

# Динамика инжекционной синхронизации твердотельного лазера с внутриврезонаторной генерацией второй гармоники

И.И.Золотоверх, Е.Г.Ларионцев

*Теоретически исследовано влияние инжектируемого на частоте второй гармоники излучения на динамику генерации твердотельного лазера с внутриврезонаторной ГВГ при наличии внутри лазерного резонатора обратной связи на удвоенной частоте. Найдены границы зон инжекционной синхронизации для трех стационарных состояний лазера, различающихся нелинейным набегом фазы, связанным с преобразованием излучения во вторую гармонику. Исследованы релаксационные колебания в стационарном режиме инжекционной синхронизации. Показано, что в одномодовом твердотельном лазере, помимо основной частоты релаксационных колебаний, возникает вторая релаксационная частота, связанная с возмущениями фазы волны второй гармоники и разности фаз волн в нелинейном кристалле. Найдены условия, при которых происходит раскачка релаксационных колебаний на второй релаксационной частоте.*

**Ключевые слова:** оптическая инжекция, внутриврезонаторная генерация второй гармоники, двойной резонатор, нелинейный сдвиг частоты, твердотельный лазер.

## Введение

Физика явлений, возникающих при инжекции в лазер внешнего оптического излучения, в настоящее время хорошо изучена. Эти явления играют важную роль в исследовании фундаментальных проблем нелинейной динамики (таких как динамический хаос, синхронизация регулярных и хаотических колебаний, мультистабильность и т. д.) [1–3], а также в формировании сжатого света [3–6]. Инжекционная синхронизация имеет важное прикладное значение для улучшения характеристик излучения мощных лазеров. В настоящей работе исследуются неизученные ранее аспекты этих явлений, связанные с оптической инжекцией в твердотельный лазер, генерирующий вторую гармонику внутри двойного резонатора (двойным мы называем резонатор, имеющий высокую добротность как на основной частоте  $\omega$ , так и на частоте второй гармоники  $2\omega$ ).

Проводившиеся ранее исследования по удвоению [7–12] и самоудвоению [13–16] частоты внутри резонатора лазера относятся, в основном, к системам, в которых вторая гармоника покидает резонатор за один обход (отсутствует обратная связь на удвоенной частоте  $2\omega$ ). В работах [17–20] теоретически рассматривалась ГВГ внутри двойного лазерного резонатора. В таких лазерах существуют три стационарных состояния [20], различающихся нелинейным набегом фазы, связанным с преобразованием во вторую гармонику, а также частотами генерации. Оптическая инжекция в такой лазер может оказаться полезной для изучения нелинейных сдвигов частоты излучения. Кроме того, как показано в настоящей работе, нелинейное преобразование частоты внутри резонатора влияет на динамику фазовой синхронизации излучения

инжектируемым сигналом, приводя к появлению еще одной частоты релаксационных колебаний в одномодовом твердотельном лазере.

Инжекционная синхронизация лазера с внутриврезонаторной ГВГ может быть осуществлена двумя способами. Кроме традиционного метода, основанного на инжекции внешнего сигнала с частотой  $\omega_{in}$ , близкой к частоте лазера  $\omega$  ( $\omega_{in} \approx \omega$ ), здесь появляется другая возможность, связанная с воздействием на лазер внешнего сигнала с частотой  $\omega_{in} \approx 2\omega$ . Именно эта возможность и рассматривается в настоящей работе.

