассматриваемой модели и в приближении однонаправленных волн проводилось численным методом.

3. Численное исследование распространения импульсов электромагнитного излучения

Для исследования решений системы (4) численным методом запишем ее в следующей форме:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \zeta} = -p, \quad (16.1)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial \tau} = \mathcal{E} - q - q^2. \quad (16.2)$$

Поскольку уравнение (16.1) содержит производную только по координате ζ , а уравнение (16.2) – только по τ , можно использовать любые методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, применяя их по очереди то к (16.1), то к (16.2). Здесь был использован метод прогноза-коррекции для решения (16.2) на всей оси τ и метод Рунге–Кутты четвертого порядка для интегрирования (16.1) на один шаг по оси ζ .

В качестве начальных и краевых условий выбраны следующие:

$$\mathcal{E}(\zeta = 0, \tau) = \mathcal{E}_0(\tau), \quad \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} q(\zeta, \tau) = \lim_{|\tau| \rightarrow \infty} p(\zeta, \tau) = 0.$$

С учетом этих краевых условий можно найти два интеграла:

$$I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}(\zeta, \tau) d\tau, \quad I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{E}^2(\zeta, \tau) d\tau.$$

При выборе в качестве начального условия для \mathcal{E} стационарного решения (13), которое характеризуется параметром $\alpha = 5$, т. е. $\mathcal{E}_0(\tau) = 30\text{sech}^2(\tau)$, было продемонстрировано, что такой импульс распространяется без искажений до значения координаты $\zeta = 130$, чего и следовало ожидать. Это также может служить тестом программы численного решения системы уравнений (16).

Решения системы (16) для начальных импульсов малой амплитуды демонстрируют дисперсионное распыление исходного импульса, сопровождаемое образованием гармонических волн. Если на вход среды поступает импульс с энергией, превышающей энергию стационарного импульса, то по мере распространения в среде происходит его распад на ряд импульсов, каждый из которых, подобно стационарным импульсам, движется со своей собственной скоростью.

Для вполне интегрируемых эволюционных нелинейных уравнений характерно упругое взаимодействие стационарных уединенных волн, которые являются в этом случае солитонами. Рассматриваемая система (16) не принадлежит, видимо, к классу вполне интегрируемых. Тем не менее столкновение двух стационарных импульсов, имеющих различные скорости распространения, показало их значительную устойчивость к столкновениям. Было рассмотрено также столкновение двух импульсов, которые образовались при распаде импульса с начальным профилем поля $\mathcal{E}_0(\tau) = 30\text{sech}^2(\tau/2)$. После столкновения возникла пара уединенных волн с изменившимися скоростями распространения, но сохранивших свои амплитуды и длительности в пределах точности расчетов.

Большой интерес представляет устойчивость нелинейных волн по отношению к непрерывным возмущениям, например к регулярной модуляции огибающей. Известно, что солитоны с такой модуляцией могут снова превратиться в импульсы с гладкой огибающей.

Однако при достаточно глубокой модуляции солитон может разрушиться, превратившись в расплывающиеся волновые пакеты.

Мы рассмотрели два типа модуляции амплитуды гармонической волной – аддитивную и мультипликативную. В первом случае было найдено, что стационарный импульс распространяется на фоне непрерывной гармонической волны, сохраняя свою форму. Из-за дисперсии и нелинейности среды гармоническая волна распадается на волновые пакеты малых амплитуд, расплывающиеся по мере распространения. Более мощный стационарный импульс остается немодулированным и распространяется отдельно от гармонических слабых волновых пакетов. Анализ эволюции фурье-спектра модулированного стационарного импульса показывает, что низкочастотная часть спектра, отвечающая гладкому стационарному импульсу, меняется чрезвычайно мало. Пик в спектре на частоте аддитивной гармонической волны несколько уширяется и постепенно уменьшается с увеличением расстояния, пройденного в среде. На рис. 1 представлен пример эволюции модулированного импульса и его спектра для следующего начального профиля:

$$\mathcal{E}_0(\tau) = 30\text{sech}^2(\tau + 5) + \sin(5\tau).$$

Ранее было найдено, что импульс с энергией, в два раза большей, чем у стационарного, распадается на два импульса, ведущих себя подобно стационарным. Оказалось, что аддитивная модуляция гармонической волной не препятствует процессу распада. Следует отметить, что эволюция спектра модулированного мощного импульса более сложная. Помимо отдельного пика, отвечающего гармонической волне, низкочастотная часть спектра при-

