

# Оптимальное управление параметрами оптических солитонов.

## Ч.2. Концепция нелинейных волн Блоха в проблеме солитонного менеджмента

В.Н.Серкин\*, Т.Л.Беляева\*\*

*Показано, что оптические солитоны в нелинейных волоконно-оптических линиях связи и солитонных лазерах могут быть представлены как нелинейные волны Блоха в периодических структурах. Доказана теорема Блоха для солитонов нелинейного уравнения Шредингера в системах с периодически изменяющимися по длине дисперсией, нелинейностью и коэффициентом усиления (поглощения). Исследована динамика формирования и взаимодействия, а также устойчивость связанных состояний нелинейных волн Блоха. Показано, что солитонные волны Блоха существуют только при определенных условиях самосогласования между основными параметрами системы и проявляют структурную неустойчивость по отношению к рассогласованию периодов пространственной модуляции дисперсии, нелинейности или усиления.*

**Ключевые слова:** оптические солитоны, нелинейные волны, солитонный менеджмент.

### 1. Введение

Использование оптических солитонов как идеальных носителей бита информации в волоконно-оптических линиях связи и создание солитонных линий передачи информации со спектральным уплотнением каналов и быстродействием 40 Гбит/с стало одним из самых значительных достижений квантовой электроники последних лет. Наиболее полный анализ последних достижений в этой бурно развивающейся области науки и техники заинтересованный читатель может найти в сборнике статей [1] и в обзоре [2].

Группой М.Наказава из NTT Network Innovation Laboratories (Япония) проведены впечатляющие эксперименты по передаче информации оптическими солитонами в коммерческой волоконно-оптической сети Tokyo Metropolitan Network. В этой сети промышленный волоконно-оптический кабель в обычном режиме обеспечивает скорость передачи информации 2.4 Гбит/с. В солитонном режиме с дисперсионной компенсацией (dispersion management) и спектральным уплотнением каналов в сети длиной 1000–2500 км были получены скорости передачи информации 40 Гбит/с.

Одной из центральных проблем полностью оптических (использующих в качестве ретрансляторов лазерные, а не электронные усилители) солитонных волоконно-оптических линий связи является проблема оптимального управления параметрами оптических солитонов, называемая также проблемой солитонного менеджмента. Использование различных комбинаций волоконных

световодов с периодически чередующимися знаками дисперсии (fiber dispersion management) позволяет существенно продвинуться на пути создания солитонной линии связи с быстродействием порядка нескольких терабит в секунду (см., напр., [1, 2]). Концепция солитонного менеджмента оказалась также весьма продуктивной при создании новых типов фемтосекундных солитонных лазеров [3, 4].

Математическая задача солитонного менеджмента представляет собой проблему оптимального управления параметрами оптических солитонов в модели нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) для замкнутой или незамкнутой линии с периодически изменяющимися по длине параметрами, такими как дисперсия групповой скорости, нелинейность показателя преломления, коэффициенты линейных потерь излучения и периодического усиления солитона в линии передачи.

Настоящая работа посвящена поиску решения данной проблемы и доказательству того факта, что шредингеровские оптические солитоны в периодических структурах представляют собой нелинейный аналог хорошо известных электронных волн Блоха в кристаллах.

### 2. Нелинейная теорема Блоха для шредингеровских солитонов

Концепция нелинейных волн Блоха была впервые предложена Хаусом и Ченом в работе [3] для описания динамики оптических солитонов применительно к проблеме солитонного менеджмента. Авторы [3] обратили внимание на глубокую аналогию, существующую между электронными волнами Блоха в кристаллах и нелинейными волновыми пакетами в волоконно-оптических линиях передачи с периодически изменяющимися в пространстве параметрами. В таких нелинейных периодических дисперсионных системах солитонный импульс за счет самовоздействия при распространении сам себе создает нелинейный рассеивающий самосогласованный потенциал. Хаус и Чен рассмотрели динамику системы

\*Институт общей физики РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38 (адрес в настоящее время: Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Instituto de Ciencias, A.P. 502, 72001 Puebla, Pue., Mexico; e-mail: vserkin@hotmail.com)

\*\*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, Россия, 119899 Москва, Воробьевы горы (адрес в настоящее время: Benemerita Universidad Autonoma de Puebla, Instituto de Ciencias, A.P. 502, 72001 Puebla, Pue., Mexico; e-mail: vserkin@hotmail.com)

с периодически изменяемым знаком дисперсии в том случае, когда эквивалентная усредненная дисперсия оказывается в точности равной нулю. Теоретический подход к проблеме нелинейных волн Блоха в работах Хауса и Чена [3, 4] базировался на вариационном приближении Андерсона [5] и на предположении, что в качестве пробных функций могут быть использованы полиномы Гаусса – Эрмита линейной задачи на собственные значения. В таком подходе нелинейные волны Блоха представляют собой так называемые солитоны с дисперсионным менеджментом (dispersion managed solitons), взаимодействие которых, как хорошо известно, является неупругим [1–8].

