

# Структурный хаос в обратимом спонтанном излучении движущихся атомов

С.В.Пранц, В.И.Юсупов

*Аналитически и численно доказано, что при определенных условиях обратимое спонтанное излучение двухуровневых атомов, движущихся сквозь высокочастотный одномодовый резонатор, при смешанном квантово-классическом описании может быть хаотическим в смысле экспоненциальной чувствительности по отношению к начальным условиям. С помощью вейвлет-анализа сигнала вакуумных осцилляций Раби показано, что этот хаос является структурным. Из численных оценок следует, что перспективным устройством для обнаружения проявлений динамического хаоса в обратимом спонтанном излучении является лазер на ридберговских атомах в сверхпроводящем СВЧ резонаторе, работающий в режиме сильной связи.*

**Ключевые слова:** обратимое спонтанное излучение, динамический хаос, вакуумные осцилляции Раби.

## Введение

Спонтанное излучение возбужденных атомов по-разному протекает в свободном пространстве и в электромагнитном резонаторе. Континуум полевых мод вакуума свободного пространства является причиной необратимости спонтанного излучения, что проявляется в экспоненциальном законе убывания вероятности обнаружения атома в возбужденном состоянии с показателем экспоненты, содержащим коэффициент Эйнштейна  $A$  [1]. Изменение плотности полевых мод в резонаторе или вблизи поверхностей приводит к изменению скорости и спектра спонтанного излучения, а также радиационного сдвига атомных уровней по сравнению с этими характеристиками в свободном пространстве.

Э.М.Парселл, по-видимому, впервые обратил на это внимание в небольшой заметке, опубликованной в 1946 г. [2]. С тех пор для атомов различных типов и в разных частотных диапазонах неоднократно регистрировалось как увеличение скорости спонтанного излучения в резонансных полостях (см., напр., [3–5]), так и его подавление в нерезонансных полостях (см., напр., [6]).

Однако в резонаторах с относительно низкой добротностью качественный характер спонтанного излучения не изменяется – как и в свободном пространстве, оно необратимо. Усилиями многих экспериментаторов добротности  $Q$  резонаторов, в частности микрорезонаторов, удалось поднять до  $\sim 10^9$  и больше. Для таких добротностей константа взаимодействия атома с вакуумным полем (одноатомная вакуумная частота Раби  $\Omega_0$ ) превышает спектральную ширину мод полости  $\omega_c/Q$ , где  $\omega_c$  – частота доминирующей моды. При  $\Omega_0 \gg \omega_c/Q$  (так называемый предел сильной связи в резонаторной электродинамике) спектр поля в полости имеет ярко выраженную особенность вблизи частоты атомного перехода и

возможен периодический обмен энергией между атомом и полем, т. е. спонтанное излучение становится обратимым.

Это явление, называемое также вакуумными осцилляциями Раби, наблюдалось на СВЧ переходах ридберговских атомов в металлическом резонаторе сантиметрового размера [7], в оптических резонаторах [8], на экситонных переходах в полупроводниковых микрорезонаторах [9]. Подобные эксперименты открывают заманчивые перспективы для управления спонтанным излучением и для создания беспороговых микролазеров на экситонных поляритонах в полупроводниковых микрорезонаторах с квантовыми ямами. Краткий обзор теоретических и экспериментальных работ по спонтанному испусканию покоящихся атомов в резонаторах дан в работе [10].

Настоящая работа посвящена теории обратимого спонтанного излучения двухуровневых атомов, движущихся сквозь идеальный резонатор с вакуумным полем, и в ней доказывается, что при смешанном квантово-классическом описании вакуумные осцилляции Раби могут быть хаотическими даже в одномодовом резонаторе. Это означает, что при определенных условиях ансамбль движущихся двухуровневых атомов, коррелированно и когерентно (в отсутствие каких-либо внешних источников энергии и источников, нарушающих когерентность) взаимодействуя с единственной модой резонатора, хаотически (в смысле экспоненциальной чувствительности обратимого спонтанного излучения к изменению начальных условий) излучает и поглощает свет.

Спектр такого сигнала существенно нестационарен из-за сосуществования по крайней мере трех временных масштабов: модуляции вакуумной частоты Раби, вызванной пространственной неоднородностью резонаторной моды, обмена возбуждением атомов с резонатором и расстройки резонанса атомов с модой. Типичный хаотический сигнал обратимого спонтанного излучения состоит из близких по времени короткоживущих высокочастотных компонент и близких по частоте низкочастотных компонент. Для выявления структуры этого хаоса

Тихоокеанский океанологический институт ДВО РАН, Россия, 690041 Владивосток, Балтийская ул., 43; эл.почта: prants@mail.ru

Поступила в редакцию 2 ноября 1999 г.

