

Интерференция электронных траекторий и генерация высоких гармоник света в кулоновской системе

В.Т.Платоненко

С помощью численного решения уравнения Шредингера для атома водорода в осциллирующем электрическом поле получены зависимости амплитуд гармоник атомного отклика от интенсивности возбуждающей световой волны в диапазоне интенсивностей $4.9 \cdot 10^{13} - 2.1 \cdot 10^{14}$ Вт/см². Зависимости амплитуд всех гармоник, начиная с 5-й и, по крайней мере, до 55-й, имеют глубокую модуляцию. Проведен анализ генерации гармоник высокого порядка, основанный на полуклассической теории явления и дополненный соображениями, которые ранее не учитывались. Синтезированы относительно простые формулы для амплитуд гармоник высокого порядка, которые хорошо согласуются с результатами численных расчетов в области туннельной ионизации и удовлетворительно – в области надбарьерной ионизации.

Ключевые слова: гармоника высокого порядка, рентгеновское излучение, интерференция электронных траекторий.

Введение

Генерация гармоник высокого порядка (ГГВП) в атомарных газах широко используется в экспериментальной практике как метод получения когерентного мягкого рентгеновского излучения. К сожалению, эффективность ГГВП невысока, что в значительной степени обусловлено сложностью реализации синхронной генерации на достаточно больших длинах. Результаты экспериментов [1] и анализ, выполненный в [2], показывают, что синхронная ГГВП может быть реализована за счет немонокотной зависимости высокочастотного отклика среды от интенсивности возбуждающей световой волны, поэтому выяснение природы и структуры этой зависимости представляется актуальной задачей.

Указанная немонотонность обнаруживается в расчетах [2, 3], выполняемых в рамках одноэлектронной квантовомеханической теории [3, 4], основанной на методе последовательных приближений. Эта теория широко используется для расчетов атомного отклика в условиях ГГВП. К сожалению, такие расчеты, будучи весьма трудоемкими, обладают недостаточно высокой точностью. Связано это с тем, что в данной теории не удается ни выйти за рамки первого приближения, ни провести обобщение на многоэлектронные системы.

Для качественной интерпретации ГГВП (а также в некоторых расчетах) широко используется полуклассическая теория явления [5]. В частности, немонотонность зависимости атомного отклика от интенсивности может быть понята с позиций этой теории как следствие интерференции различных электронных траекторий (см. ниже). Для расчетов атомного отклика полуклассическая теория не использовалась из-за ее недостаточной разработанности. Однако, как будет показано ниже, данная теория допускает создание простого и эффективного аппарата для проведения расчетов.

По-видимому, основным препятствием на пути создания такого аппарата до сих пор являлось отсутствие надежных экспериментальных или других данных, пригодных для его тестирования.

Таким образом, принципиальный вопрос о немонотонной зависимости отклика от интенсивности и о возможной глубине его модуляции требует дополнительного изучения более надежными средствами. Наиболее естественным средством подобного исследования представляется численный эксперимент, состоящий в детальных расчетах атомного отклика с помощью численного решения уравнения Шредингера для одноэлектронного атома в осциллирующем поле. Такие расчеты трудоемки, но могут быть проведены с достаточно высокой точностью. Ранее они выполнялись как для атома водорода, так и для других одноэлектронных моделей, но носили несистематический характер и не использовались для исследования зависимости отклика от интенсивности.

В настоящей работе выполнены детальные расчеты высокочастотного отклика атома водорода на поле линейно поляризованной световой волны ($\lambda = 1.06$ мкм) в широком диапазоне ее интенсивностей в области туннельной и надбарьерной ионизации. Показано, что гармоники атомного отклика глубоко промодулированы (глубина модуляции близка к единице). С помощью полученных результатов, используемых как тестовые, проведен анализ, основанный на полуклассической теории и дополненный рядом соображений, которые ранее в этой теории не учитывались. В результате получены формулы для амплитуд гармоник высокого порядка, которые отчасти имеют эмпирический характер, относительно просты (ранее выражения для амплитуд удавалось получить только в виде весьма сложных интегралов [3, 4, 6]) и в области туннельной ионизации хорошо согласуются с результатами численных экспериментов.