В отличие от [3, 4] мы будем использовать другой подход, базирующийся на идее о волновых пакетах-квантичках, которые формируются в среде с изменяющимися параметрами (потенциалами). Используя прямую аналогию волна – частица для электрона в кристалле и солитона в периодической структуре, мы покажем, что динамика шредингеровских солитонов в периодической нелинейной системе подчиняется нелинейной теореме Блоха, причем сама постановка задачи имеет глубокие квантово-механические аналогии.

Согласно теореме Блоха [9–11] волновая функция электрона в периодической кристаллической решетке

$$\Psi(x) = U_k(x) \exp(ikx) \quad (1)$$

представляет собой волновую функцию свободного электрона  $\exp(ikx)$ , модулированную так называемой функцией Блоха, которая имеет периодичность кристаллической решетки:

$$U_k(x) = U_k(x + nL). \quad (2)$$

Покажем, что шредингеровский солитон в периодической структуре, подобно электрону во внешнем периодическом потенциале, может быть описан соответствующей солитонной функцией Блоха.

Самовоздействие нелинейного импульса в системе с периодически изменяющимися параметрами будем описывать в приближении НУШ, которое в стандартных солитонных переменных имеет вид [12–16]

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi^\pm}{\partial Z} \pm \frac{1}{2} D(Z) \frac{\partial^2 \Psi^\pm}{\partial X^2} + N(Z) |\Psi^\pm|^2 \Psi^\pm \\ = -i\gamma_0 \Psi^\pm + i\Gamma(Z) \Psi^\pm, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $Z$  – безразмерная длина распространения импульса, нормированная на дисперсионную длину;  $\Psi^\pm(Z, X)$  – поле, выраженное в единицах амплитуды так называемого фундаментального солитона модели НУШ с постоянными коэффициентами [12–16]. Введенные в (3) коэффициенты описывают периодическое изменение параметра дисперсии групповой скорости  $D(Z) = D(Z + nL)$ , параметра нелинейности  $N(Z) = N(Z + nL)$  и коэффициента усиления  $\Gamma(Z) = \Gamma(Z + nL)$  по длине взаимодействия излучения с пространственно-неоднородной системой. Линейные потери определяются параметром  $\gamma_0$ .

В силу хорошо известной пространственно-временной аналогии, уравнение (3) описывает как пространственные солитоны («щелевые» пучки), так и обычные вре-

менные солитоны (стационарные импульсы) в зависимости от того, какую переменную представляет  $X$  – время или поперечную координату. Знак плюс в уравнении (3) соответствует постановке задачи для светлого (аномальная дисперсия) солитона, знак минус – для темного (нормальная дисперсия) солитона.

Используя подстановку

$$\tilde{\Psi}^\pm(Z, X) = \frac{\Psi^\pm(Z, X)}{G(Z)}, \quad (4)$$

$$R(Z) = N(Z)G^2(Z), \quad (5)$$

где функция  $G(Z)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G(Z)}{\partial Z} = -\gamma_0 G(Z) + \Gamma(Z)G(Z), \quad (6)$$

уравнение (3) можно привести к виду

$$i \frac{\partial \tilde{\Psi}^\pm}{\partial Z} \pm \frac{1}{2} D(Z) \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}^\pm}{\partial X^2} + R(Z) |\tilde{\Psi}^\pm|^2 \tilde{\Psi}^\pm = 0. \quad (7)$$

Нелинейная теорема Блоха для солитонов, описываемых моделью НУШ (7), по аналогии с теоремой Блоха для электронов (1) может быть представлена в виде закона преобразования временных (для солитонов-импульсов) или пространственных (для солитонов-пучков) огибающих светлого солитона  $\tilde{\Psi}^+(Z, X)$  и темного солитона  $\tilde{\Psi}^-(Z, X)$ , модулированных соответствующими нелинейными функциями Блоха с периодичностью параметров пространственно-неоднородной структуры  $D(Z) = D(Z + nL)$  и  $R(Z) = R(Z + nL)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^\pm(Z) = P^{1/2}(Z) \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{C}\eta \operatorname{sech}[\eta P(Z)X] \\ \sqrt{C}\eta \operatorname{tanh}[\eta P(Z)X] \end{array} \right\} \\ \times \exp \left[ \pm i \frac{P(Z)}{2} X^2 \right] - i\alpha\eta^2 [P(Z) - P(0)], \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\eta$  – форм-фактор солитонного импульса;  $\alpha = 0.5$  для светлых солитонов и  $\alpha = 1$  для темных солитонов. Для доказательства нелинейной теоремы Блоха (8) необходимо, во-первых, показать, что действительная функция  $P(Z)$ , описывающая модуляцию в пространстве канонической формы светлого или темного солитона, имеет ту же периодичность, что и параметрические функции  $D(Z)$  и  $R(Z)$ . Во-вторых, необходимо найти явный вид функции  $P(Z) = P(Z + nL)$ .