мы используем вейвлет-анализ, являющийся многомасштабным методом, обеспечивающим хорошее разрешение и по частоте и по времени.

Следует отметить, что динамический хаос – проблема, имеющая свою историю в квантовой электронике. Еще в 1964 г. в работе [11] было обнаружено непериодическое поведение в модели квантового генератора. Позже была доказана [12] эквивалентность полуклассических уравнений одномодового двухуровневого лазера и гидродинамической системы Лоренца – классической модели странного аттрактора. Имеется обширная литература по вопросам неустойчивости и динамического хаоса в лазерах (см. обзоры [13, 14]). Что касается квантовых генераторов с движущимися частицами, то в работе [15] в рамках двухуровневой модели была исследована нелинейная динамика одномодового пучкового лазера, поле излучения которого считается однородным вдоль направления движения молекул. Численно были обнаружены области бистабильности, мультистабильности и хаотических пульсаций.

В подавляющем большинстве работ по этой тематике речь идет о генерации стимулированного излучения в присутствии релаксации, т. е. об открытых диссипативных системах с уменьшением фазового объема. Подчеркнем, что в настоящей работе физическая постановка задачи подразумевает когерентное спонтанное излучение возбужденных атомов, движущихся в идеальном резонаторе, без какой-либо внешней подкачки энергии. Соответствующая система классических уравнений движения является гамильтоновой (сохраняющей фазовый объем) и неавтономной (из-за учета пространственной структуры резонаторной моды).

## 1. Теория обратимого спонтанного излучения двухуровневых атомов, движущихся сквозь идеальный резонатор

Рассмотрим одномодовый резонатор с очень высокой добротностью. Ограничимся одномерным случаем и предположим, что изменение напряженности электрического поля стоячей волны вдоль оси  $x$  описывается некоторой пространственной функцией  $f(x)$ . Моноэнергетическое облако  $N$  двухуровневых атомов или молекул, непосредственно не взаимодействующих друг с другом, запускается в резонатор со скоростью  $v$  и движется вдоль этой оси. Пространственная неоднородность стоячей волны модулирует энергию взаимодействия атомов с выделенной модой резонатора, т. е. вакуумная частота Раби становится явной функцией времени:

$$\Omega_0 f(x) \rightarrow \Omega_0 f(vt) \equiv \Omega_0(t).$$

Простейшим гамильтонианом, описывающим такую ситуацию, является нестационарный оператор [16]

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_a \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_z^j + \hbar \omega_c (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) + \hbar \Omega_0(t) \sum_{j=1}^N (\hat{a} \hat{\sigma}_+^j + \hat{a}^\dagger \hat{\sigma}_-^j), \quad (1)$$

где  $\omega_a$  и  $\omega_c$  – частоты атомного перехода и моды;  $\hat{\sigma}_{z,\pm}$  – операторы Паули;  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  – операторы рождения и уничтожения фотонов в избранной моде соответственно. Ис-

пользованные, помимо упомянутых выше, приближения вращающейся волны, Рамана – Ната и малого диаметра атомного облака (по сравнению с длиной стоячей волны) позволяют избежать ненужных ввиду нашей главной цели усложнений и выявить природу возникновения слабого хаоса в столь простой модели взаимодействия атомов с собственным полем излучения в отсутствие какой-либо внешней накачки. Интенсивность излучения атомов рассчитывается по формуле [17]

$$I(t) = I_1 \left\langle \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_+^i \hat{\sigma}_-^j \right\rangle = I_1 \frac{N}{2} [z(t) + 1] + I_1 N^2 r(t), \quad (2)$$

где  $I_1$  – интенсивность излучения изолированного атома. Первый член здесь описывает обычное спонтанное излучение, интенсивность которого пропорциональна числу атомов  $N$  и плотности инверсии населенности атомов  $z$ . Второй член описывает кооперативное спонтанное излучение с интенсивностью, пропорциональной квадрату числа атомов и ожидаемому собственному значению оператора квантовых корреляций атомов друг с другом  $r$ .

В рамках гамильтоновского подхода, справедливого в режиме сильной связи, динамические уравнения находятся из уравнений Гейзенберга с помощью соответствующего усреднения операторов по выбранному начальному квантовому состоянию атомов и моды. Известно, что простое полуклассическое усреднение, при котором расщепляются все произведения операторов, вообще не описывает спонтанное излучение полностью возбужденных атомов, т. к. комбинированное состояние атомов с нулевым средним дипольным моментом и вакуумного состояния поля в резонаторе является стационарным состоянием соответствующей полуклассической системы уравнений (см., напр., [18]).