## 1. Система уравнений и стационарный режим инжекционной синхронизации

Систему скоростных уравнений, описывающую динамику инжекционной синхронизации твердотельного лазера с ГВГ в его двойном резонаторе, запишем в виде

$$\frac{da_1}{dt} = \frac{a_1}{2T_c} [k_1(N-1) - \sqrt{\epsilon} a_2 \sin \psi], \quad (1)$$

$$\frac{da_2}{dt} = -\frac{k_2}{2T_c} a_2 + \frac{\sqrt{\epsilon}}{2T_c} a_1^2 \sin \psi + \frac{k_{in}}{T_c} E_{in} \cos \varphi_2, \quad (2)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2T_c} \left( \frac{a_1^2}{a_2} - 2a_2 \right) \cos \psi + \omega_{2c} - 2\omega_{1c} + \frac{k_{in} E_{in}}{T_c a_2} \sin \varphi_2, \quad (3)$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \omega_{in} - \omega_{2c} - \frac{\sqrt{\epsilon}}{2T_c} \frac{a_1^2}{a_2} \cos \psi - \frac{k_{in} E_{in}}{T_c a_2} \sin \varphi_2, \quad (4)$$

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{T_1} [N_0 - N(1 + a_1^2)]. \quad (5)$$

Здесь  $a_{1,2} = (I_{1,2}/I_s)^{1/2}$  и  $\varphi_{1,2}$  – безразмерные амплитуды и фазы полей внутри резонатора на основной частоте и частоте второй гармоники соответственно;  $I_{1,2}$  – интенсив-

ности этих полей;  $I_s$  – интенсивность насыщения активной среды;  $\psi = 2\varphi_1 - \varphi_2$ ;  $E_{in} = (I_{in}/I_s)^{1/2}$  – безразмерная амплитуда инжектируемого сигнала;  $k_{1,2}$  – линейные потери в двойном резонаторе;  $\omega_{1c}, \omega_{2c}$  – собственные частоты двойного резонатора;  $k_{in}$  – коэффициент пропускания зеркала, через которое поступает инжектируемый сигнал;  $T_c$  – время обхода светом резонатора;  $\varepsilon = (\chi l)^2 I_s$  – параметр нелинейности;  $\chi$  – коэффициент нелинейности;  $l$  – длина активного (нелинейного) элемента;  $T_1$  – время релаксации инверсной населенности;  $N$  – отношение инверсной населенности к ее пороговому значению;  $N_0$  – значение  $N$  в отсутствие насыщения.

Мы считаем, что в нелинейном кристалле выполнено условие фазового синхронизма. Относительная отстройка основной частоты от центра линии усиления для одномодового твердотельного лазера мала, и ее влиянием будем пренебрегать. Рассмотрим вначале стационарный режим инжекционной синхронизации в частном случае, когда частота инжектируемого сигнала  $\omega_{in}$  совпадает с собственной частотой резонатора для второй гармоники  $\omega_{2c}$ , которая равна удвоенной частоте резонатора для основного излучения  $2\omega_{1c}$ .

Из уравнений (1)–(5) следует, что в этом случае для стационарных решений должны выполняться условия

$$\cos \psi = 0, \quad \sin \varphi_2 = 0. \quad (6)$$

Возможны несколько стационарных решений, различающихся знаками  $\sin \psi$  и  $\cos \varphi_2$ , однако устойчивым может быть только одно решение:

$$\psi = \pi/2, \quad \varphi_2 = \pi. \quad (7)$$

Внутрирезонаторные амплитуды полей при выполнении фазовых соотношений (7) определяются формулами

$$a_1^2 = \frac{-B + \{B^2 + 4[A(N_0 - 1) + 2k_{in}E_{in}/\sqrt{\varepsilon}]\}^{1/2}}{2},$$

$$a_2 = \sqrt{\varepsilon} \frac{a_1^2}{k_2} - 2 \frac{E_{in}k_{in}}{k_2}, \quad (8)$$

где  $A = k_1k_2/\varepsilon$ ;  $B = 1 + A - 2k_{in}E_{in}/\sqrt{\varepsilon}$ .