1. Методика и результаты численных расчетов

Уравнение Шредингера интегрировалось в координатном представлении в цилиндрических координатах с

осью z , направленной вдоль вектора электрического поля световой волны. Кулоновский потенциал в расчетах заменялся потенциалом $V(r) = -1/(r^2 + 0.01)^{1/2}$ (в а. е.), обеспечивающим энергию связи $I \approx 0.98Ry$, где Ry – постоянная Ридберга. Расстояние от центра расчетной сетки до ее границ вдоль оси z составляло $3eE_0/m\omega^2$ (где E_0 и ω – амплитуда и частота поля, m – масса электрона), расстояние до боковой границы равнялось 25 а. е. Для подавления отражения волнового пакета у границ сетки располагался слой с плавно изменяющимся поглощением.

Электрическое поле задавалось как поле импульса с супергауссовым фронтом. Пиковая интенсивность изменялась от 0.0014 до 0.006 а. е. (от $4.9 \cdot 10^{13}$ до $2.1 \cdot 10^{14}$ Вт \times см $^{-2}$) с шагом 0.0001 а. е. Часть этого импульса показана на рис. 1 вместе с некоторыми результатами расчетов при интенсивности 0.004 а. е., лежащей на границе между областями туннельной и надбарьерной ионизации.

На рис. 1 представлены: $N_s = \langle \psi(t) | \psi(t) \rangle$ – вероятность того, что к моменту времени t электрон не вышел за пределы расчетной сетки; нормированная населенность $N_0 = |\langle \psi_0 | \psi(t) \rangle|^2$ основного состояния ψ_0 ; средняя сила, действующая со стороны ядра на электрон, $f(t) = -E - \langle \psi(t) | \partial V / \partial z | \psi(t) \rangle$ и напряженность электрического поля световой волны E .

На рис. 2 показаны амплитуды нечетных гармоник силы g_n , вычисленные на двух полупериодах в плоской части возбуждающего импульса при интенсивности $u = 0.0039$ а. е. Обращает на себя внимание кажущаяся нерегулярность спектральной структуры. Зависимости $|g_n|^2$ от интенсивности u для некоторых гармоник приведены на рис. 3.

Все зависимости $|g_n(u)|^2$, по крайней мере до 55-й гармоники, имеют глубокую, почти стопроцентную, модуляцию. Интересно, что промодулированы, хотя и слабее, и гармоники низких порядков с энергией кванта, меньшей, чем энергия ионизации атома (лишь третья гармоника почти не промодулирована). Частота модуляции медленно меняется с номером гармоники и в области туннельной ионизации почти не зависит от интенсивности. Отсюда ясно, что при $u \sim \exp(-r^2)$ зависимость $|g_n(r)|^2$ с хорошей точностью описывает картину интерференции двух осесимметричных световых пучков, обладающих разной расходимостью и сравнимыми интенсивностями. Это обстоятельство весьма полезно для предсказания пространственной структуры поля гармоник, генерируемых в макроскопической среде, а его интерпретация является принципиальной задачей микро-

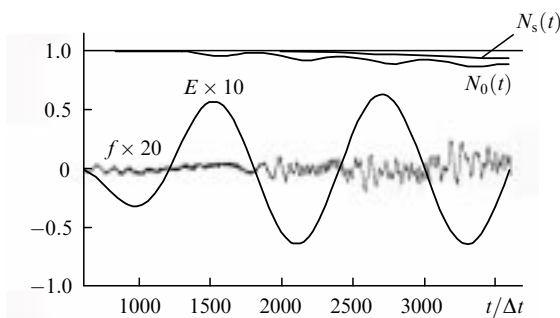


Рис. 1. Временные зависимости напряженности электрического поля E (в а. е.), N_s (в отн. ед.), нормированной населенности N_0 (в отн. ед.) и средней силы f (в а. е.), действующей на электрон (Δt – временной шаг в расчетах).

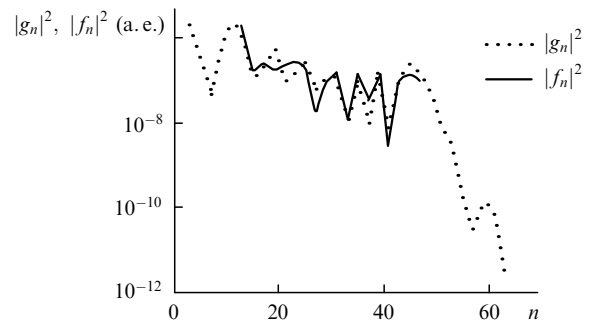


Рис. 2. Зависимости рассчитанных численно амплитуд нечетных гармоник g_n и рассчитанных аналитически средних сил f_n от номера гармоники.