Для инициирования спонтанного излучения в полуклассических моделях требуются стартовые флуктуации дипольного момента и/или поля. Известно также [19], что усреднение можно провести с сохранением атомных квантовых корреляций, осуществляемых посредством общего поля излучения (при этом атомы предполагаются не взаимодействующими друг с другом непосредственно!). В этом случае для описания когерентного спонтанного излучения не требуется ad hoc флуктуаций. Самосогласованная динамическая система уравнений для квантовых корреляторов второго порядка той же размерности, что и полуклассическая, но описывающая обратимое спонтанное излучение движущихся атомов (см. Приложение) имеет вид [20]

$$\begin{aligned} \dot{n} &= -\Omega_N(\tau)v, \quad \dot{z} = 2\Omega_N(\tau)v, \quad \dot{u} = (\omega - 1)v, \\ \dot{r} &= -\Omega_N(\tau)zv, \quad \dot{v} = (1 - \omega)u - \Omega_N(\tau) \left( \frac{z+1}{N} + 2r + 2nz \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $z, r, n, u, v$  – квантовые средние оператора инверсии  $\hat{z} = N^{-1} \sum_j \hat{\sigma}_z^j$  и следующих билинейных операторов:

$$\begin{aligned} \hat{r} &= N^{-2} \sum_{i \neq j} \hat{\sigma}_+^i \hat{\sigma}_-^j, \quad \hat{n} = N^{-1} \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad \hat{u} = N^{-3/2} \left( \hat{a} \sum_j \hat{\sigma}_+^j + \hat{a}^\dagger \sum_j \hat{\sigma}_-^j \right), \\ \hat{v} &= iN^{-3/2} \left( \hat{a}^\dagger \sum_j \hat{\sigma}_-^j - \hat{a} \sum_j \hat{\sigma}_+^j \right). \end{aligned}$$

Средние взяты по факторизованному начальному квантовому состоянию атомов и полевой моды

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_N(0)\rangle_a |0\rangle_c. \quad (4)$$

В системе (3) производные берутся по безразмерному времени  $\tau = \omega_a t$ , а безразмерными управляющими параметрами являются коллективная вакуумная частота Раби  $\Omega_N(\tau) = \Omega_0(\tau)\sqrt{N}/\omega_a$  и нормированная расстройка  $\omega = \omega_c/\omega_a$ . Унитарность атомной эволюции и сохранение полной энергии атомно-полевой системы в условиях пренебрежения какой-либо релаксацией на временах взаимодействия (т. е. время пролета атомов сквозь резонатор предполагается гораздо меньше времени атомной релаксации и затухания поля) порождают два закона сохранения:

$$z^2 + 4r = 4N^{-2}R(R+1), \quad z + 2n = S. \quad (5)$$

Здесь  $R$  – кооперативное число, нумерующее атомные состояния Дике  $|R, M\rangle$ ;  $M = Nz/2$  изменяется таким образом, что  $|M| \leq R \leq N/2$ , и пропорционально энергии атомов.

Из вида уравнений (3) следует, что в отличие от полуклассической теории в нашей модели состояние с полностью возбужденными атомами, инжектируемыми в резонатор с вакуумным полем, т. е. начальное состояние пятимерной системы уравнений (3) ( $z_0 = 1, n_0 = r_0 = u_0 = v_0 = 0$ ), не является равновесным. Следовательно, даже в отсутствие в начальный момент времени фотонов в резонансной моде, атомных корреляций, а также поляризации атомов с течением времени благодаря члену  $(z+1)/N$  возникают осцилляции всех этих величин.

Таким образом, источником спонтанного излучения в нашей модели являются малые квантовые коррекции  $\sim 1/N$ . С течением времени квантовые коррекции, вообще говоря, растут. Поскольку в нашей модели пренебрегается квантовыми корреляторами третьего порядка и выше, то пределы ее применимости ограничиваются временами, на которых квантовыми поправками этого порядка можно пренебречь. Если для регулярных вакуумных осцилляций Раби этот масштаб времени сравнительно велик,  $\tau_q^{\text{reg}} \approx N$ , то в хаотическом режиме он существенно уменьшается:  $\tau_q^{\text{ch}} \simeq \lambda^{-1} \ln N$  [21, 22], где  $\lambda$  – максимальный показатель Ляпунова.

Нетрудно показать, что в случае  $\Omega_0 = \text{const}$  (т. е. для покоящихся атомов или атомов, летящих по направлению, вдоль которого поле резонатора можно считать однородным) система (3) приобретает дополнительный интеграл движения  $C = 2\Omega_N u - (\omega - 1)z$  и интегрируется в квадратурах. Точное решение для плотности атомной инверсии выглядит так:

$$z(\tau) = z_1 + (z_2 - z_1) \times \text{sn}^2 \left\{ \left[ \frac{1}{2}(z_3 - z_1) \right]^{1/2} \Omega_N(\tau - T); \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right\}, \quad (6)$$

где

$$T = \frac{1}{\Omega_N \sqrt{2}} \int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{[(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)]^{1/2}}; \quad (7)$$

$z_{1,2,3}$  – корни кубического алгебраического уравнения, возникающего при обращении эллиптического интеграла;  $z_0$  – начальное значение  $z$ . Решения для других переменных легко находятся с помощью интегралов движения системы.