Рассмотрим устойчивость решения (7), (8). Нетрудно показать, что характеристическое уравнение для малых возмущений разбивается на два: кубическое уравнение для возмущений переменных  $a_1, a_2$  и  $N_0$  относительно их стационарных значений (8) и квадратное уравнение для возмущений  $\varphi_2$  и  $\psi$  относительно стационарных значений (7). Анализ этих уравнений показывает, что в одномодовом твердотельном лазере с ГВГ внутри двойного резонатора при наличии инжектируемого сигнала возникает вторая (дополнительная) частота релаксационных колебаний. Основная частота релаксационных колебаний ( $\omega_{r1}$ ) связана с возмущениями интенсивности излучения и разности населенностей, а дополнительная ( $\omega_{r2}$ ) – с возмущениями фазы волны второй гармоники и разности фаз в нелинейном кристалле.

Кубическое уравнение определяет затухающие возмущения на основной частоте релаксационных колебаний  $\omega_{r1}$ , а из квадратного уравнения получаем следующие выражения для частоты  $\omega_{r2}$  и декремента затухания (или инкремента нарастания)  $\gamma$  релаксационных колебаний:

$$\omega_{r2} = \left( \frac{k_{in}E_{in}\sqrt{\varepsilon}}{T_c^2} - \gamma^2 \right)^{1/2}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon}}{4T_c} \left( \frac{a_1^2}{a_2} - 2a_2 \right). \quad (9)$$

Стационарные значения амплитуд  $a_1, a_2$  в (9) определяются формулами (8). Отметим, что формулы (6)–(9) описывают стационарный режим и его устойчивость при любом значении  $N_0$  (при любой накачке). В зависимости от  $N_0$  они описывают вырожденный параметрический генератор света ( $N_0 = 0$ ), вырожденный параметрический генератор с регенеративным усилением на частоте  $\omega$  ( $0 < N_0 < 1$ ) и лазер с внутрирезонаторной ГВГ при оптической инжекции на частоте  $2\omega$  ( $N_0 > 1$ ).

На рис.1 показаны зависимости безразмерных выходных интенсивностей  $k_1a_1^2$  и  $k_2a_2^2$ , а также частоты релаксационных колебаний  $\omega_{r2}$  от безразмерной интенсивности инжектируемого сигнала  $k_{in}E_{in}^2$  при различных  $N_0$ . Устойчивые решения показаны сплошными кривыми, а неустойчивые – пунктиром. При вычислениях полагалось, что  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_c = 0.2$  нс,  $k_1 = 0.01, k_2 = 0.01$ . Эти параметры (за исключением  $k_2$ ) соответствуют параметрам лазера на YAG:Nd с внутрирезонаторной ГВГ на кристалле КТР длиной  $l = 5$  мм, использовавшегося в