теории исследуемого явления.

Сравнение результатов расчета с результатами, полученными методом последовательных приближений с помощью аналитических формул [6], показывает, что последние удовлетворительно описывают структуру зависимостей $|g_n(u)|^2$ для гармоник с высокими номерами (приблизительно, начиная с 25-й), причем согласие наблюдается не только в области туннельной, но и в области надбарьерной ионизации. Абсолютные значения амплитуд, предсказываемых аналитическими формулами, оказываются сильно (грубо говоря, на порядок) заниженными, причем в области $n \geq 25$ расхождения уменьшаются с увеличением номера гармоники. Тот факт, что аналитическая теория предсказывает интенсивности гармоник, сильно заниженные по сравнению с полученными экспериментально, неоднократно отмечался ранее и объяснялся многоэлектронной природой генерирующих атомов. На самом деле он, по-видимому, связан с использованием в теории относительно грубого первого приближения. В этом приближении сильно переоценивается скорость распыливания волнового пакета после ионизации (из-за того, что его стартовые размеры оказываются заниженными, а влияние кулоновских сил на него

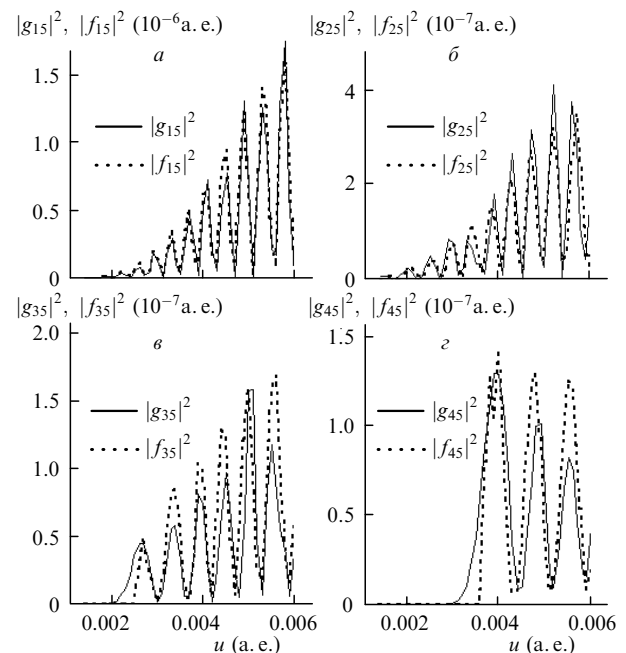


Рис. 3. Зависимости рассчитанных численно амплитуд нечетных гармоник g_n и рассчитанных аналитически средних сил f_n от интенсивности возбуждающего излучения при $n = 15$ (а), 25 (б), 35 (в) и 45 (з).

не учитывается). Характер зависимостей, представленных на рис.1 (заметное «отставание» кривой $N_s(t)$ от кривой $N_0(t)$) показывает, что в действительности скорость расплывания не слишком велика.

В практическом плане феноменологический подход, основанный на использовании полуклассического приближения, оказывается более гибким и позволяет «конструировать» формулы для амплитуд, состоящие из отдельных элементов, которые учитывают различные стороны исследуемого явления. Далее мы конструируем эти формулы, руководствуясь как известными результатами полуклассической теории ГГВП [4, 6], так и характером осцилляций в зависимостях $f(t)$ (см. рис.1). Амплитуда этих осцилляций в пределах полупериода меняется неожиданно медленно. Ее изменение от полупериода к полупериоду коррелирует с вероятностью ионизации в предшествующие моменты времени (отстоящие приблизительно на три четверти периода). Частота осцилляций максимальна вблизи узлов поля – в точках, близких к предсказываемым полуклассической теорией. В спектрах в начальной части плато амплитуды гармоник значительно больше, чем в области отсечки. Ширина плато в области туннельной ионизации растет в соответствии с полуклассической теорией, затем этот рост несколько замедляется.

Основным средством тестирования конструируемых формул является их сравнение с расчетными зависимостями, показанными на рис.3.