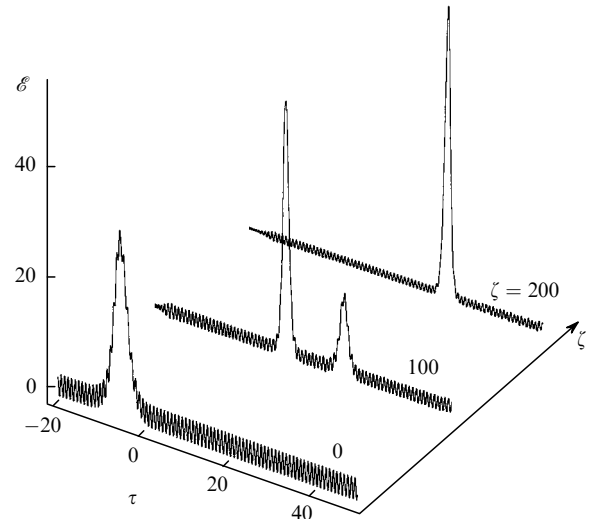


Рис.2. Распад импульса с энергией, превышающей энергию стационарного, на отдельные импульсы.

обретает модуляцию. Эта модуляция вызвана интерференцией фурье-образов $F_{1,2}(\omega t_{1,2})$ двух образовавшихся при распаде мощного исходного импульса сигналов с длительностями t_1 и t_2 , распространяющихся со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Фурье-образ суммы этих импульсов имеет вид

$$F(\omega, \zeta) = t_1 F_1(\omega t_1) \exp(i\omega\zeta/v_1) + t_2 F_2(\omega t_2) \exp(i\omega\zeta/v_2).$$

Спектр мощности пропорционален $|F(\omega)|^2$, из чего следует появление интерференционного слагаемого, про-