Из вида уравнений (3) следует, что они интегрируются в случае точного резонанса для произвольной моду-

ляции  $f(\tau)$  вакуумной частоты Раби,  $\Omega_N(\tau) = \Omega_N f(\tau)$ , т. к. при  $\omega = 1$  переменная  $u$  становится константой. В пределе точного резонанса точные решения находятся из соответствующих решений для  $\Omega_0 = \text{const}$  с помощью замены  $\tau \rightarrow \int f(\tau') d\tau'$ . Таким образом, вакуумные осцилляции Раби резонансных атомов при движении сквозь высокочастотный резонатор с произвольной пространственной конфигурацией моды являются регулярными – факт, который можно использовать для проверки численных расчетов.

В работе [18] с помощью метода В.К.Мельникова [23] показано, что при наличии сколь угодно малой глубины модуляции частоты Раби в полуклассической атомно-полевой системе с движущимися нерезонансными атомами возникают так называемые трансверсальные пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий гиперболической особой точки этой системы. Подобный анализ можно провести и для нашей модели (3), показав, что функция Мельникова в первом порядке теории возмущений по малому параметру модуляции  $\varepsilon \ll \Omega_N$  ( $\Omega_N(\tau) = \Omega_N + \varepsilon \sin(b\omega\tau)$ ;  $b = v_a/c$  – отношение скорости атомов к скорости света в вакууме) имеет вид

$$M(\tau_0) = \frac{2\pi(1-\omega)(b\omega)^2}{\Omega_N^3 \sinh[b\omega\pi/(z_3 - z_1)^{1/2}\Omega_N]} \cos(b\omega\tau_0). \quad (8)$$

Эта функция характеризует расстояние (со знаком) между указанными возмущенными многообразиями в некоторый момент времени  $\tau_0$  вдоль направления нормали к невозмущенной гомоклининой поверхности (для знакомства с гомоклиниными структурами см., напр., [24]).

Из вида функции Мельникова (8) следует, что в отсутствие точного резонанса ( $\omega \neq 1$ ) она имеет бесконечное множество простых нулей по переменной  $\tau_0$ . Пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий в бесконечном множестве гомоклининых точек формируют сложную гомоклининую структуру, которая порождает в окрестности этих точек преобразование фазового объема типа подковы Смейла и приводит к гамильтонову хаосу в обратимом спонтанном излучении движущихся атомов даже в приближении вращающейся волны и при сколь угодно малой глубине модуляции  $\varepsilon$  вакуумной частоты Раби. В полуклассическом пределе в окрестности сепаратрисы невозмущенной системы образуется малый стохастический слой, который расширяется с ростом  $\varepsilon$  [18].

## 2. Вейвлет-анализ вакуумных осцилляций Раби

Проанализируем численно нелинейную динамику атомно-полевой системы (3) при наличии сильной модуляции, для определенности выбранной в виде  $\Omega_N(\tau) = \Omega_N \sin(\omega b\tau)$  (т. е. пространственная структура стоячей волны в резонаторе описывается простым синусом). В момент вхождения в резонатор атомы предполагаются подготовленными (скажем, с помощью лазерного  $\pi$ -импульса) в полностью возбужденном состоянии  $|\psi_N(0)\rangle_a = |N/2, N/2\rangle$ , а поле в резонаторе находится в вакуумном состоянии. В терминах переменных нашей модели такое факторизованное состояние описывается 5-вектором с координатами  $z_0 = 1, n_0 = 0, r_0 = 0, u_0 = 0, v_0 = 0$ .

Поскольку в экспериментах с движущимися атомами атомное возбуждение обычно регистрируется на выходе