2. Теоретический анализ

В полуклассической теории излучение гармоник рассматривается как периодически повторяющийся сложный процесс, который включает в себя ионизацию, стадию свободного движения электрона в поле световой волны и излучательную рекомбинацию с возвращением электрона в исходное состояние. Предполагается, что ионизация и рекомбинация протекают мгновенно, скорость электрона непосредственно после ионизации равна нулю, траектория свободного электрона начинается и заканчивается в точке $r = r_1$ вблизи ядра (обычно полагается, что $r_1 = 0$) и определяется классическими уравнениями движения, в которых кулоновские силы не учитываются. Тем самым энергия излучаемого кванта (сумма энергии I ионизации и кинетической энергии ε , приобретенной на стадии свободного движения) однозначно определяется фазой поля, при которой происходит ионизация. Дискретный спектр гармоник формируется за счет периодичности процесса, причем генерируются только четные гармоники.

Электрон возвращается после свободного полета в исходную точку r_1 , если момент ионизации t_i лежит в интервале $(NT/2, NT/2 + T/4)$, где N – целое число, T – период поля (предполагается, что поле осциллирует как $\cos \omega t$). Далее будем считать, что $N = 0$. Момент t_i , момент рекомбинации t_r и кинетическая энергия ε рекомбинирующего электрона связаны со временем свободного полета τ соотношениями [6]

$$\omega t_i(\tau) = \arctan \frac{1 - \cos \omega \tau}{\omega \tau - \sin \omega \tau}, \quad (1)$$

$$t_r(\tau) = t_i(\tau) + \tau, \quad (2)$$

$$\varepsilon(\tau) = U \frac{(2 - 2 \cos \omega \tau - \omega \tau \sin \omega \tau)^2}{1 - \cos \omega \tau - \omega \tau \sin \omega \tau + \omega^2 \tau^2 / 2}, \quad (3)$$

где U – пондеромоторная энергия электрона. Максимум функции $\varepsilon(\tau)$ расположен в точке $\tau_{\max} \approx 4.1/\omega$ и составляет около $3.17U$. Важно, что при энергии $n\hbar\omega$, лежащей между потенциалом ионизации I и максимальным значением $I + \varepsilon(\tau)$, уравнение

$$n\hbar\omega = I + \varepsilon(\tau) \quad (4)$$

имеет на отрезке $(0, T)$ два корня $\tau_a(n)$ и $\tau_b(n)$, расположенные в интервалах $(T/4, \tau_{\max})$ и (τ_{\max}, T) . Соответствующие этим корням t_i и t_r далее обозначаются как t_{ia}, t_{ib} и t_{ra}, t_{rb} . Уравнение (4) может иметь корни и вне отрезка $(0, T)$, но они играют второстепенную роль. В основном электроны, ионизируемые в интервале $(0, T/4)$, излучают в интервале $(T/2, T)$.

Таким образом, излучению кванта n -й гармоники соответствуют две траектории. Поля, излучаемые при его движении по этим траекториям, интерферируют. Обычно об этой интерференции говорят как об интерференции траекторий. Соответственно амплитуда n -й гармоники силы, действующей со стороны ядра на электрон, может быть представлена в виде суммы

$$f_n = a_n + b_n, \quad (5)$$

слагаемые которой связаны с траекториями электрона, отвечающими корням τ_a и τ_b . Действительно, в соответствии с идеологией полуклассической теории ГГВП временную зависимость $f(t)$ можно представить в виде

$$f(t) = f^-(t) + \text{компл. сопр.}, \quad (6)$$

$$f^-(t) = F(t) \exp\left(-i \int \Omega dt\right) = \sum_n f_n \exp(-in\omega t),$$

где $F(t)$ – медленно меняющаяся амплитуда (изменяющая знак в экстремумах поля); $\Omega(t) = [I + \varepsilon(\tau(t))]/\hbar$; $\tau(t)$ – функция, обратная $t_r(\tau)$ (см. (1), (2)). Явный вид функции $\Omega(t)$ далее не существует, важно лишь то, что на каждом полупериоде она дважды принимает значение $n\omega$ (в точках $t_{ra}(n)$ и $t_{rb}(n)$). Окрестности этих точек вносят основной вклад в фурье-амплитуду f_n . Несложный анализ, основанный на интегрировании методом стационарной фазы, показывает, что, по крайней мере, для гармоник с частотами, далекими от I/\hbar и от $(I + \varepsilon_{\max})/\hbar$, в (5)

$$a_n = f^-(t_{ra}) \exp(in\omega t_{ra}) \omega [2/(\pi |\dot{\Omega}(t_{ra})|)]^{1/2}. \quad (7)$$

Выражение для амплитуды b_n имеет аналогичный вид. (Такое представление наиболее адекватно отражает характер «экспериментальной» зависимости $f(t)$, показанной на рис.1, в начальной ее части. С течением времени эта зависимость становится несколько более сложной. Это обусловлено тем, что при некоторых t_i , электрон возвращается к атомному остатку, по крайней мере, дважды. Такие электроны обладают малой энергией и вносят в зависимость $f(t)$ низкочастотные «искажения», но слабо влияют на амплитуды гармоник.)