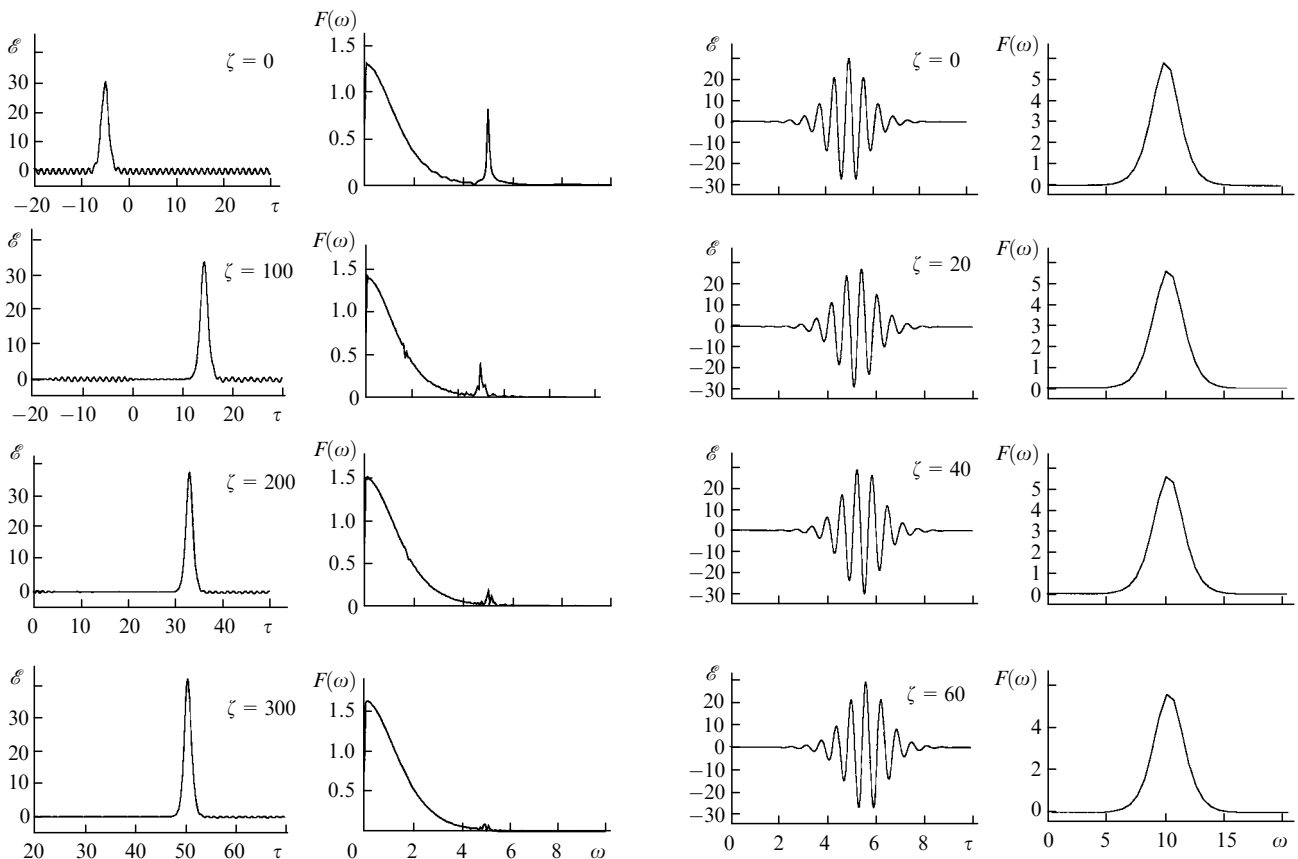


Рис.1. Эволюция стационарного импульса и его спектра при аддитивной модуляции амплитуды импульса гармонической волной.

Рис.3. Стабильность формы огибающей и спектра импульса с начальным профилем $\mathcal{E}_0(\tau) = 30\text{sech}^2(\tau - 5) \cos(10\tau)$.

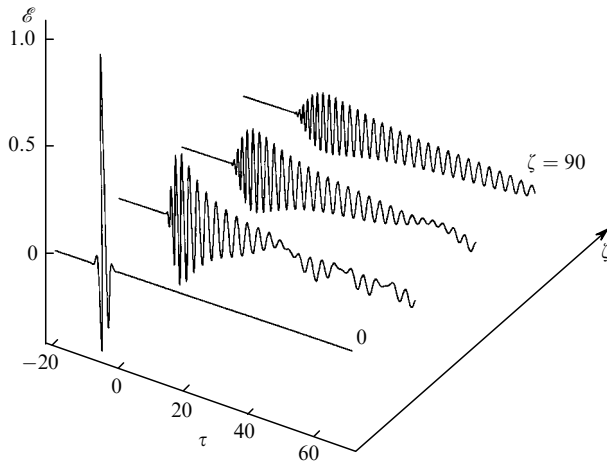


Рис.4. Распад слабого импульса, модулированного гармонической волной.

порционального $\cos[\omega(v_1^{-1} - v_2^{-1})\zeta]$. На рис.2 показан распад импульса при аддитивной модуляции с начальным профилем

$$\mathcal{E}_0(\tau) = 30\text{sech}^2((\tau + 5)/2) + 2 \cos(15\tau).$$

Случай мультипликативной модуляции стационарного импульса рассматривался на примере решения системы уравнений (16) с начальным профилем вида

$$\mathcal{E}_0(\tau) = 30\text{sech}^2\tau \cos(\Omega\tau),$$

где Ω – нормированная частота модуляции, значения которой выбирались в интервале 10–30. Было найдено, что такой начальный импульс ведет себя подобно стационарному, но не освобождается от модуляции. Его спектр локализован около частоты модуляции, как и в случае квазигармонического сигнала (рис.3).

