

# Оптимальное управление параметрами оптических солитонов.

## Ч.1. Представление Лакса в проблеме солитонного менеджмента

В.Н.Серкин\*, Т.Л.Беляева\*\*

*Показано существование при определенных условиях представления Лакса для модели солитонного менеджмента, что доказывает полную интегрируемость этой модели. Получены точные аналитические решения для задачи оптимального управления параметрами шредингеровских солитонов в неконсервативных системах с изменяющимся по длине дисперсией групповой скорости, нелинейностью показателя преломления и коэффициентом усиления (поглощения). Рассмотрены важные с практической точки зрения примеры, демонстрирующие нетривиальную динамику усиления оптических солитонов. В качестве примеров получены точные аналитические решения для задач об оптимальном усилении солитонов в волоконных световодах с монотонно уменьшающейся дисперсией и о рамановской подкачке солитонов в волоконно-оптических линиях связи.*

**Ключевые слова:** оптические солитоны, нелинейные волны, солитонный менеджмент.

### 1. Введение

Проблема управления параметрами оптических солитонов имеет довольно длительную историю своего развития. Уже пионерские эксперименты Молленауэра, Столена и Гордона [1] показали, что одним из простейших методов управления параметрами оптических солитонов является многосолитонная компрессия с последующей спектральной фильтрацией ультракоротких фрагментов излучения [1–4]. Использование каскадных схем компрессии  $N$ -солитонных импульсов в двух отрезках кварцевых волоконных световодов с существенно различающимися аномальными дисперсиями позволило получить остающиеся рекордными и по сей день волновые пакеты с предельной длительностью 18–19 фс, содержащие под своей огибающей всего лишь три периода электромагнитного поля [5].

Впервые созданные в Институте общей физики РАН волоконные световоды с непрерывно изменяющейся по длине дисперсионной характеристикой (зависимостью суммарной дисперсии световода от длины волны [6]) стимулировали разработку эффективных методов адиабатической компрессии солитонов и открыли возможность создания генераторов высокочастотных последовательностей оптических солитонов для волоконно-оптических линий связи [6–8]. Использование различных комбинаций волоконных световодов с периодически чередующимися знаками дисперсии (fiber dispersion management) привело к созданию солитонных линий передачи инфор-

мации со спектральным уплотнением каналов и быстрым действием 40 Гбит/с.

Проблема оптимального управления параметрами оптических солитонов как идеальных носителей бита информации, называемая также проблемой солитонного менеджмента, в настоящее время выдвинулась на одно из центральных мест. Детальный анализ современного состояния как эксперимента, так и теории в этой бурно развивающейся области науки и техники можно найти в недавно вышедшей книге [9], в которой представлены исследования практически всех научных групп и фирм, лидирующих в настоящий момент в разработке методов передачи информации оптическими солитонами.

Математическая задача солитонного менеджмента соответствует поиску солитоноподобных решений нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) в замкнутой или незамкнутой линии с изменяющимися по длине параметрами, такими, например, как дисперсия групповой скорости, нелинейность показателя преломления, коэффициенты линейных потерь излучения и периодического усиления солитона в линии передачи.

Настоящая работа посвящена доказательству того факта, что при определенных условиях модель НУШ с переменными коэффициентами является полностью интегрируемой. Найденные решения в виде солитонных импульсов с нетривиальным законом изменения фазы и канонической формой в виде гиперболического секанса или тангенса существуют только при определенной связи между параметрами нелинейной системы и каналируемого солитона. Полученные закономерности выдвигают в число первоочередных задач техническую разработку и создание новых волоконных световодов с заданным законом изменения основных параметров по длине.

Авторы видят свою главную задачу прежде всего в иницировании новых экспериментальных работ. Этим и определяется характер представления основных результатов, позволяющий заинтересованному читателю легко повторить соответствующие выкладки и самостоятельно подобрать так называемую карту параметров для

\*Институт общей физики РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38 (адрес в настоящее время: Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Instituto de Ciencias, A.P. 502, 72001 Puebla, Pue., Mexico; e-mail: vserkin@hotmail.com)

\*\*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Россия, 119899 Москва, Воробьевы горы (адрес в настоящее время: Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Instituto de Ciencias, A.P. 502, 72001 Puebla, Pue., Mexico; e-mail: vserkin@hotmail.com)

каждого конкретного эксперимента. Специфика полученных результатов состоит в том, что открытое бесконечное множество («океан») новых солитонных решений модели НУШ позволяет, зная из эксперимента, например, закон изменения дисперсии по длине световода, легко рассчитать остальные необходимые параметры задачи. При этом главная задача в эксперименте состоит в том, чтобы находиться как можно ближе к оптимальной карте параметров, при которых задача солитонного менеджмента, как показано в данной работе, оказывается точно интегрируемой.

Данная работа состоит из двух частей. В первой части получено представление Лакса для модели солитонного менеджмента и найдены условия, при которых задача оказывается полностью интегрируемой. Во второй части работы получена нелинейная теорема Блоха для оптических солитонов и анализируется устойчивость  $N$ -солитонных временных волн Блоха (связанных состояний) в периодической нелинейной и диспергирующей системе.

## 2. Представление Лакса в модели солитонного менеджмента

Современный прогресс в теории нелинейных волн обусловлен прежде всего созданием и применением аппарата обратной задачи теории рассеяния, называемого по именам его создателей методом спектральной задачи Захарова–Шабата [10] или Абловица–Каупа–Ньюэлла–Сегура [11]. Было доказано, что если для нелинейного волнового уравнения найти так называемое представление Лакса [12], то решение этого уравнения находится методом обратной задачи теории рассеяния (см., напр., [12–20] и цитируемую в [13–20] литературу). Существование представления Лакса доказывает полную интегрируемость рассматриваемой модели.

Следует подчеркнуть, что проблема классификации уравнений, обладающих свойством полной интегрируемости, имеет довольно длительную историю развития. Наиболее полно проблемы, затронутые в настоящей статье, отражены в работах М.Абловица и Х.Сигура [13], Р.Буллафа и Ф.Кодри [14], А.Ньюэлла [15], В.Е.Захарова [16], Ф.Калоджеро и А.Дегаспиреса [17], Л.Д.Фаддеева [18], В.Е.Захарова, С.В.Манакова, С.П.Новикова и Л.П.Питаевского [19].