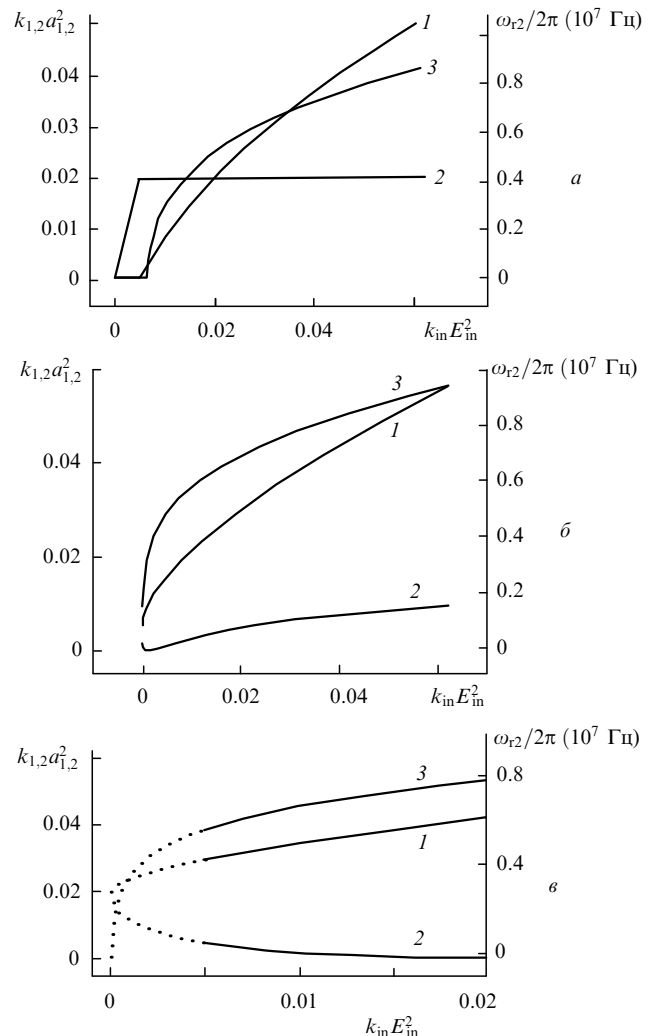


Рис.1. Зависимости безразмерных выходных интенсивностей  $k_1a_1^2$  (1),  $k_2a_2^2$  (2) и частоты релаксационных колебаний  $\omega_{r2}$  (3) от безразмерной интенсивности инжектируемого сигнала  $k_{in}E_{in}^2$  при  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_c = 0.2$  нс,  $k_1 = 0.01, k_2 = 0.01$  и  $N_0 = 0$  (а), 2 (б) и 6 (е). Устойчивые решения показаны сплошными кривыми, неустойчивые – пунктиром.

[9–11]. Зависимости на рис.1,*a* соответствуют случаю параметрического генератора ( $N_0 = 0$ ); при этом  $k_2 a_2^2$  вначале линейно растет с увеличением  $k_{in} E_{in}^2$ , а затем, после достижения порога параметрической генерации, рост  $k_2 a_2^2$  резко замедляется и вследствие преобразования второй гармоники в первую начинает расти  $k_1 a_1^2$ . Порог параметрической генерации существенно снижается с увеличением  $N_0$  и при  $N_0 > 1$  он отсутствует (параметрическая генерация возникает при сколь угодно малой амплитуде  $E_{in}$ ).

В случае лазера ( $N_0 > 1$ ) интенсивность второй гармоники  $k_2 a_2^2$  с ростом  $k_{in} E_{in}^2$  изменяется немонотонно: вначале она монотонно снижается до нулевого уровня, а затем начинает расти (рис. 1,*б,в*). Интенсивность лазерного излучения  $k_1 a_1^2$  монотонно увеличивается с ростом  $k_{in} E_{in}^2$ , что связано с параметрическим преобразованием инжектируемого сигнала в излучение лазера.

Как видно из рис.1, частота  $\omega_{r2}$  слабо зависит от мощности накачки. Это непосредственно следует из (9): если декремент мал ( $\gamma \ll \omega_{r2}$ ), формула (9) для  $\omega_{r2}$  принимает вид

$$\omega_{r2} = (k_{in} E_{in} \sqrt{\varepsilon})^{1/2} / T_c.$$

При заданной амплитуде инжектируемого сигнала частота  $\omega_{r2}$  имеет близкие значения в случае как лазера ( $N_0 > 1$ ), так и параметрического генератора ( $N_0 = 0$ ). Для параметрического генератора релаксационные колебания исследовались ранее в [21–23].

Устойчивость стационарного режима инжекционной синхронизации (7), (8) зависит от уровня накачки. Запишем  $N_0$  в виде  $N_0 = 1 + \eta$ , где  $\eta$  – превышение мощности накачки над порогом. При  $\eta$ , меньших критического значения

$$\eta_0 = \left(\frac{k_2}{2}\right)^2 \frac{2 + k_2/k_1}{\varepsilon} + \frac{k_2}{2k_1}, \quad (10)$$

стационарное решение (7), (8) устойчиво при любой амплитуде инжектируемого сигнала. Если же  $\eta > \eta_0$ , то при малых амплитудах инжектируемого сигнала, удовлетворяющих неравенству

$$k_{in} E_{in} < \frac{\sqrt{\varepsilon}(\eta - \eta_0)}{2 + k_2/k_1}, \quad (11)$$

возникает бифуркация Хопфа, в результате которой самовозбуждаются релаксационные колебания с частотой  $\omega_{r2}$  и стационарный режим инжекционной синхронизации сменяется автомодуляционным.