На рис.4 показана эволюция слабого сигнала, модулированного гармонической волной, с начальным профилем

$$\mathcal{E}_0(\tau) = 30\text{sech}^2(\tau) \sin(2.5\tau - 5).$$

По мере распространения модулированный слабый импульс испытывает дисперсионное расплывание (как и немодулированный сигнал с энергией, меньшей, чем у стационарного импульса) и превращается в квазигармоническую уединенную волну с медленно меняющейся огибающей.

4. Обсуждение результатов

Итак, нами была рассмотрена наиболее простая модель нелинейной среды, которая уже использовалась для определения отклика квадратично-нелинейной среды [37, 38] (см. также [31, 35, 36]). В рамках этой модели в [38, 39] определена некоторая величина, называемая индексом Миллера, которая позволяет выразить нелинейные восприимчивости через линейные. Для ряда веществ (KDP, CdS, Te, GaAs и др.) индекс Миллера меняется в пределах порядка величины [39], и его среднее значение может быть вычислено на основе модели ангармонического осциллятора (2) при определенном выборе константы ангармонизма (в [35] указано, что $\kappa_2 \approx -1.64 \cdot 10^{41} \text{ м}^{-1}\text{с}^{-2}$).

Это оправдывает выбор рассмотренной здесь модели для описания эволюции электромагнитных импульсов в средах, где основной вклад в нелинейный отклик формируется за счет электронов. Естественным обобщением модели должно быть включение в анализ электронно-колебательного взаимодействия [23, 26], как и учет эволюции вектора поляризации электромагнитной волны [31].

Использованное здесь приближение однонаправленных волн сильно упрощает задачу с точки зрения численного решения системы уравнений распространения импульсов, но в то же время накладывает ограничения на область применимости результатов. Критерий однонаправленности волн, обсуждаемый во Введении, выполняется (как уже указывалось в [33, 34]) в средах с низкой плотностью. Таким образом, полученные результаты неприменимы для диэлектриков или полупроводников. В роли подходящих сред могут выступать примеси в диэлектрической матрице, молекулярный слой на поверхности диэлектрика или система микрокристаллитов (квантовых точек) при условии их малой пространственной плотности. Анизотропия, необходимая для квадратичной нелинейности такой газоподобной среды, может быть обусловлена либо внешним полем (электрическим, магнитным) либо подложкой, если рассматривать поверхностные электромагнитные волны. Квазиодномерные диэлектрики или полупроводники (например, полиацетилен), содержащие примеси с малой концентрацией, могут служить средами, в которых выполняется условие однонаправленности волн.

Изучение простой модели распространения короткого импульса излучения в квадратичной среде в приближении однонаправленных волн показало, что здесь существует однопараметрическое семейство стационарных уединенных волн, соответствующих ПКИ. Численное моделирование распространения показало, что столкновение двух стационарных импульсов не приводит к их разрушению. Было найдено, что более мощные импульсы (отличные от стационарных) распадаются на ряд отдельных, движущихся со своей скоростью импульсов, которые сохраняют свою индивидуальность в пределах того расстояния, на котором было проведено численное интегрирование уравнений системы (16).

Столкновение двух импульсов, как стационарных, так и образовавшихся в результате распада одного мощного импульса, сопровождается сдвигом фаз каждого из столкнувшихся импульсов. Суммарный фазовый сдвиг не является интегралом движения, как это было бы в случае истинных солитонов. Более того, скорость распространения импульсов после взаимодействия изменяется, хотя и очень незначительно. Таким образом, найденные здесь стационарные импульсы не являются солитонами в строгом смысле, хотя и проявляют довольно высокую стабильность. Можно сказать, что здесь получен еще один пример так называемых сильных солитонов (robust solitons), обсуждаемых в [40].