Общая алгебраическая формулировка задачи ставится следующим образом. Попытаемся написать НУШ с переменными коэффициентами как условие интегрируемости пары линейных уравнений. Представим два линейных дифференциальных оператора, являющихся функциями спектрального параметра  $\lambda$ , в виде

$$\hat{\mathcal{L}}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial x} - \hat{L}\left(\lambda, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n q}{\partial x^n}\right), \quad (1)$$

$$\hat{\mathcal{T}}(\lambda) = \frac{\partial}{\partial t} - \hat{A}\left(\lambda, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n q}{\partial x^n}\right), \quad (2)$$

где  $\hat{L}$  и  $\hat{A}$  –  $n \times n$ -матрицы;  $q(x, t)$  – искомый потенциал. Для комплексной  $n$ -компонентной векторной функции  $\psi(x, t) = \{\psi_1, \dots, \psi_n\}$  дифференциальные операторы (1) и (2) удовлетворяют системе уравнений

$$\hat{\mathcal{L}}(\lambda)\psi(x, t) = 0, \quad (3)$$

$$\hat{\mathcal{T}}(\lambda)\psi(x, t) = 0. \quad (4)$$

Уравнение (3) известно как спектральная задача для оператора  $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$ , тогда как уравнение (4) определяет временную эволюцию данных рассеяния при  $t > 0$ . Подчеркнем, что здесь и ниже в данном разделе мы используем пространственно-временные переменные  $x$  и  $t$ , как это обычно принято при квантовомеханическом подходе к задачам рассеяния на потенциале  $q(x, t)$ , а сама постановка задачи имеет глубокие квантовомеханические аналогии [13]. При переходе к проблеме солитонного менеджмента мы используем координатное представление, общепринятое в задачах оптической солитоники.

Условие интегрируемости (совместности) пары линейных уравнений (3), (4) имеет вид

$$[\hat{\mathcal{L}}(\lambda), \hat{\mathcal{T}}(\lambda)] = 0 \quad (5)$$

и означает, что операторы  $\hat{\mathcal{L}}(\lambda)$  и  $\hat{\mathcal{T}}(\lambda)$  суть коммутирующие операторы. В матричной форме уравнение (5) принимает вид

$$\frac{\partial \hat{L}}{\partial t} - \frac{\partial \hat{A}}{\partial x} + [\hat{L}, \hat{A}] = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) должно выполняться для любых значений спектрального параметра  $\lambda$  и известно как представление Лакса, или  $L - A$ -пара, определяющая систему уравнений относительно потенциала рассеяния  $q(x, t)$ .

Ниже мы рассмотрим задачу построения пары Лакса в более общем случае, принимая во внимание тот факт, что переменные в потенциале  $q(x, t)$  могут быть сложными, например взаимозависимыми, функциями. Как будет показано ниже, представление Лакса позволяет получить эвристическую «подсказку» – в каком виде следует искать общее решение задачи для солитонов в средах с варьируемыми параметрами. С помощью замены  $x \rightarrow s(x, t)$ ,  $t \rightarrow t$  перейдем в (1), (2) к сложной функции  $q[s(x, t), t]$  конфигурационных переменных и выберем матрицы  $\hat{L}$  и  $\hat{A}$  в стандартной форме:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} -i\lambda & q(s, t) \\ r(s, t) & i\lambda \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Подстановка (7) в матричное уравнение (6) дает уравнения для потенциалов  $q(s, t)$  и  $r(s, t)$  как функций сложного аргумента  $s(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + 2qA + 2iB\lambda, \\ \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} - 2rA - 2iC\lambda, \\ \frac{\partial A}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} &= qC - rB. \end{aligned} \quad (8)$$

Следуя стандартной процедуре поиска пары Лакса для обычного (с постоянными коэффициентами) НУШ, мы представим функции  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  и  $C(\lambda)$  в виде полиномов степеней  $\lambda$ :

$$A = A_0 + A_1\lambda + A_2\lambda^2 + \dots,$$

$$B = B_0 + B_1\lambda + B_2\lambda^2 + \dots, \quad (9)$$

$$C = C_0 + C_1\lambda + C_2\lambda^2 \dots$$

Чтобы получить НУШ, достаточно ограничиться в (9) квадратичными по  $\lambda$  членами. Уравнение Кортевега – де Фриза (совместно с НУШ) получается при учете кубических членов в разложении матричных элементов по спектральному параметру  $\lambda$ . Для того чтобы получить систему эволюционных уравнений для компонент потенциала  $q(s, t)$  и  $r(s, t)$ , подставим (9) в (8) и приведем подобные члены:

$$\frac{\partial A_0}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = qC_0 - rB_0,$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = qC_1 - rB_1,$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = -2qA_1 - 2iB_0,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = 2rA_1 + 2iC_0,$$

$$qA_2 + iB_1 = 0,$$

$$rA_2 + iC_1 = 0.$$

Уравнения для компонент потенциала  $q(s, t)$  и  $r(s, t)$  непосредственно следуют из (8), (9):

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial B_0}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + 2qA_0, \quad (11)$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial C_0}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} - 2rA_0.$$

Наша задача состоит в том, чтобы найти такие условия, при которых система уравнений (11) сводится к одному (назовем его обобщенным) НУШ с переменными коэффициентами. Из (10) мы получаем следующие выражения для матричных элементов:

$$A_0 = \frac{1}{2} A_2 q r + a_0(t),$$

$$B_0 = iA_1 q - \frac{1}{2} A_2 \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x},$$

$$C_0 = iA_1 r + \frac{1}{2} A_2 \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x}, \quad (12)$$

$$B_1 = iA_2 q,$$

$$C_1 = iA_2 r.$$

В результате система (11) при редукции [16]

$$r = -\beta q^* \quad (13)$$

и выполнении накладываемых на матричные элементы «жестких» условий

$$A_1^*(t) = -A_1(t), \quad A_2^*(t) = -A_2(t), \quad a_0^*(t) = -a_0(t) \quad (14)$$

приводит к полностью интегрируемой обобщенной модели НУШ

$$i \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[ D_2(t) \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 q}{\partial s^2} + N_2(t) |q|^2 q - i \left[ V(t) \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial s}{\partial t} \right] \frac{\partial q}{\partial s} - 2\Gamma(t) q \quad (15)$$

с переменными во времени коэффициентами

$$A_1(t) = iV(t), \quad A_2(t) = iD_2(t), \quad a_0(t) = i\Gamma(t),$$

$$N_2(t) = \beta D_2(t), \quad (16)$$

где функции  $V(t)$ ,  $D_2(t)$ ,  $N_2(t)$ ,  $\Gamma(t)$  являются действительными функциями переменной  $t$ .