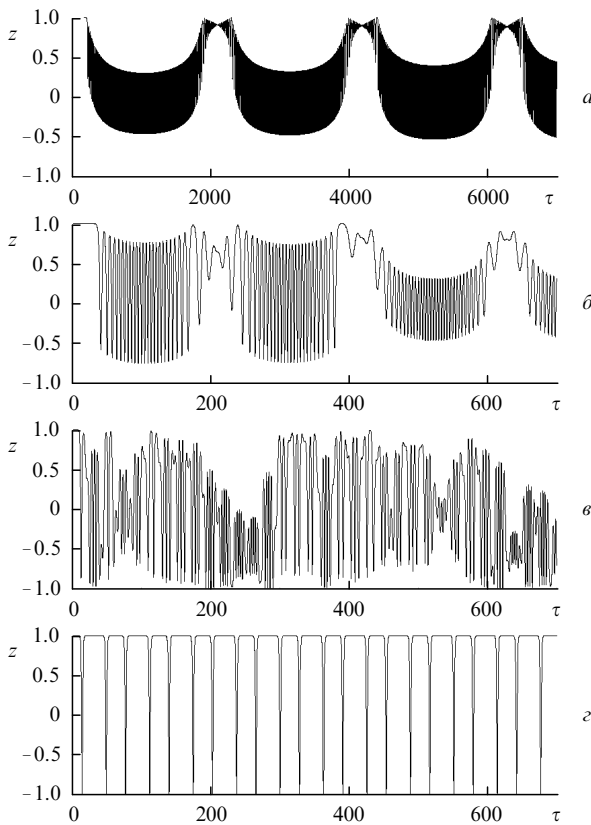


Рис.1. Осцилляции плотности инверсии  $10^6$  движущихся атомов с коллективной частотой Раби  $\Omega_N = 1$  для скорости  $b = 0.001$  (а),  $0.01$  (б),  $0.1$  (в, г) и  $\omega = 1.5$  (а–в) и  $1$  (точный резонанс, г).

из резонатора, то для иллюстрации сигналов обратимого спонтанного излучения на рис.1, а–в приведена зависимость  $z(\tau)$  при  $\Omega_N = 1$ ,  $N = 10^6$  и расстройке  $\omega = 1.5$  для разных скоростей атомов  $b$ , а на рис.1, г – зависимость  $z(\tau)$  при  $\Omega_N = 1$  и  $b = 0.1$  в случае точного резонанса  $\omega = 1$ .

Отметим прежде всего две особенности поведения  $z(\tau)$ : задержка первого сверхизлучательного импульса, в течение которой устанавливается межатомная квантовая корреляция, и характерная периодическая структура регулярного сигнала, вызванная пространственной модуляцией вакуумной частоты Раби. Безразмерный период этой модуляции  $\tau_m = \pi/b\omega$ , а его численная оценка дает  $\sim 2090$ ,  $\sim 209$  и  $\sim 31.4$ , для случаев рис.1, а, б и г соответственно. Эти значения хорошо согласуются с соответствующими периодами на рис.1.

Вычисление максимального показателя Ляпунова, который является мерой динамического хаоса нелинейной системы, дает  $\lambda \simeq 0$  (в пределах погрешности численного расчета этого показателя) для рис. 1, а, б и г, что, как известно, указывает на (квази)периодический характер соответствующей динамики. Сигнал на рис.1, в не только выглядит хаотическим, но и является таковым на самом деле, т. к. соответствующий показатель Ляпунова положителен и равен  $\sim 0.1$ .

С увеличением коллективной частоты Раби  $\Omega_N$ , т. е. с ростом числа атомов  $N$  в кластере и/или с увеличением одноатомной вакуумной частоты Раби  $\Omega_0$ , хаос проявляется для все более медленных атомов. Расчет максимального показателя Ляпунова для  $\Omega_N = 8.5$  показывает, что  $\lambda$  достигает  $\sim 0.5$  при скорости атомов  $v_a \simeq 1.5 \cdot 10^5$  м/с ( $b = 5 \cdot 10^{-4}$ ) и  $\omega = 0.9$ .

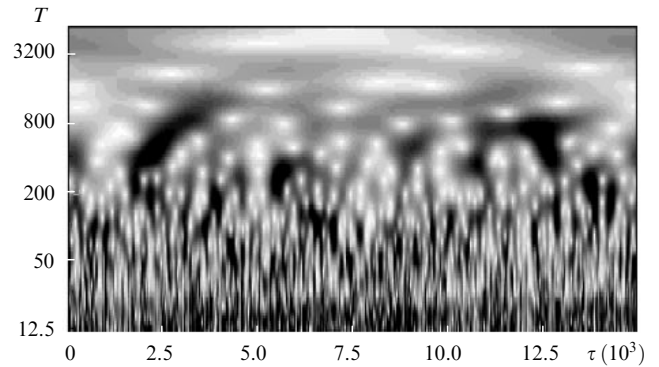


Рис.2. Вейвлет-преобразование хаотического сигнала вакуумных осцилляций Раби, представленного на рис.1, в.

Однако ни по виду хаотического сигнала осцилляций Раби, ни по виду его фурье-спектра нельзя установить временной тип хаоса. С этой целью мы сделали вейвлет-преобразование соответствующего сигнала  $z(\tau)$ , изображенного на рис.1, в:

$$W(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) \phi_{\alpha\beta}^*(\tau) d\tau, \quad (9)$$

где  $\phi_{\alpha\beta}(\tau) = \alpha^{-1} \phi((\tau - \beta)/\alpha)$ ;  $\phi = \exp(ik_0\tau) \exp(-\tau^2/2)$  – базовый вейвлет Морле;  $\alpha$  – масштабный коэффициент;  $\beta$  – параметр сдвига;  $k_0$  – подгочный параметр.