Чтобы найти a_n (7), используем следующее ключевое предположение. В моменты времени, близкие к $t_{ra}(n)$, волновая функция электрона вблизи ядра может быть приближенно представлена в виде суперпозиции основного состояния и плоского волнового пакета:

$$\psi_n \approx N_0^{1/2} \psi_0 \exp\left(\frac{iIt}{\hbar}\right) + \left(\frac{K_n N_{an}}{S_{an} L_{an}}\right)^{1/2} \exp\left[\frac{is_{an}(t, z)}{\hbar}\right], \quad (8)$$

где S_{an} и L_{an} – сечение и длина волнового пакета, образовавшегося в процессе ионизации на интервале времени $(t_{ia}(n-1), t_{ia}(n+1))$ и эволюционирующего в свободном пространстве до момента $t_{ra}(n)$; N_{an} – число электронов в этом пакете; K_n – безразмерный корректирующий множитель, учитывающий сжатие пакета кулоновскими силами; s_{an} – действие, определяемое выражением

$$s_{an}(t, z) = It_{ia} - \int_{t_{ia}}^t \frac{1}{2m} \left(p + \frac{e}{c} A\right)^2 dt' + \left(p + \frac{e}{c} A\right)(z - z_{an});$$

A – векторный потенциал; $p = -(e/c)A(t_{ia})$ – канонический импульс;

$$z_{an} = \frac{I}{2eE(t_{ia})} + \left\{ \left[\frac{I}{2eE(t_{ia})} \right]^2 - \frac{e}{E(t_{ia})} \right\}^{1/2}$$

– координата точки, в которую электрон туннелирует в момент t_{ia} и возвращается в момент t_{ra} после свободного полета. Действие $s_{an}(t, z)$ определено так, что при $t = t_{ia}$ фаза свободного волнового пакета в точке $z = z_{an}$ совпадает с фазой связанного состояния.

Вычисляя среднее значение силы $-e^2 z/r^3$ в состоянии (8) и используя формулы (6) и (7), можно выразить амплитуду a_n через параметры состояния (8) и производную $\dot{\Omega}(t_{ra})$. В знаменателе получаемого выражения содержится величина $(|\dot{\Omega}(t_{ra})| L_{an})^{1/2}$. Чтобы исключить ее, положим, что частота Ω меняется от $(n-1)\omega$ до $(n+1)\omega$ за время $L_{an} m/p_n$, где $p_n = [2m(\hbar\omega - I)]^{1/2}$. В итоге получаем

$$a_n = \exp[i\phi_a(n)] F_n \left(\frac{K_n N_0 N_{an} \pi r_0^2}{S_{an}} \right)^{1/2}, \quad (9)$$

где r_0 – боровский радиус;

$$\phi_{an} = -2 \frac{U}{\hbar} \int_{t_{ia}}^{t_{ra}} (\sin \omega t - \sin \omega t_{ia})^2 dt + n_0 \omega (t_{ia} - t_{ra}) + n \omega t_{ra} + \frac{p_n z_{an}}{\hbar}; \quad (10)$$

$$n_0 = \frac{I}{\hbar \omega};$$

$$F_n = - \left(\frac{m \omega}{\pi^2 r_0^2 p_n} \right)^{1/2} \left\langle \psi_0 \left| \frac{e^2 z}{r^3} \right| \exp\left(-i \frac{p_n z}{\hbar}\right) \right\rangle$$

– величина, имеющая размерность силы и зависящая только от номера гармоники и частоты поля. Для атома водорода

$$F_n = i \frac{e^2}{r_0^2} \left(\frac{8}{\pi n_0} \right)^{1/2} \left(\frac{n_0}{n - n_0} \right)^{5/4} \times \left[\left(\frac{n - n_0}{n_0} \right)^{1/2} - \arctan \left(\frac{n - n_0}{n_0} \right)^{1/2} \right]. \quad (11)$$

При малых $n - n_0$ сила (11) пропорциональна $(n - n_0)^{1/4}$.