Таким образом, представление Лакса для модели солитонного менеджмента имеет следующий вид:

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} -i\lambda & q \\ -\beta q^* & i\lambda \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & -A \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$A = \left[ -\frac{i}{2} \beta D_2(t) |q|^2 + i\Gamma(t) + iV(t)\lambda + iD_2(t)\lambda^2 \right], \quad (19)$$

$$B = \left[ -\frac{i}{2} D_2(t) \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} - V(t)q - D_2(t)q\lambda \right], \quad (20)$$

$$C = \left[ -\frac{i}{2} \beta D_2(t) \frac{\partial q^*}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \beta V(t)q^* + \beta D_2(t)q^*\lambda \right]. \quad (21)$$

Окончательно запишем систему линейных уравнений, решаемую методом обратной задачи рассеяния, в виде

$$\frac{\partial \psi_1(s, t)}{\partial s} = -i\lambda \psi_1 + q(s, t) \psi_2, \quad (22)$$

$$\frac{\partial \psi_2(s, t)}{\partial s} = -\beta q^*(s, t) \psi_1 + i\lambda \psi_2,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_1(s, t)}{\partial t} = & \left[ iD_2(t)\lambda^2 + iV(t)\lambda - \frac{i}{2} \beta D_2(t) |q(s, t)|^2 + i\Gamma(t) \right] \psi_1 \\ & - \left[ D_2(t)q(s, t)\lambda + V(t)q(s, t) + \frac{i}{2} D_2(t) \frac{\partial q(s, t)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \psi_2, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\frac{\partial \psi_2(s, t)}{\partial t} = \left[ \beta D_2(t)q^*(s, t)\lambda + \beta V(t)q^*(s, t) - \frac{i}{2} \beta D_2(t) \right.$$

$$\left. \times \frac{\partial q^*(s, t)}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} \right] \psi_1 + \left[ -iD_2(t)\lambda^2 - iV(t)\lambda \right.$$

$$\left. + \frac{i}{2} \beta D_2(t) |q(s, t)|^2 - i\Gamma(t) \right] \psi_2.$$

### 3. Точные решения для модели солитонного менеджмента

Представление Лакса (17)–(21) для уравнения (15) дает эвристический метод построения общего решения уравнения Шредингера с варьируемыми коэффициентами. Действительно, как следует из (15), (16), задача оказывается полностью интегрируемой, если

$$D_2(t) \left( \frac{\partial s}{\partial x} \right)^2 = \beta D_2(t),$$

откуда следует, что  $s(x, t) = \text{const } x + f(t)$ , где  $f(t)$  – произвольная функция времени, т. е. в общем случае спектральный параметр  $\lambda$  зависит от времени.

Обобщенное НУШ в задаче солитонного менеджмента имеет следующий вид:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = \frac{1}{2} D(Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + N(Z) |\Psi|^2 \Psi - i\gamma_0 \Psi + i\Gamma(Z) \Psi, \quad (24)$$

где  $\gamma_0$  – линейные (пространственно-однородные) потери. Уравнение (24) записано здесь в так называемых канонических переменных, где безразмерная длина распространения импульса  $Z$  нормирована на дисперсионную длину, а поле  $\Psi$  выражается в единицах амплитуды солитонного импульса [21–25]. Введенные в (24) параметры описывают вариации дисперсии  $D(Z)$ , нелинейности  $N(Z)$  и коэффициента усиления  $\Gamma(Z)$  по длине взаимодействия излучения с пространственно-неоднородной системой. В силу хорошо известной пространственно-временной аналогии, уравнение (24) описывает как пространственные солитоны («щелевые» пучки), так и обычные временные солитоны (стационарные импульсы) в зависимости от того, какую переменную представляет  $X$  – время или поперечную координату.

В том случае, когда система, описываемая уравнением (24), является консервативной (потери и усиление отсутствуют), условие ее полной интегрируемости определяется согласно (15), (16) как

$$N(Z) = \beta D(Z) \quad (25)$$

и простейшее решение для солитона без фазовой модуляции (т. е. солитона с тривиальной, линейно зависящей от  $X$  фазой) в собственной системе координат имеет вид

$$\Psi(X, Z) = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \begin{cases} \eta \operatorname{sech}(\eta X) \exp[-0.5i\eta^2 \int_0^Z D(\zeta) d\zeta] \\ \eta \tanh(\eta X) \exp[-i\eta^2 \int_0^Z D(\zeta) d\zeta], \end{cases} \quad (26)$$

где произвольный параметр  $\eta$  введен для определения форм-фактора солитона (26). Верхнее выражение в (26) соответствует светлому солитону, полученному при начальных условиях  $N(Z=0) = \beta D(Z=0)$ , а нижнее – темному солитону, полученному при начальных условиях противоположных знаков  $N(Z=0) = -\beta D(Z=0)$ .