Такого поведения уединенных волн в квадратично-нелинейной среде в рассматриваемой здесь модели можно ожидать, если принять во внимание следующие обстоятельства. Из (4) следует, что существует «потенциал» $\phi(\zeta, \tau)$, такой, что

$$\mathcal{E}(\zeta, \tau) = \frac{\partial \phi}{\partial \tau}, \quad q(\zeta, \tau) = -\frac{\partial \phi}{\partial \zeta}. \quad (17)$$

Подстановка этих выражение во второе уравнение (4) дает

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \pm \left(\frac{\partial \phi}{\partial \zeta} \right)^2 + \frac{\partial^3 \phi}{\partial \tau^2 \partial \zeta} = 0. \quad (18)$$

Из (17) и (18) следует уравнение для нормированной координаты ангармонического осциллятора:

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \zeta} \pm 2q \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 q}{\partial \tau^2 \partial \zeta} = 0. \quad (19)$$

Это уравнение похоже на известное уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ) [41]

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \zeta} \pm 6q \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \frac{\partial^3 q}{\partial \zeta^3} = 0, \quad (20)$$

но отличается от него последним слагаемым и, как следствие этого, линейным законом дисперсии. Стационарное решение системы уравнений (16) совпадает по виду с солитонным решением уравнения КдФ, а интегралы движения I_0 и I_1 совпадают с его первыми двумя интегралами. Таким образом, можно ожидать, что решения системы (16) близки к истинным солитонам, а уравнение (19) составляет основу для развития теории возмущений, которая даст возможность приближенно описать эволюцию ПКИ в нелинейных средах рассмотренного здесь типа. Однако следует иметь в виду, что эволюция происходит по переменной ζ , в отличие от случая регуляризованного уравнения длинных волн [42–44]

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{\partial q}{\partial \zeta} + 2q \frac{\partial q}{\partial \zeta} - \frac{\partial^3 q}{\partial \tau^2 \partial \zeta} = 0 \quad (21)$$

и случая уравнения КдФ (20), где роль ζ играет переменная τ .

Выражаем благодарность С.О.Елютину, Б.А. Маломеду и С.А.Козлову за весьма полезные советы и замечания, сделанные при обсуждении полученных результатов. Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного INTAS (грант No 96-0339).

1. Tai K., Tomita A. *Appl.Phys.Letts*, **48**, 1033 (1986).
2. Fork R.L., Brito Cruz C.H., Becker P.C., Shank Ch.V. *Optics Letts*, **12**, 483 (1987).
3. Tamura K., Nakazawa M. *Optics Letts*, **21**, 68 (1996).
4. Sartania S., Cheng Z., Lenzner M., Tempea G., Spielmann C., Krausz F., Ferencz K. *Optics Letts*, **22**, 1562 (1997).
5. Yamakawa K., Aoyama M., Matsuoka S., Takuma H., Barty C.P.J., Fittinghoff D. *Optics Letts*, **23**, 525 (1998).
6. Jung I.D., Kartner F.X., Matuschek N., Sutter D.H., Moriergenoud F., Zhang G., Keller U., Scheuer V., Tilsch M., Tschudi T. *Optics Letts*, **22**, 1009 (1997).
7. Backus S., Durfee C.G., Mourou G., Kapteyn H.C., Murnane M.M. *Optics Letts*, **22**, 1256 (1997).
8. Duhr O., Nibbering E.T.J., Korn G., Tempea G., Krausz F. *Optics Letts*, **24**, 34 (1999).
9. Kobayashi Y., Sekikawa T., Nabekawa Y., Watanabe S. *Optics Letts*, **23**, 64 (1998).
10. Kaplan A. E. Shkolnikov P. L. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **13**, 347 (1992).
11. Shvartsburg A.B., Stenflo L., Shukla A.B. *Phys.Rev.E*, **56**, 7315 (1997).