Поскольку время свободного полета τ_a , как правило, велико, сечение S_{an} естественно определить соотношением $S_{an} = \pi(p_r^2/m^2)\tau_a^2(n)$, где p_r^2 – средний квадрат поперечной составляющей импульса после ионизации. Для туннельного режима в [7] получено выражение $p_r^2 = p_0^2 E/E_0$, где $p_0^2 = 2mI$ и $E_0 = (I/Ry)^{1/2} e/r_0^2$ (коэффициент $(I/Ry)^{1/2}$ записывается здесь для общности). В итоге оказывается, что

$$S_{an} = \pi r_0^2 E(t_{ia}) \left[\frac{p_0 \tau_a(n)}{m} \right]^2 \frac{(Ry/I)^{1/2}}{e}. \quad (12)$$

Заметим, что отношение $S_{an}/\pi r_0^2$ всегда велико, т.е. свободный волновой пакет сильно расплывается. Естественно предположить, что кулоновские силы приводят к некоторому стягиванию пакета к оси, не обязательно однородному и особенно существенному при малых p_n , когда пакет медленно проходит область силового центра. Это стягивание можно рассматривать как рассеяние на кулоновском центре, поэтому корректирующий множитель K_{an} должен быть связан с сечением рассеяния. Представляется естественным записать его в виде

$$K_{an} = 1 + \frac{S_{sc}(p_n)}{\pi r_0^2} \kappa, \quad (13)$$

где

$$S_{sc}(p_n) = 4\pi r_0^2 \left(\frac{n_0}{n - n_0} \right)^2$$

– сечение рассеяния классического электрона с импульсом p_n на угол, превышающий $\pi/2$; константа κ , по предположению, близка к единице и определяется путем подгонки (см. ниже).

Число электронов в пакете

$$N_{an} = N_0(t_{ia}(n)) w_a(E(t_{ia}(n))) |t_{ia}(n+1) - t_{ia}(n-1)|, \quad (14)$$

где $w_a(E)$ – скорость ионизации. Последняя рассматривается как мгновенная функция напряженности поля. Естественно, это приближение не может не привести к некоторым трудностям. Мы полагаем, что скорость ионизации адиабатически отслеживает напряженность поля лишь в области максимума последней. Соответственно в моменты времени t_{ib} , которые всегда лежат в области максимума, скорость $w_a(E)$ может быть оценена по известной формуле [8] для скорости ионизации атома водорода в постоянном поле: $w_0(E) = (2I/\hbar)(4E_0/E) \times \exp(-2E_0/3E)$. (Эта формула несправедлива лишь в области высоких интенсивностей, при надбарьерной ионизации.) Траектории же, соответствующие корню τ_a , обладают следующей особенностью: чем выше интенсивность и чем ниже номер гармоники, тем меньше напряженность $E(t_{ia})$ поля в момент ионизации (и тем быстрее она меняется). В случае гармоник с номерами, близкими к n_0 , оценка $w_a(E(t_{ia}))$ по этой или по любой другой приближенной формуле, не учитывающей немгновенный характер ионизации, неизбежно должна приводить к заниженным значениям. По этой причине далее предполагается, что

$$w_a(E(t_{ia})) = w_a(E(t_{ia} - \delta t)), \quad (15)$$

где δt – подгоночный параметр (ниже используется $\delta t =$

\hbar/I).

Предполагается также, что амплитуда b_n в (5) определяется формулами, которые получаются из (9)–(15) заменой $a \rightarrow b$. Параметр δt (при выбранном его значении) на амплитуды b_n практически не влияет.

Выбор параметра κ в (13) облегчается тем обстоятельством, что в области $n \approx n_{\max}$ выбранное δt почти не влияет и на амплитуды a_n , так что κ остается единственным свободным параметром, определяющим амплитуды. Хорошее согласие величин $|f_n|^2$, рассчитанных по приведенным формулам и найденных численным решением уравнения Шредингера, можно получить, положив $\kappa = 2$. Влияние этого коэффициента возрастает с уменьшением номера гармоники и начинает сказываться, грубо говоря, при $n = 45$. Если положить его равным нулю, то величины $|f_n|^2$ с минимальными номерами ($n = 13, 15$) оказываются заниженными на один-полтора порядка. На структуру зависимостей $|f_n|^2$ от интенсивности κ не влияет.