Рассмотрим более подробно случай неконсервативной системы, описываемой полным уравнением (24). Используя подстановку

$$\tilde{\Psi}(X, Z) = \frac{\Psi(X, Z)}{G(Z)}, \quad (27)$$

$$R(Z) = N(Z)G^2(Z), \quad (28)$$

где функция  $G(Z)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G(Z)}{\partial Z} = -\gamma_0 G(Z) + \Gamma(Z)G(Z), \quad (29)$$

запишем уравнение (24) в виде

$$i \frac{\partial \tilde{\Psi}}{\partial Z} = \frac{1}{2} D(Z) \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}}{\partial X^2} + R(Z) |\tilde{\Psi}|^2 \tilde{\Psi}. \quad (30)$$

Как нетрудно видеть, уравнение (30) оказывается полностью интегрируемым тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$R(Z) = \beta D(Z). \quad (31)$$

Таким образом, существуют следующие полностью интегрируемые модели для солитонов в неконсервативных системах:

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = \frac{1}{2} CN(Z) \exp \left[ -2\gamma_0 Z + 2 \int_0^Z \Gamma(\zeta) d\zeta \right] \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + N(Z) |\Psi|^2 \Psi - i\gamma_0 \Psi + i\Gamma(Z) \Psi, \quad (32)$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = \frac{1}{2} D(Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \frac{1}{C} D(Z) \exp \left[ 2\gamma_0 Z - 2 \int_0^Z \Gamma(\zeta) d\zeta \right] \times |\Psi|^2 \Psi - i\gamma_0 \Psi + i\Gamma(Z) \Psi, \quad (33)$$

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial Z} = \frac{1}{2} \Phi(Z) F(Z) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial X^2} + \Phi(Z) |\Psi|^2 \Psi + \frac{i}{2} \Psi \frac{\partial}{\partial Z} \ln F(Z), \quad (34)$$

где функции  $N(Z)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $D(Z)$ ,  $\Phi(Z)$ ,  $F(Z)$  являются произвольными интегрируемыми и дифференцируемыми функциями.

Для полноты анализа приведем в качестве примера простейшее решение уравнения (34) для солитона без фазовой модуляции в собственной системе координат:

$$\Psi(X, Z) = F^{1/2}(Z) \begin{cases} \eta \operatorname{sech}(\eta X) \exp[-0.5i\eta^2 \int_0^Z \Phi(\zeta) F(\zeta) d\zeta] \\ \eta \tanh(\eta X) \exp[-i\eta^2 \int_0^Z \Phi(\zeta) F(\zeta) d\zeta]. \end{cases} \quad (35)$$

Подчеркнем, что солитонные решения уравнений (32)–(34) без фазовой модуляции обладают уникальной особенностью: в процессе усиления (поглощения) они не изменяют своей длительности.

Другим нетривиальным решением для модели (24) являются фазово-модулированные солитоны, впервые предсказанные в работах [26–28]. Рассмотрим эти решения более подробно.

Решение уравнения (30) запишем в следующем виде:

$$\tilde{\Psi}(X, Z) = P^{1/2}(Z) Q[S(X, Z), Z] \exp \left[ i \frac{C(Z)}{2} X^2 \right], \quad (36)$$

где переменная  $S$  – сложная функция  $S = S(X, Z)$ . Отметим, что в (7), (8) и в (36) мы специально используем похожие обозначения  $s(x, t)$  и  $S(X, Z)$  для двух сложных функций, чтобы подчеркнуть существующую глубокую связь между двумя развиваемыми здесь теоретическими методами.

Подстановка (36) в (30) дает для функции  $Q(S, Z)$  нелинейное эволюционное уравнение следующего вида:

$$i \frac{\partial Q}{\partial Z} = \frac{1}{2} DP^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial S^2} + RPQ|Q|^2 - \frac{i}{2P} Q \left( \frac{\partial P}{\partial Z} + DCP \right) - iT \frac{\partial Q}{\partial S} \left( \frac{\partial P}{\partial Z} + DCP \right) - T^2 \frac{Q}{2} \left( \frac{\partial C}{\partial Z} + DC^2 \right). \quad (37)$$

Как нетрудно видеть, представление Лакса (17)–(20) для уравнения (37) существует тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

$$\frac{\partial P}{\partial Z} + DCP = 0, \quad (38)$$

$$\frac{\partial C}{\partial Z} + DC^2 = 0. \quad (39)$$

Теперь нам остается только записать в явном виде условие совместности (разрешимости) системы уравнений (38) и (39):

$$C(Z) = \pm \Theta P(Z), \quad (40)$$

где  $\Theta$  – произвольная константа, которая может принимать любые, в том числе и нулевые, значения. Таким образом, мы получаем бесконечный «океан» солитонных решений для модели солитонного менеджмента (24), впервые найденный в работах [26–28].

Связь с представлением Лакса (17)–(20) устанавливается взаимозависимостью основных параметров:

$$N_2(Z) = R(Z)P(Z), \quad D_2(Z) = D(Z)P^2(Z). \quad (41)$$

Как показано в предыдущем разделе, представление Лакса вида (17)–(20), означающее полную интегрируемость модели НУШ (15), существует тогда и только тогда, когда дисперсия и нелинейность связаны соотношением

$$N_2(Z) = \beta D_2(Z). \quad (42)$$

В рассматриваемой модели солитонного менеджмента представление Лакса, аналогичное (17)–(20), существует тогда и только тогда, когда выполнены более сложные математические условия, которые, однако, открывают большой простор для экспериментальной реализации рассматриваемых явлений. Параметры нелинейной системы – это может быть, например, солитонная линия передачи или хранения информации либо солитонный лазер, также хорошо описываемый моделью (36), (40), – не могут быть произвольными – они должны выбираться в соответствии с двумя основными условиями.

Во-первых, все основные пространственно-зависимые параметры модели (24) должны быть взаимосвязаны:

$$R(Z) = \beta D(Z)P(Z) = N(Z)G^2(0) \times \exp \left[ -2\gamma_0 Z + 2 \int_0^Z \Gamma(\zeta) d\zeta \right]. \quad (43)$$

Во-вторых, решения в виде светлых и темных квазисолитонных импульсов типа (36) с функцией

$$Q(S) = \begin{cases} \eta \operatorname{sech}[\eta P(Z)X] \\ \eta \tanh[\eta P(Z)X] \end{cases} \quad (44)$$

и нетривиальной фазой существует тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$P = P_0 \left[ 1 + P_0 \int_0^Z D(Z') dZ' \right]^{-1}, \quad R = \frac{P(Z)D(Z)}{C_0}. \quad (45)$$

В (45) предполагается, что дисперсионная характеристика  $D(Z)$  системы является произвольной интегрируемой функцией, которую, например, экспериментатор может выбирать по своему усмотрению. Тогда остальные параметры системы – коэффициент усиления и нелинейность – должны удовлетворять условию (45).