## 2. Границы зон инжекционной синхронизации

Приведенные выше аналитические выражения, как уже отмечалось, описывают частный случай инжекционной синхронизации. В общем случае (при произвольных расстройках  $\omega_{in} - \omega_{2c}$  и  $\omega_{2c} - 2\omega_{1c}$ ) из (1)–(5) нетрудно получить следующие формулы, описывающие стационарный режим инжекционной синхронизации:

$$N = \frac{1 + \eta}{1 + a_1^2},$$

$$a_2 = \frac{[k_1^2(N - 1)^2 + T_c^2(\omega_{in} - \omega_1)^2]^{1/2}}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\cos \psi = \frac{(\omega_{in} - \omega_{1c})T_c}{\sqrt{\varepsilon}a_2}, \quad \sin \psi = \frac{(N - 1)k_1}{\sqrt{\varepsilon}a_2},$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{k_2 a_2 - \sqrt{\varepsilon} a_1^2 \sin \psi}{2k_{in} E_{in}}, \quad (12)$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{(\omega_{in} - \omega_{2c})T_c/a_2 - \sqrt{\varepsilon} a_1^2 \cos \psi/2}{k_{in} E_{in}},$$

$$k_{in}^2 E_{in}^2 = \frac{(k_2 a_2 - \sqrt{\varepsilon} a_1^2)^2}{4} + \left[ \frac{(\omega_{in} - \omega_{2c})T_c}{a_2} - \frac{\sqrt{\varepsilon} a_1^2}{2} \right]^2.$$

Эти формулы определяют параметрические зависимости  $N, a_2, \psi$  и  $E_{in}^2$  от  $a_1^2$ . Задавая параметр  $a_1^2$ , с помощью (12) можно вычислить  $N, a_2, \psi$  и  $E_{in}^2$ .

На основе формул (12) нами была исследована область существования режима инжекционной синхронизации. Инжекционная синхронизация возможна в конечной области расстройок частоты  $\omega_{in} - \omega_{2c}$ , определяемой неравенствами  $\Omega_1 < \omega_{in} - \omega_{2c} < \Omega_2$ , где  $\Omega_{1,2}$  – границы зоны инжекционной синхронизации.

В отсутствие инжектируемого сигнала в лазере с ГВГ внутри двойного лазерного резонатора при расстройке частот резонатора  $\Delta = \omega_{2c} - 2\omega_{1c} = 0$  могут существовать три стационарных состояния [20], различающихся величиной нелинейного набега фазы, связанного с преобразованием во вторую гармонику, а также частотой генерации. При наличии инжектируемого сигнала этим состояниям соответствуют три зоны инжекционной синхронизации. В случае превышений  $\eta$ , меньших  $\eta_0$ , определяемого формулой (10), существует только одно из этих состояний, а именно состояние с  $\cos \psi = 0$ , для которого нелинейный сдвиг частоты равен нулю и частота генерации совпадает с частотой моды резонатора  $\omega_{1c}$ . В этом случае существует лишь одна зона инжекционной синхронизации. При  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $k_1 = 0.01$ ,  $k_2 = 0.01$  критическое значение  $\eta$  оказывается равным  $\eta_0 = 2$ . Зависимость ширины зоны инжекционной синхронизации от безразмерной интенсивности инжектируемого сигнала  $k_{in} E_{in}^2$  при  $\eta < \eta_0$  и  $\Delta = \omega_{2c} - 2\omega_{1c} = 0$  показана на рис.2,*a*.