И наоборот, параметр δt в (15) определяет структуру этих зависимостей. Если положить его равным нулю, то амплитуды a_n в области $n \leq 31$ оказываются заниженными по сравнению с амплитудами b_n , и, как это следует из (5) и (9), осцилляции в зависимостях $|f_n|^2$ от интенсивности ослабевают, а при n , близких к n_0 , почти исчезают. Значение $\delta t = \hbar/I$ (не противоречащее здравому смыслу) обеспечивает глубокую модуляцию в указанных зависимостях вплоть до $n = 13$ (первая гармоника с $n > n_0$) и почти не влияет на вид зависимостей при $n > 31$.

В заключение отметим, что применительно к последней из гармоник, принадлежащих плато, проведенные рассуждения не вполне корректны. Более подробный анализ показывает, что для этой гармоники в (14) вместо $t_{ia}(n+1)$ следует записать $t_{ia}(n)$, если уравнение (4) имеет $(n+1)$ -й корень. Если такой корень отсутствует, необходимо, кроме того, умножить амплитуду f_n на $0.5^{1/2}$.

В области надбарьерной ионизации полученные формулы неприменимы, но ниже они используются и в ней. Если при этом координата z_{an} (z_{bn}) оказывается комплексной величиной, она заменяется на координату $[eE^{-1}(t_{ia})]^{1/2}$ ($[e/E(t_{ib})]^{1/2}$).

В соответствии с изложенным выше, вычисление амплитуды n -й гармоники проводится в два этапа. Вначале ищутся корни τ_a и τ_b трансцендентного уравнения (4) в интервале $(0, T)$ и с помощью соотношений (1) и (2) определяются величины t_{ia} , t_{ib} , t_{ra} и t_{rb} . Затем используются формулы (5), (9)–(15) и аналогичные формулы для амплитуды b_n . Ниже получаемые таким образом результаты называются аналитическими.

3. Обсуждение результатов

В области туннельной ионизации ($u < 0.004$ а. е.) полученные аналитические зависимости $|f_n|^2$ от интенсивности хорошо согласуются с рассчитанными численно. Согласие наблюдается для всех гармоник. Частоты осцилляций в этих зависимостях совпадают с погрешностью порядка процента, амплитуды отличаются не более чем в полтора раза. Заметим, что фазы (10) вычисляются без использования подгоночных параметров и по более надежным формулам, чем абсолютные величины амплитуд (последние зависят, в частности, от относительно грубо определяемой вероятности ионизации).

В области надбарьерной ионизации глубина и ампли-

туда осцилляций в аналитических зависимостях также согласуются с численными результатами. Частота же осцилляций в этой области оказывается завышенной. Чтобы согласовать аналитические зависимости с расчетными и в данной области, мы умножили разность фаз $\phi_{an} - \phi_{bn}$ на величину $\alpha_n(u)$, отличную от единицы при $u > 0.004$ а. е. Полученные таким путем зависимости для гармоник с номерами $n = 15, 25, 35$ и 45 показаны на рис.3 вместе с зависимостями $|g_n(u)|^2$, рассчитанными численно. При $n = 15, 25$ и 35 использовалось соотношение $\alpha_n(u) = 1 - 2.4n(u - 0.004)\Phi(u - 0.004)$, где Φ – ступенчатая функция Хевисайда; $\alpha_{45}(u) = 0.62$. На рис.2 показаны спектры силы, рассчитанные численно и по аналитическим формулам при интенсивности 0.0039 а. е.

Заметим, что гармоники с высокими номерами генерируются преимущественно (а начиная с гармоники с $n = 49$, – исключительно) в области надбарьерной ионизации. Тем не менее необходимости в какой-либо дополнительной коррекции используемых формул для амплитуд a_n и b_n (кроме корректировки их фаз) при больших n , вплоть до $n = 61$, не возникало. Для таких гармоник множитель (13) близок к единице, а параметр δt почти не влияет на скорость ионизации (15), поэтому элемент подгонки в оценках абсолютных величин амплитуд a_n и b_n практически исключен. Лишь на краю расчетного диапазона интенсивностей в численных расчетах заметен спад в росте ширины плато с увеличением интенсивности, а аналитические оценки амплитуд при $n > 61$ оказываются завышенными по сравнению с численными результатами.