В том же случае, когда в конкретном эксперименте удобнее выбрать, например, заданный профиль эффективного параметра нелинейности (или профиль коэффициента усиления в распределенной периодической системе), остальные параметры должны удовлетворять условию

$$P = P_0 \exp \left[ -C \int_0^Z R(Z') dZ' \right], \quad D = \frac{C_0 R(Z)}{P(Z)}. \quad (46)$$

Таким образом, задача оптимального управления параметрами солитонов с помощью пространственно-неоднородных систем оказывается интегрируемой и имеет решения вида (36), (44) при условиях (45), (46).

Чтобы проиллюстрировать нетривиальную динамику полученных решений, приведем ряд конкретных примеров. Модель НУШ с переменными коэффициентами (15) является полностью интегрируемой при условиях (16), накладываемых на основные параметры модели. Солитоны (26) без фазовой модуляции в рамках этой модели, как светлые, так и темные, взаимодействуют упруго и не изменяют своей формы. Они только получают разное ускорение, как это видно из рис.1, 2. На рис.1 и 2,б показана пространственно-временная динамика типа «траппон» светлого и темного солитонов, рассчитанная в параметрической области

$$D_2(t) = \cos t, \quad N_2(t) = \beta \cos t. \quad (47)$$

Динамика взаимодействия солитонов, рассчитанная при параметрах

$$D_2(t) = N_2(t) = 1 - \alpha t, \quad (48)$$

приведена на рис.2 (динамика типа «бумерон»).

Следует подчеркнуть, что решения, представленные на рис.1, 2, по своим качественным особенностям распространения соответствуют траппонам и бумеронам (см. [17], с.336, 337), полученным, однако, для несравнимо более сложных моделей.

Динамику солитонов (26), рассчитанную в рамках модели (47), (48), необходимо сравнить с динамикой фазово-модулированных солитонных решений (36), полученных при параметрах

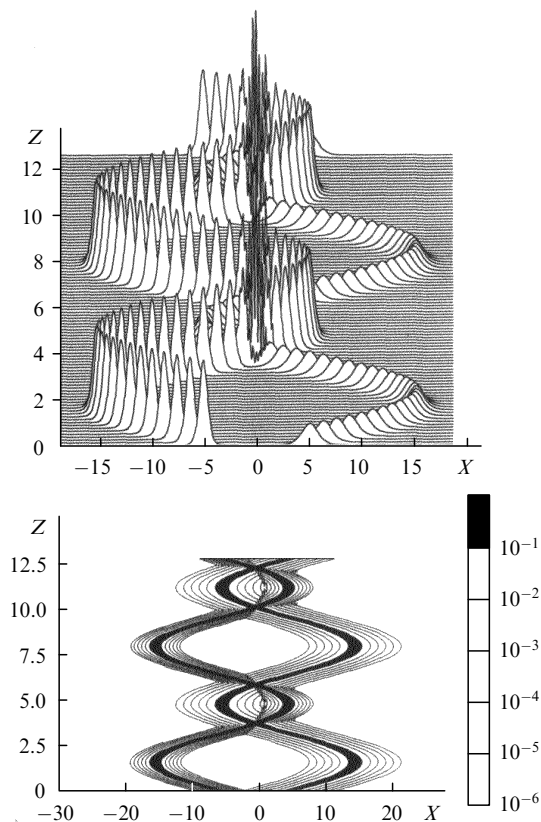


Рис.1. Взаимодействие солитонных решений (26) НУШ (15) в параметрической области (47) при  $\beta = 4.0$  и начальных скоростях солитонов 10.0 и  $-10.0$ .

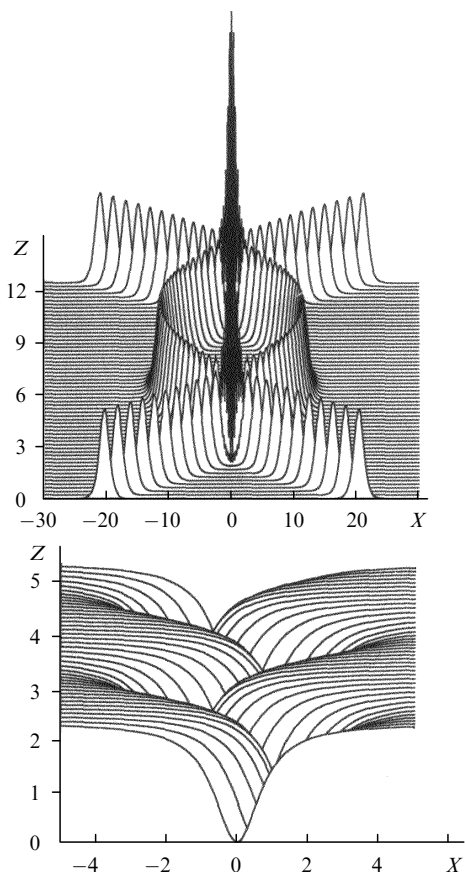


Рис.2. Динамика светлого (а) и темного (б) солитонов (26) в параметрических областях (47) и (48).

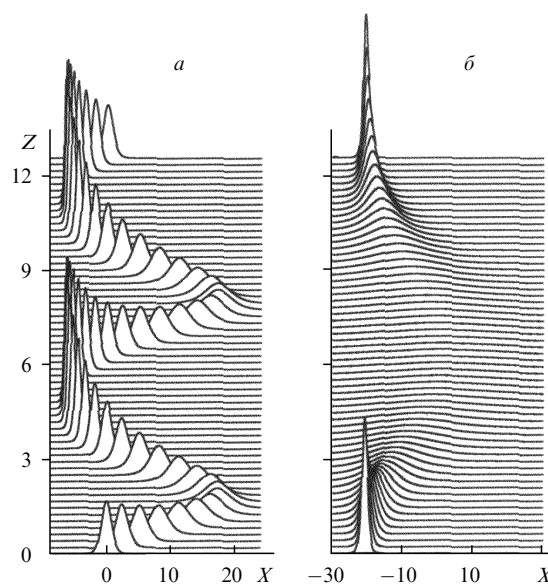


Рис.3. Нелинейная динамика квазисолитона (36) типа «траптон» при параметрах (49) (а) и квазисолитона (36) типа «бумерон» при параметрах (50) (б).