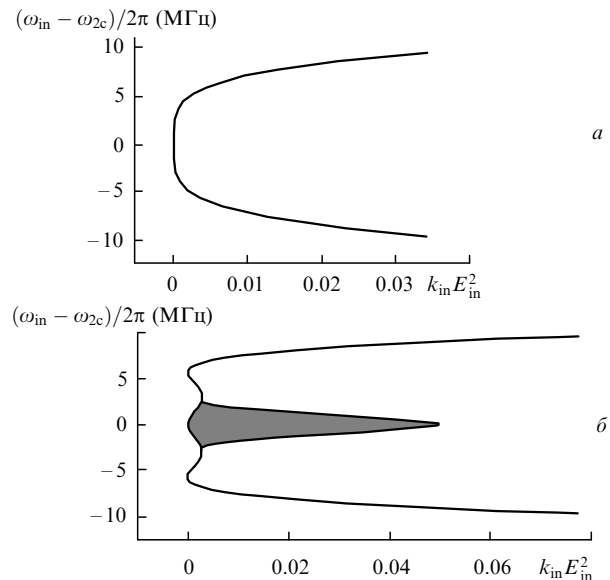


Рис.2. Зависимости границ зон инжекционной синхронизации от безразмерной интенсивности инжектируемого сигнала  $k_{in} E_{in}^2$  при  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$ ,  $T_c = 0.2$  нс,  $k_1 = 0.01$ ,  $k_2 = 0.01$  и  $\eta = 1$  (а) и 5 (б). Область неустойчивости выделена серым цветом.

При  $\eta > \eta_0$  и  $E_{in}^2 = 0$  состояние с  $\cos \psi = 0$  становится неустойчивым и, кроме того, появляются два других состояния, для которых частоты генерации  $\omega_{a,b}$  смещены вследствие нелинейных фазовых сдвигов:

$$\omega_{a,b} = \omega_{1c} \pm \omega_{nl}, \quad (13)$$

где  $\omega_{nl}$  – нелинейный сдвиг частоты генерации, определяемый формулой

$$\omega_{nl} = \frac{1}{T_c} \left[ \frac{\varepsilon(\eta - k_2/2k_1)}{2 + k_2/k_1} - \left( \frac{k_2}{2} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (14)$$

Зависимость границ зон инжекционной синхронизации от безразмерной интенсивности инжектируемого сигнала  $k_{in} E_{in}^2$  при  $\eta > \eta_0$  и  $\Delta = \omega_{2c} - 2\omega_{1c} = 0$  показана на рис.2,б. В этом случае существуют три зоны инжекционной синхронизации, центры которых соответствуют частотам генерации  $\omega_{1c}$  и  $\omega_{a,b}$  в рассмотренных выше состояниях. Внутри зоны с центром на частоте  $\omega_{2c}$  при  $\eta > \eta_0$  и малых интенсивностях инжектируемого сигнала имеет место неустойчивость, связанная с самовозбуждением релаксационных колебаний на частоте  $\omega_{r2}$  (на рис.2,б область неустойчивости заштрихована).

## Заключение

Таким образом, рассмотрение режимов инжекционной синхронизации в твердотельном лазере с внутривибраторной ГВГ при наличии инжектируемого сигнала на частоте второй гармоники показало, что существуют три области инжекционной синхронизации, соответствующие трем стационарным режимам генерации лазера. Центры этих зон соответствуют частотам генерации лазера в отсутствие инжектируемого сигнала, и по разности частот между центрами зон можно непосредственно измерить нелинейные сдвиги частоты излучения лазера.