12. Bullough R.K., Jack P.M., Kitchenside P.W., Saunders R. *Phys.Scr.*, **20**, 364 (1979).
13. Akimoto K. *J.Phys.Soc.Jpn*, **65**, 2020 (1996).
14. Andreev A.V. *Phys.Letts A*, **179**, 23 (1993).
15. Kaplan E. *Phys.Rev.Letts*, **73**, 1243 (1994).
16. Kaplan E., Shkolnikov P. L. *Phys.Rev.Letts*, **75**, 2316 (1995).
17. Genkin G.M. *Phys.Rev.A*, **58**, 758 (1998).
18. Vanin E.V., Kim A.V., Sergeev A.M., Downer M.S. *Письма в ЖЭТФ*, **58**, 964 (1993).
19. Sergeev A.M., Gildenburg V.B., Kim A.V., Lontano M., Quiroga-Teixeiro M. *Proc.I Intern.Conf.Superstrong Fields in Plasmas (Varenna, Italy, August–September 1997)* (Woodburg, New York, 1997, p. 15).
20. Maimistov A.I., Elyutin S.O. *J.Mod.Optics*, **39**, 2201 (1992).
21. Kaplan A. E., Straub S.F., Shkolnikov P. L. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **14**, 3013 (1997).
22. Козлов С.А. *Оптика и спектроскопия*, **79**, 290 (1995).
23. Kozlov S.A., Bespalov V.G., Oukrainski A.O., Sazonov S.V., Shpolyanskiy Yu.A. *Proc.SPIE*, **3735**, 43 (1999); Kozlov S.A., Bespalov V.G., Krylov V.N., Oukrainski A.O., Shpolyanskiy Yu.A. *Proc. SPIE*, **3609**, 276 (1999).
24. Серкин В.Н., Шмидт Э.М., Беляева Т.Л., Марти-Панамено Э., Салазар Х. *Квантовая электроника*, **24**, 923 (1997).
25. Козлов С.А., Сазонов С.В. *ЖЭТФ*, **111**, 404 (1997).
26. Беленов Э.М., Крюков П.Г., Назаркин А.В., Прокопович И.П. *ЖЭТФ*, **105**, 28 (1994).
27. Placzek G. *Marx handbuch der radiologie* (ed. E.Marx) (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, v.6, p.205).
28. Bloembergen N., Shen Y.R. *Phys.Rev.Letts*, **12**, 504 (1964).
29. Козлов С.А. *Оптика и спектроскопия*, **84**, 979 (1998).
30. Маймистов А.И. *Оптика и спектроскопия*, **87**, 104 (1999).
31. Дубровская О.Б., Сухоруков А.П. *Изв.РАН.Сер.физич.*, **56**, 184 (1992).
32. Акопян А.А., Оганесян Д.Л. *Квантовая электроника*, **25**, 954 (1998).
33. Eilbeck J.L., Caudrey P.J., Bullough R.K. *J.Phys.A*, **5**, 820 (1972).
34. Eilbeck J.L., Gibbon J.D., Caudrey P.J., Bullough R.K. *J.Phys.A*, **6**, 1337 (1973).
35. Ярив А. *Квантовая электроника и нелинейная оптика* (М., Сов. радио, 1973, с.317).
36. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. *Физическая оптика* (М., изд-во МГУ, 1998, с.572–578).
37. Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М., Мир, 1966).
38. Garrett C.G.B., Robinson F.N.H. *IEEE J.Quantum.Electron.*, **2**, 328 (1966).
39. Miller R.C. *Appl.Phys.Letts*, **1**, 171 (1964).
40. Enns R.H., Rangnekar S.S., Kaplan A.E. *Phys.Rev.A*, **35**, 466 (1987); *Phys.Rev.A*, **36**, 1270 (1987).
41. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов: метод обратной задачи* (М., Наука, 1980).
42. Benjamin T.B., Bona I.L., Mahony J.J. *Phil.Trans.Roy.Soc.A*, **272**, 47 (1972).
43. Joseph R.I., Egri R. *Phys.Letts A*, **61**, 429 (1977).
44. Courtney L., Tjon J.A. *Phys.Letts A*, **73**, 275 (1979).

EV.Kazantseva, A.I.Maimistov. Propagation of extremely short pulses through a nonresonance quadratically nonlinear medium in the unidirectional wave approximation.

The propagation and the interaction of extremely short pulses in a nonresonance quadratically nonlinear medium is considered. A stationary solution was found analytically. It was demonstrated numerically that pulses with an energy much lower than the energy of a stationary pulse collapse under the influence of dispersion during propagation, whereas pulses with an energy higher than the energy of a stationary pulse disintegrate into a series of pulses moving like stationary ones. The effect of additive and multiplicative amplitude modulation on the pulse propagation was investigated. Stationary pulses were shown to be immune to weak modulation and to collisions with each other.