$$R(Z) = \cos Z, \quad D(Z) = \cos Z \exp(\sin Z),$$

$$P(Z) = \exp(-\sin Z) \tag{49}$$

или

$$R(Z) = 1 - \alpha Z, \quad D(Z) = (1 - \alpha Z) \exp\left(Z - \frac{\alpha Z^2}{2}\right). \tag{50}$$

Решения (36) с параметрами (49), (50), представленные на рис.3, получены в областях полной интегрируемости модели (24). Они взаимодействуют упруго, но кардинально отличаются от решений (26) с параметрами (47), (48) тем, что не только получают ускорение, но и изменяют свою длительность и амплитуду. Такое важное отличие обусловлено тем, что решения (36), (49), (50) имеют нетривиальную фазовую модуляцию, определяемую параметром  $P(Z)$ . В этой связи, чтобы отличать их от решений типа (26), (47), (48), показанных на рис.1, 2, целесообразно новые решения называть квазисолитонами, подчеркивая тем самым, что они могут изменять амплитуду, длительность и фазу в неоднородных средах.

Динамика усиления и взаимодействия солитонов без фазовой модуляции (32)–(35), как показывает проведенное широкомасштабное численное моделирование, обладает всеми чертами взаимодействия «истинных» солитонов. Детальному описанию полученных результатов при различных видах функций  $D(Z)$ ,  $N(Z)$ ,  $\Gamma(Z)$ ,  $F(Z)$ ,  $\Phi(Z)$  будет посвящена отдельная работа. Здесь же мы приведем результаты расчетов динамики усиления и взаимодействия синфазных и противофазных солитонов модели (32) в простейшем случае  $\Gamma(Z) = \Gamma(0) = \text{const}$  (рис.4). Характерной особенностью солитонных решений уравнений (32)–(34) является постоянство длительности солитонов в процессе возрастания их энергии. Следует также отметить, что самосогласование дисперсии, нелинейности и усиления в модели (32)–(34) сопровождается усреднением пространственных стохастических вариаций коэффициента усиления (поглощения) и, наоборот, стохастические вариации дисперсии должны быть учтены в

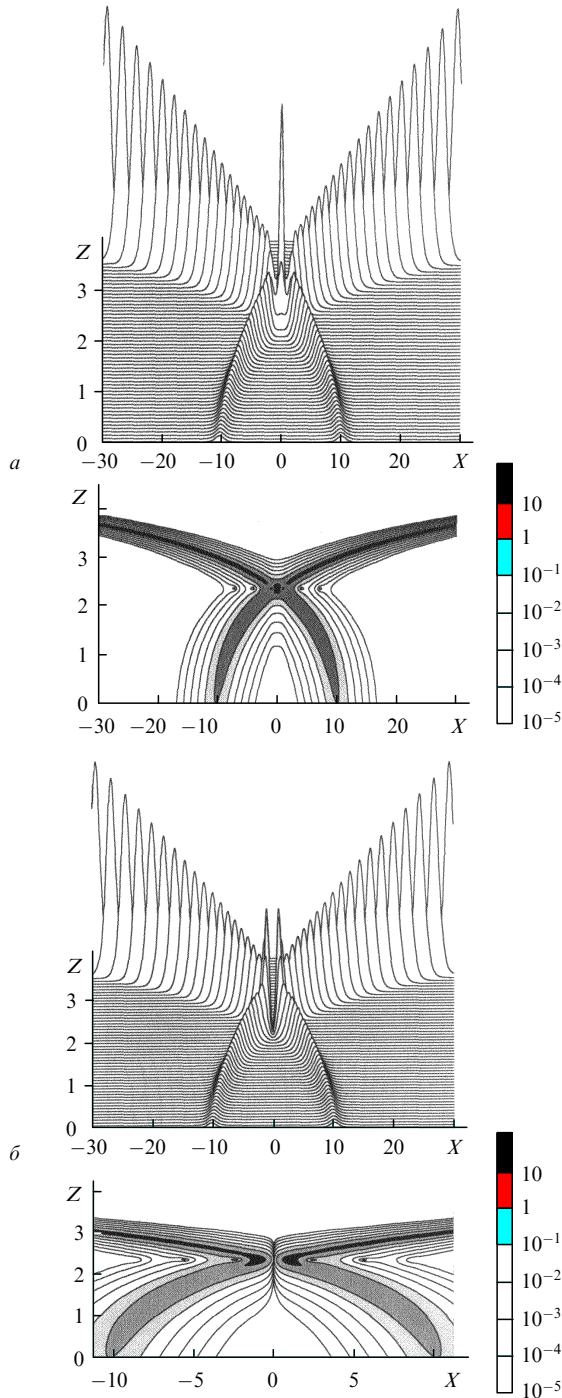


Рис.4. Динамика усиления и взаимодействия синфазных (а) и противофазных (б) солитонов модели (32), рассчитанная при  $\Gamma(0) = 1.0$  и начальных скоростях солитонов 1.0 и  $-1.0$ .

коэффициенте усиления (поглощения) согласно выражению

$$\Gamma(Z) = \frac{1}{2F(Z)} \frac{\partial F}{\partial Z}.$$

Рассмотрим более подробно два практически важных случая. Приведем точное аналитическое решение для задачи рамановской накачки солитонов. Возьмем наиболее интересный случай, когда волна молекулярных колебаний среды возбуждается двумя лазерными пучками с двух противоположных торцов волоконного световода