Полученную двумерную матрицу чисел можно представить в виде двумерной картины с осями  $\alpha$  и  $\beta$ , на которой полутонами черного цвета выведены абсолютные значения  $W$  (см. рис.2). Ось  $\alpha$  задает масштаб сигнала по обратной частоте  $T$ , ось  $\beta$  – по текущему времени  $\tau$ , а каждая точка на картине  $\alpha_0, \beta_0$  является сверткой  $z(\tau)$  со сдвинутым на  $\beta_0$  и растянутым в  $\alpha_0$  раз базовым вейвлетом  $\phi$ . Таким образом,  $W(\alpha, \beta)$  содержит информацию о временных и частотных свойствах сигнала одновременно, что и позволяет изучить сигнал детальнее, чем с помощью фурье-анализа (см., напр., [25]).

Результат вейвлет-преобразования хаотического сигнала  $z(\tau)$  для  $\Omega_N = 1$ ,  $b = 0.1$  и  $\omega = 1.5$  изображен на рис.2. Из него следует, что гамильтонов хаос в обратимом спонтанном излучении движущихся в высокодобротном резонаторе атомов является переходным в том смысле, что нерегулярные осцилляции происходят в течение некоторого случайного промежутка времени и сменяются регулярными, которые в свою очередь перерождаются в нерегулярные и т. д. На рис.2 отчетливо наблюдается квазирегулярная структура высокочастотных компонент сигнала, на фоне которой возникают и пропадают хаотические низкочастотные компоненты (пятна черного цвета на рис.2).

Появление и разрушение структур в обратимом спонтанном излучении движущихся атомов вызвано сосуществованием собственно вакуумных осцилляций Раби (дважды периодических в резонансном пределе) и периодической модуляции коэффициента связи атомов с модой резонатора. Когда в отсутствие резонанса периоды этих процессов становятся сравнимыми (т. е. при достаточно большой скорости атомов), квазирегулярная структура сменяется хаосом даже на сравнительно малых временных масштабах. При малых скоростях атомов или в случае точного резонанса (при любых скоростях) частотно-временная структура обратимого спонтанного излучения является регулярной.

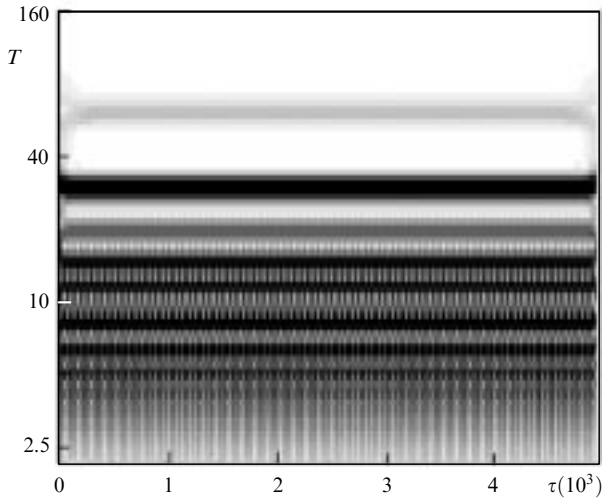


Рис.3. Вейвлет-преобразование регулярного сигнала вакуумных осцилляций Раби, представленного на рис.1,2.

В качестве примера такой структуры на рис.3 приведено вейвлет-преобразование сигнала  $z(\tau)$  (изображенного на рис.1,2) в случае точного резонанса атомов и полости, но при тех же значениях остальных параметров системы, что и для рис.2. Причиной регулярных осцилляций Раби в условиях резонанса является сохранение энергии взаимодействия атомов и моды, что в свою очередь является следствием появления в системе дополнительного интеграла движения  $C$  в этом пределе. Регулярность как высокочастотных, так и низкочастотных компонент сигнала отчетливо прослеживается на его вейвлет-преобразовании.

### 3. Некоторые численные оценки

В принципе, наша модель описывает взаимодействие любых двухуровневых движущихся объектов с единственной модой излучения. Однако пределы применимости модели, указанные в начале первого раздела статьи, не могут быть самосогласованными для любых таких объектов и любого диапазона электромагнитных волн. Подходящей системой для обнаружения проявлений квантового хаоса в обратимом спонтанном излучении представляются ридберговские атомы, движущиеся сквозь высокодобротный СВЧ резонатор. Мазер на ридберговских атомах действительно может работать в режиме, в котором принятое нами при выводе основных уравнений (3) допущения можно считать выполненными. Приведенные ниже оценки параметров атомов и резонатора соответствуют экспериментальной установке в парижской Высшей нормальной школе [26].