Показано, что в одномодовом твердотельном лазере, помимо основной частоты релаксационных колебаний, возникает вторая релаксационная частота, связанная с возмущениями фазы волны второй гармоники  $\varphi_2$  и разности фаз  $\psi$  в нелинейном кристалле. Найдены условия, при которых происходит раскачка релаксационных колебаний на второй релаксационной частоте. Показано, что при накачках как выше, так и ниже порога лазерной генерации мощность излучения на основной частоте растет с увеличением амплитуды инжектируемого сигнала, что связано с параметрическим преобразованием частоты

инжектируемого света в основную частоту.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 00-02-16041) и БРФФИ – РФФИ (грант № 00-02-81040 Бел. 2000-а).

1. Simpson T., Liu J., Gavrielides A., Kovanis V., Alsing P. *Phys.Rev.A*, **51**, 4181 (1995).
2. Simpson T., Liu J., Huang K., Tai K. *Quantum Semiclass.Opt.*, **9**, 765 (1997).
3. Gavrielides A., Kovanis V., Varangis P., Erneux T., Lythe G. *Quantum Semiclass. Opt.*, **9**, 785 (1997).
4. Gillner L., Bjork G., Yamamoto Y. *Phys.Rev.A*, **41**, 5053 (1990).
5. Eschmann A., Gardiner C.W. *Phys.Rev.A*, **54**, 3373 (1996).
6. Harb T.C., Harb C.C., Bachor H.A. *Phys.Rev.A*, **54**, 4359 (1996).
7. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. *Прикладная нелинейная оптика* (М., Радио и связь, 1982).
8. Baer T. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **3**, 1175 (1986).
9. James G.E., Harrell E., Roy R. *Phys.Rev.A*, **41**, 2778 (1990).
10. Bracikowsky C., Roy R. *Phys.Rev.A*, **43**, 6455 (1991).
11. Bracikowsky C., Roy R. *Chaos*, **1**, 49 (1991).
12. Viktorov E.A., Klemer D.R., Karim M.A. *Optics Comms*, **113**, 441 (1995).
13. Fan T.Y., Dixon G.J., Byer R.L. *Optics Letts*, **11**, 204 (1986).
14. Hemmati H. *IEEE J.Quantum Eletron.*, **28**, 1169 (1992).
15. Chen Y.F., Wang S.C., Kao C.F., Hang T.M. *IEEE Photon.Technol. Letts*, **8**, 1313 (1996).
16. Кравцов Н.В., Лаптев Г.Д., Морозов Е.Ю., Наумова И.И., Фирсов В.В. *Квантовая электроника*, **29**, 95 (1999).
17. Горбачев В.Н., Ползик Е.С. *ЖЭТФ*, **96**, 1984 (1989).
18. Walls D.F., Collet M.J., Lane A.S. *Phys.Rev.A*, **42**, 4366 (1990).
19. Золотоверх И.И., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **30**, 565 (2000).
20. Золотоверх И.И., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **30** (2000) (в печати).
21. Drummond P.D., McNeil K.J., Walls D.F. *Optica Acta*, **27**, 3211 (1980).
22. Lugiato L.A., Oldano C., Fabre C., Giacobino E., Horovicz R.J. *Nuovo Cimento D*, **10**, 959 (1988).
23. Schiller S., Byer R. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **10**, 1696 (1993).

**I.I.Zolotoverkh, E.G.Lariontsev. Dynamics of injection locking in a solid-state laser with intracavity second-harmonic generation.**

The dynamics of oscillation in a solid-state laser with intracavity second-harmonic generation under the influence of an external signal at the second-harmonic frequency injected into its cavity in the presence of feedback at the double frequency is theoretically studied. Boundaries of the regions of injection locking for three stationary laser states differing in the nonlinear phase incursion associated with radiation conversion into the second harmonic are found. Relaxation oscillations in the steady state of injection locking are studied. It is shown that the second relaxation frequency, which is associated with phase perturbations of the second harmonic and the phase difference of waves in a nonlinear crystal, is excited in a single-mode solid-state laser in addition to the fundamental frequency of relaxation oscillations. Conditions are found under which relaxation oscillations at the second relaxation frequency are excited.