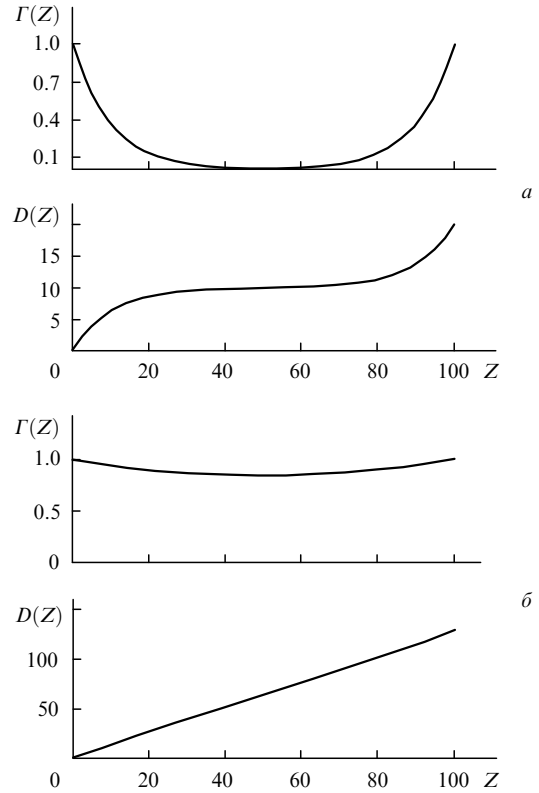


Рис.5. Оптимальная карта параметров волоконного световода при рамановской накачке солитона (51), рассчитанная при  $\gamma = 0.1$  (а) и  $0.01$  (б).

[24]. Распределение коэффициента усиления в этом случае описывается функцией

$$\Gamma(Z) = \exp(-\gamma Z) + \exp[\gamma(Z - L)]. \quad (51)$$

Задача оказывается полностью интегрируемой, если дисперсия определяется выражением

$$D(Z) = \exp\{2[A \sinh(\gamma Z) - B \cosh(\gamma Z) + B]\}, \quad (52)$$

где

$$A = \frac{1}{\gamma} [1 + \exp(-\gamma L)]; \quad B = \frac{1}{\gamma} [1 - \exp(-\gamma L)]; \quad (53)$$

$\gamma$  – линейные потери на комбинационной (рамановской) частоте.

Следует подчеркнуть, что в задаче о рамановской накачке солитонов возникают две принципиально различные ситуации, показанные соответственно на рис.5,а и б. В первом случае затухание накачки достаточно велико, так что в центре световода усиление практически равно нулю и оптимальная функция  $D(Z)$  имеет два перегиба. Во втором случае, наоборот, затухание накачки мало и коэффициент усиления является практически монотонной функцией. Оптимальная дисперсионная характеристика представляет собой линейно возрастающую функцию.

Рассмотрим точное аналитическое решение задачи о распространении солитона в световоде с уменьшающейся дисперсией [6]

$$D(Z) = \frac{1}{1 + \alpha Z}. \quad (54)$$

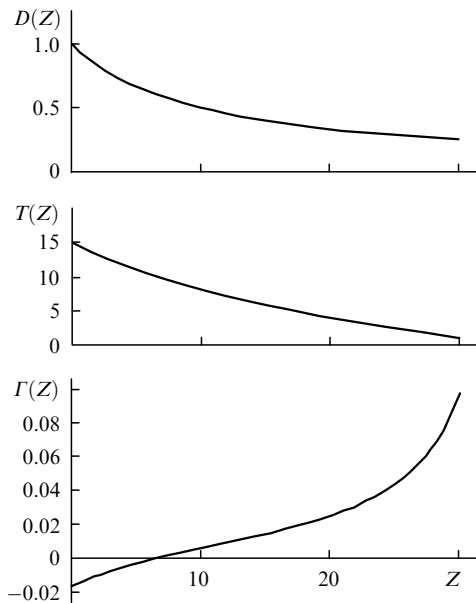


Рис.6. Оптимальная карта параметров волоконного световода с дисперсией (54) при  $\alpha = 0.1$ ,  $C_0 = 15.0$ .

В этом случае выражение для оптимального коэффициента усиления имеет вид

$$\Gamma(Z) = \frac{1}{2(1 + \alpha Z)} \left[ \frac{1 - \alpha C_0 + \ln(1 + \alpha Z)}{C_0 - (1/\alpha) \ln(1 + \alpha Z)} \right]. \quad (55)$$

Оптимальный коэффициент  $P(Z)$  определяет длительность солитона

$$T(Z) = \frac{1}{P(Z)} = C_0 - \frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha Z). \quad (56)$$

Характерные зависимости  $D(Z)$ ,  $T(Z)$  и  $\Gamma(Z)$  приведены на рис.6. Гиперболически уменьшающаяся дисперсия требует создания в световоде чрезвычайно интересного профиля усиления, когда вначале доминирует поглощение, а затем – усиление. Это может быть интерпретировано (см. рис.5) как встречная рамановская накачка солитона. Динамика взаимодействия солитонов данной модели с оптимальным и неоптимальным фазовыми профилями представлена на рис.7.

В заключение следует отметить, что полученный новый класс решений является более общим и содержит в себе канонические солитоны НУШ с постоянными коэффициентами. Предельный переход происходит при параметре  $\Theta \rightarrow 0$ , когда амплитуда и длительность солитона согласно (31)–(33) принимают стационарные значения.

Авторы пользуются представившейся им возможностью выразить глубокую благодарность А.М.Прохорову и Е.М.Дианову за внимание к работе и стимулирующие дискуссии. Особую благодарность авторы выражают А.И.Майминову, чьи конструктивные замечания в немалой степени способствовали работе над текстом статьи. Авторы благодарны Venemerita Universidad Autonoma de Puebla за поддержку работы на заключительном этапе ее выполнения.

1. Mollenauer L.F., Stolen R.G., Gordon J.R. *Phys.Rev.Letts*, **45**, 1095 (1980).
2. Дианов Е.М., Карасик А.Я., Мамышев П.В., Прохоров А.М.,