Частота перехода между соседними циркулярными ридберговскими уровнями атома рубидия с главными квантовыми числами 50 и 51 есть  $\omega_a/2\pi = 51.099$  ГГц, а электрический дипольный момент перехода  $d = 1250$  Д. Релаксация возбуждения этих уровней с максимальными квантовыми числами углового и магнитного моментов осуществляется только посредством СВЧ перехода в ближайшее нижележащее циркулярное состояние и поэтому ее характерное время очень велико ( $\sim 30$  мс). Благодаря большому расстоянию между возбужденным электроном и ядром даже умеренное электрическое поле является достаточным для ионизации таких атомов – на этом основана высокочувствительная и селективная схема де-

тектирования состояний вылетающих из резонатора атомов.

Добротность ниобиевого сверхпроводящего резонатора  $Q$  при температуре порядка 1 К достигает  $\sim 10^9 - 10^{10}$ , что соответствует времени релаксации самого резонатора  $\sim 10 - 100$  мс. Типичная одноатомная вакуумная частота Раби  $\Omega_0$  составляет  $\sim 10^5 - 10^6$  рад/с. При таких параметрах атомов и резонатора все условия для режима очень сильной связи ( $\Omega_0 \gg \omega_c/Q$ ) и справедливости гамильтоновой динамики (по крайней мере для нескольких тысяч периодов коллективных вакуумных осцилляций Раби) можно считать выполненными.

Большая длина волны ( $\sim 1$  см) и малая энергия отдачи атомов, сопровождающей излучение СВЧ фотонов, обеспечивают выполнение приближений точечных моделей Дике и Рамана – Ната соответственно. В хаотическом режиме обратимого спонтанного излучения временной масштаб квантово-классического соответствия логарифмически уменьшается, а его оценка  $t_q^{ch} \simeq (\omega_a \lambda)^{-1} \ln N$  в зависимости от числа атомов и показателя Ляпунова может варьироваться от нескольких десятков до сотен периодов коллективных вакуумных осцилляций Раби.

### Заключение

Итак, мы обнаружили аналитически и численно возможность возникновения структурного динамического хаоса в обратимом спонтанном излучении двухуровневых атомов, движущихся в одномодовом идеальном резонаторе. Следует подчеркнуть, что это сделано в рамках модели со смешанной квантово-классической динамикой. Следовательно, справедливость этого утверждения ограничена некоторым интервалом времени квантово-классического соответствия. Обнаружение в реальном эксперименте проявлений классического хаоса в таком фундаментальном процессе взаимодействия материи с вакуумом как спонтанное излучение позволило бы пролить дополнительный свет на проблему квантово-классического соответствия.

Работа была поддержана РФФИ (грант № 02-17269).

### Приложение

Введем новые операторы  $\hat{A} = \hat{a}/\sqrt{N}$ ,  $\hat{A}^\dagger = \hat{a}^\dagger/\sqrt{N}$ ,  $\hat{S}_\rho = \hat{a}_\rho/N$  с коммутационными соотношениями  $[\hat{A}^\dagger, \hat{A}] = 1/N$ ,  $[\hat{S}_+, \hat{S}_-] = 2\hat{S}_3/N$ ,  $[\hat{S}_\pm, \hat{S}_3] = \mp \hat{S}_\pm/N$  ( $\rho = \pm, 3$ ), исчезающими в макроскопическом пределе  $N \rightarrow \infty$ . Для следующих билинейных комбинаций новых операторов  $\hat{A}^\dagger \hat{A}$ ,  $\hat{S}_+ \hat{S}_-$ ,  $\hat{u} = \hat{A} \hat{S}_+ + \hat{A}^\dagger \hat{S}_-$ ,  $\hat{v} = i(\hat{A}^\dagger \hat{S}_- - \hat{A} \hat{S}_+)$  и плотности атомной инверсии  $\hat{S}_3$  гейзенберговские уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\hat{A}^\dagger \hat{A}) &= -\Omega_0(t)\sqrt{N}\hat{v}, & \frac{d}{dt}\hat{S}_3 &= \Omega_0(t)\sqrt{N}\hat{v}, \\ \frac{d}{dt}(\hat{S}_+ \hat{S}_-) &= 2i\Omega_0(t)\sqrt{N}(\hat{S}_+ \hat{A} \hat{S}_3 - \hat{A}^\dagger \hat{S}_3 \hat{S}_-), \\ \frac{d}{dt}\hat{u} &= (\omega_c - \omega_a)\hat{v}, & \frac{d}{dt}\hat{v} &= -(\omega_c - \omega_a)\hat{u} \\ & & & - 2\Omega_0(t)\sqrt{N}(\hat{S}_+ \hat{S}_- + 2\hat{A}^\dagger \hat{A} \hat{S}_3). \end{aligned} \quad (П.1)$$