Хотя проведенный выше анализ относился к атому водорода, он допускает вполне очевидные обобщения. В этом смысле важно, что анализ имеет структурированный характер, а от свойств конкретного атома в полученных выражениях сильно зависит лишь вероятность ионизации. Вопрос о вероятности ионизации в туннельном режиме исследовался в [7, 9, 10] и ряде других работ (обычно в них ищется вероятность, усредненная по периоду; формулы для нее содержат дополнительный коэффициент $(3E/\pi E_0)^{1/2}$). Используя результаты указанных работ, можно обобщить развитую теорию на случай многоэлектронных атомов. Для атома гелия можно сохранить найденные формулы без изменений.

В области туннельной ионизации полученные формулы определяют амплитуды гармоник высокого порядка значительно точнее, а расчеты по ним значительно проще, чем в методе последовательных приближений. В связи с этим указанные формулы в большей мере применимы для исследования сложных вопросов, связанных с ГГВП в макроскопических средах и требующих многократного вычисления амплитуд. В этом случае представление амплитуды гармоники в виде суммы (5) особенно полезно. Можно считать [6], что слагаемые этой суммы соответствуют двум независимым друг от друга волнам с разной структурой волновых фронтов и разной расходимостью. Эти волновые фронты определяются зависимостью фаз ϕ_{an} и ϕ_{bn} от координат макроскопического пространства. Примеры зависимостей ϕ_{an} и ϕ_{bn} от интенсивности приведены на рис.4.

Выводы

Таким образом, путем численного решения уравнения Шредингера исследована зависимость гармоник

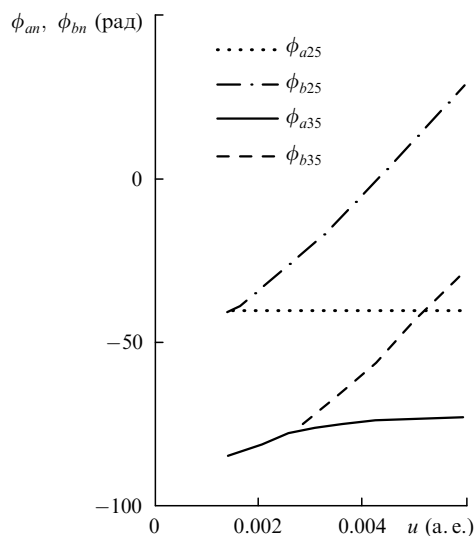


Рис.4. Зависимости фаз ϕ_{an} и ϕ_{bn} от интенсивности возбуждающего излучения, рассчитанные с помощью формулы (10), при $n = 25$ и 35 .

атомного отклика на поле световой волны от интенсивности последней. Показано, что в случае атома водорода при длине волны возбуждающего излучения $\lambda = 1.06$ мкм, зависимости амплитуд всех гармоник, начиная с 5-й и, по крайней мере, до 55-й, имеют глубокую (в случае гармоник высокого порядка – почти стопроцентную) модуляцию.

Проведен теоретический анализ ГГВП, основанный на полуклассической теории явления и учитывающий ряд дополнительных соображений. Получены аналитические формулы для амплитуд гармоник высокого порядка, хорошо согласующиеся с результатами численных расчетов в области туннельной ионизации и удовлетворительно – в области надбарьерной.

Работа поддержана РФФИ (грант № 96-15-96460 по поддержке научной школы по когерентной и нелинейной оптике С.А.Ахманова и Р.В.Хохлова и грант № 99-02-16489).

1. Tamaki Y., Itatani J., Nagata Y. et al. *Phys.Rev.Letts*, **82**, 1422 (1999).
2. Платоненко В.Т., Стрелков В.С. *Квантовая электроника*, **30**, 236 (2000).
3. Becker W., Long S., Melver J.K. *Phys.Rev.A*, **50**, 1540 (1994).
4. Levenstein M., Balcou P., Ivanov M. et al. *Phys.Rev.A*, **49**, 2117 (1994).
5. Corcum P.V. *Phys.Rev.Letts*, **71**, 1994 (1993).
6. Платоненко В.Т., Стрелков В.С. *Квантовая электроника*, **25**, 582 (1998).
7. Переломов А.М., Попов В.С., Терентьев М.В. *ЖЭТФ*, **51**, 309 (1966).
8. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М., Наука, 1989).
9. Переломов А.М., Попов В.С., Терентьев М.В. *ЖЭТФ*, **50**, 1393 (1965).
10. Амосов М.В., Делоне Н.Б., Крайнов В.П. *ЖЭТФ*, **91**, 2008 (1986).