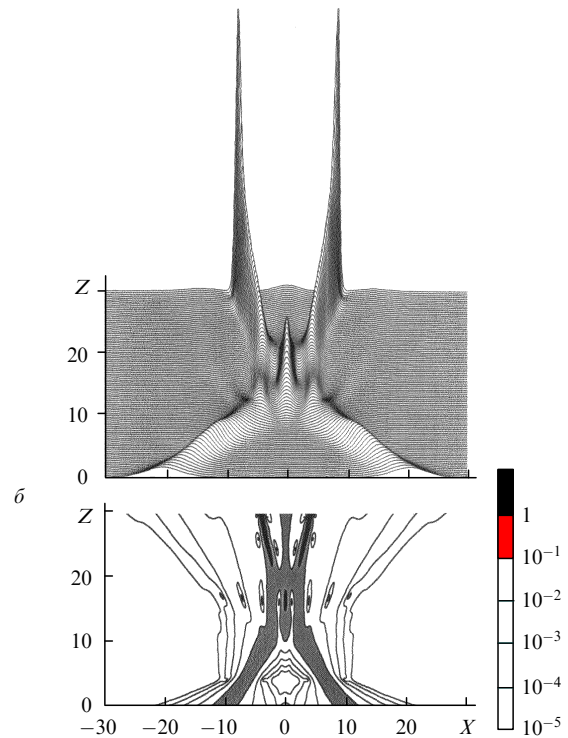
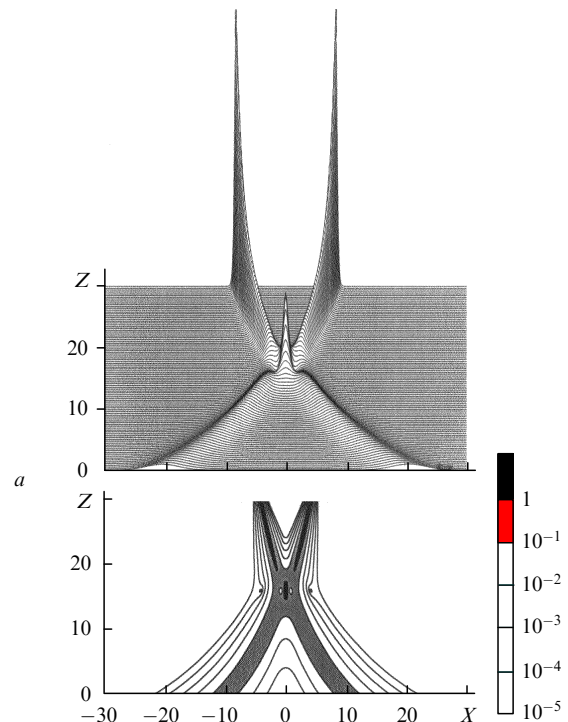


Рис.7. Взаимодействие квазисолитонов (36) в световоде в параметрической области (54)–(56) с оптимальным фазовым профилем при  $\alpha = 0.1$ ,  $C_0 = 15.0$  (a) и структурная неустойчивость солитонов при нарушении оптимальности соотношений (54)–(56) вида  $P(Z) = 3P_{opt}(Z)$  (б).

- Серкин В.Н., Стельмах М.Ф., Фомичев А.А. *Письма в ЖЭТФ*, **41**, 323 (1985).
3. Дианов Е.М., Карасик А.Я., Прохоров А.М., Серкин В.Н. *Изв.АН СССР. Сер.физич.*, **50**, 1042 (1986).
4. Дианов Е.М., Никонова З.С., Прохоров А.М., Серкин В.Н. *Письма в ЖТФ*, **12**, 752 (1986).
5. Грудинин А.Б., Дианов Е.М., Коробкин Д.В., Прохоров А.М., Серкин В.Н., Хайдаров Д.В. *Письма в ЖЭТФ*, **45**, 211 (1987).



6. Bogatyrev V.A., Bubnov M.M., Dianov E.M., Kurkov A.S., Mamyshev P.V., Prokhorov A.M., Rumyantsev S.D., Semenov V.A., Semenov S.L., Sysolyatin A.J., Chernikov S.V., Gur'yanov A.N., Devyatikh G.G., Miroshnichenko S.I. *J. Lightwave Technol.*, **9**, 561 (1991).
7. Mamyshev P.V. In: *Optical solitons – theory and experiment* (Cambridge University Press, 1992).
8. Chernikov S.V., Taylor J.R., Kashyap R. *Electron.Letts*, **29**, 1788 (1993).
9. Hasegawa A. (Ed.) *Massive WDM and TDM soliton transmission systems* (Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2000).
10. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *ЖЭТФ*, **61**, 118 (1971).
11. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. *Stud.Appl.Math.*, **53**, 249 (1974).
12. Lax P.D. *Comm.Pure.Appl.Math.*, **21**, 467 (1968).
13. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи* (М., Мир, 1987).
14. Буллаф Р., Кодри Ф. В кн. *Солитоны* (Новокузнецк, Изд. отд. Новокузнецкого физ.-мат. ин-та, 1999, с.11–77).
15. Ньюэлл А. В кн. *Солитоны* (Новокузнецк, Изд. отд. Новокузнецкого физ.-мат. ин-та, 1999, с.193–269).
16. Захаров В.Е. В кн. *Солитоны* (Новокузнецк, Изд. отд. Новокузнецкого физ.-мат. ин-та, 1999, с.270–309).
17. Калоджеро Ф., Дегаспирес А. В кн. *Солитоны* (Новокузнецк, Изд. отд. Новокузнецкого физ.-мат. ин-та, 1999, с.323–347).
18. Фаддеев Л.Д. В кн. *Солитоны* (Новокузнецк, Изд. отд. Новокузнецкого физ.-мат. ин-та, 1999, с.363–379).
19. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов* (М., Наука, 1980).
20. Маймистов А.И. *Фотоника. Метод обратной задачи в нелинейной оптике* (М., Изд-во МИФИ, 1990).
21. Dianov E.M., Mamyshev P.V., Prokhorov A.M., Serkin V.N. *Non-linear effects in optical fibers* (N.Y., Harwood Academic Publ., 1989).
22. Hasegawa A. *Optical solitons in fibers* (Berlin, Springer-Verlag, 1989).
23. Agrawal G.P. *Nonlinear fiber optics* (Boston, Academic, 1989; N.Y., Academic, 1995; М., Мир, 1996).
24. Taylor J.R. (Ed.) *Optical solitons – theory and experiment* (Cambridge University Press, 1992).
25. Hasegawa A., Kodama Y. *Solitons in optical communications* (Oxford University Press, 1995).
26. Serkin V.N., Hasegawa A. *Phys.Rev.Letts*, **85**, 4502 (2000).
27. Серкин В.Н., Хасэгава А. *Письма в ЖЭТФ*, **72**, 89 (2000).
28. Serkin V.N., Hasegawa A. *Proc. SPIE*, **3927**, 302 (2000).