Усредняя оператор поляризации, выделим член, предста-

влияющий квантовые корреляции различных атомов [27],  $r = N^{-2} \langle \sum_{i \neq j} \hat{\sigma}_+^i \hat{\sigma}_-^j \rangle$ , с суммированием по всем парам различных атомов:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_+ \hat{S}_- \rangle &= \frac{1}{N^2} \left\langle \sum_{j=1}^N \hat{\sigma}_+^j \hat{\sigma}_-^j + \sum_{i \neq j=1}^N \hat{\sigma}_+^i \hat{\sigma}_-^j \right\rangle \\ &= \frac{1}{2N} + \frac{1}{N} \langle \hat{S}_3 \rangle + \langle \hat{r} \rangle. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

Пренебрегая при усреднении всеми квантовыми корреляторами выше второго порядка, получаем замкнутую пятимерную систему уравнений (3) для средних  $n = \langle \hat{A}^\dagger \hat{A} \rangle$ ,  $z = 2 \langle \hat{S}_3 \rangle$ ,  $u = \langle \hat{u} \rangle$ ,  $v = \langle \hat{v} \rangle$  и  $r = \langle \hat{r} \rangle$ .

1. Weisskopf V.F., Wigner E. *Zs.Physik*, **63**, 54 (1930).
2. Purcell E.M. *Phys.Rev.*, **69**, 681 (1946).
3. Drexhage K.H. In: *Progress in optics* (Amsterdam, North Holland, 1974, v. 12).
4. Kleppner D. *Phys.Rev.Letts*, **47**, 233 (1981).
5. Hulet R.G., Hilfer E.S., Kleppner D. *Phys.Rev.Letts*, **55**, 2137 (1985).
6. Goy P., Raimond J.M., Gross M., Haroche S. *Phys.Rev.Letts*, **50**, 1903 (1983).
7. Kaluzny Y., Goy P., Gross M., Raimond J.M., Haroche S. *Phys.Rev.Letts*, **51**, 1175 (1983).
8. Tompson R.J., Rempe G., Kimble H. *Phys.Rev.Letts*, **68**, 1132 (1992).
9. Cao H., Jacobson J., Bjork G., Pau S., Yamamoto Y. *Appl.Phys.Letts*, **66**, 1107 (1995).
10. Ораевский А.Н. *УФН*, **164**, 415 (1994).
11. Грасюк А.З., Ораевский А.Н. *Радиотехника и электроника*, **9**, 527 (1964).
12. Haken H. *Phys.Letts A*, **53**, 77 (1975).
13. Ораевский А.Н. *УФН*, **8**, 130 (1981).
14. Ackerhalt J.R., Milonni P.W., Shih M.L. *Physics Reports*, **128**, 205 (1985).
15. Бенди Д.К., Грэхем Дж.Д., Джонс Д.Дж., Ораевский А.Н., Саркисян Т.В. *Квантовая электроника*, **21**, 615 (1994).
16. Prants S.V., Kon'kov L.E. *Phys.Letts A*, **225**, 33 (1997).
17. Dicke R.H. *Phys.Rev.*, **93**, 99 (1954).
18. Prants S.V., Kon'kov L.E., Kirilyuk I.L. *Phys.Rev.E*, **60**, 335 (1999).
19. Андреев А.В., Емельянов В.И., Ильинский Ю.А. *Кооперативные явления в оптике* (М., Наука, 1988).
20. Коньков Л.Е., Пранц С.В. *Письма в ЖЭТФ*, **65**, 801 (1997).
21. Berman G.P., Zaslavsky G.M. *Physica A*, **91**, 450 (1978).
22. Berry M., Balazs M. *J.Phys.A*, **12**, 625 (1979).
23. Мельников В.К. *Труды Моск.мат.обиц.*, **12**, 3 (1963).
24. Лихтенберг А., Либерман М. *Регулярная и стохастическая динамика* (М., Мир, 1984); Wiggins S. *Global bifurcations and chaos: analytical methods* (Berlin, Springer, 1988).
25. Астафьева Н.М. *УФН*, **166**, 1145 (1996).
26. Raimond J.M., Haroche S. In: *Confined electrons and photons* (N.Y., Plenum Press, 1995).
27. Файн В.М., Ханин Я.И. *Квантовая радиофизика* (М., Сов. радио, 1965).

**SV.Prants, VI.Yusupov. Structural chaos in reversible spontaneous emission of moving atoms.**

It is proved analytically and numerically that, under certain conditions, reversible spontaneous emission of two-level atoms moving in a high-Q resonator and described quantum-classically can be chaotic in the sense of the exponential sensitivity with respect to the initial conditions. The wavelet analysis of the vacuum Rabi oscillations showed that this chaos is structural. The numerical estimates showed that a Rydberg atom maser with a superconducting microwave resonator operating in a strong coupling mode is a promising device for detecting manifestations of the dynamic chaos in the reversible spontaneous emission.