Представим нелинейную функцию Блоха для задачи (7) в общем виде как

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}^\pm(Z) = P^{1/2}(Z) Q^\pm(S) \\ \times \exp \left[ \pm i \frac{P(Z)}{2} X^2 + i \int_0^Z K^\pm(\xi) d\xi \right], \end{aligned} \quad (9)$$

где  $Q^\pm$  и  $K^\pm$  – амплитуды и фазы солитонных волн. Подставляя (9) в (7) и разделяя действительные и мнимые части в полученном уравнении, придем к следующей системе:

$$\pm \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q^\pm}{\partial S^2} + \frac{R}{DP} (Q^\pm)^3 - Q^\pm \frac{K^\pm}{DP^2} \mp \frac{S^2 Q^\pm}{2DP^4} \left( DP^2 + \frac{\partial P}{\partial Z} \right) = 0, \quad (10)$$

$$\left( DP^2 + \frac{\partial P}{\partial Z} \right) \left( \frac{1}{2} Q^\pm + S \frac{\partial Q^\pm}{\partial S} \right) = 0, \quad (11)$$

где  $S(Z, X) = P(Z)X$ ;  $\partial S/\partial Z = X \partial P/\partial Z$ ;  $\partial S/\partial X = P(Z)$ .

Уравнение (10) представляет собой квантово-механическое волновое уравнение Шредингера для гармонического осциллятора в самосогласованном нелинейном потенциале

$$U(S, Z) = \mp \frac{R(Z)}{D(Z)P(Z)} [Q^\pm(S)]^2 \pm \frac{S^2}{2D(Z)P^4(Z)} \left( DP^2 + \frac{\partial P}{\partial Z} \right). \quad (12)$$

Частное решение уравнения (10) было впервые получено численно в работе [17] в предположении, что основные параметры задачи удовлетворяют условию

$$\frac{\partial P}{\partial Z} + DP^2 = \text{const} = 1. \quad (13)$$

Численное решение, получившее название квазисолитон НУШ с гармоническим потенциалом, представляет собой промежуточную форму между функцией Гаусса и гиперболическим секансом, описывающим форму канонического солитона НУШ с постоянными коэффициентами.

В отличие от работ [17–19] мы рассмотрим другое частное решение задачи, при котором функции  $Q^\pm$  описывают модулированные нелинейной функцией Блоха светлый и темный квазисолитоны НУШ. Для рассматриваемой нами функции Блоха (9) необходимо найти совместное решение нелинейной системы (10), (11). Как следует из (11), условие

$$\frac{1}{2} Q^\pm + S \frac{\partial Q^\pm}{\partial S} = 0 \quad (14)$$

приводит к сингулярному решению вида

$$Q(S) = \frac{\text{const}}{\sqrt{S}}. \quad (15)$$

Для того чтобы найти несингулярное решение системы (10), (11), потребуем выполнения соотношения

$$\frac{\partial P}{\partial Z} + DP^2 = 0. \quad (16)$$

Условие существования несингулярного решения (16), как легко видеть, позволяет преобразовать уравнение (10) в нелинейное уравнение Шредингера с переменными коэффициентами. Как было показано в первой части данной работы [20], это уравнение имеет представление Лакса и, следовательно, полностью интегрируемо тогда и только тогда, когда выполнено так называемое условие

взаимосогласованности коэффициентов при нелинейном и дисперсионном членах

$$R(Z) = CD(Z)P(Z), \quad (17)$$

где  $C$  – произвольная константа.

Таким образом, если выполнены условия (16) и (17), то решение системы (10), (11) представляется в виде светлого или темного солитонов, модулированных функцией  $P(Z)$ :

$$Q^\pm(S) = \begin{cases} \eta \operatorname{sech}[\eta P(Z)X], \\ \eta \tanh[\eta P(Z)X]. \end{cases} \quad (18)$$

Как следует из (5) и (17), модуляция амплитуды и длительности солитона будет происходить периодически ( $P(Z) = P(Z + nL)$ ), если выполняются следующие условия:

$$\frac{R(Z + nL)}{R(Z)} = \frac{D(Z + nL)}{D(Z)} = \frac{N(Z + nL)G^2(Z + nL)}{N(Z)G^2(Z)} = 1. \quad (19)$$

Необходимо подчеркнуть, что аналитические решения для солитонных волн Блоха (8), (16), (17) получены нами в квадратурах в самом общем виде. Фаза солитонной волны определяется соотношением

$$K^+(Z) = \frac{1}{2} \eta^2 D(Z)P^2(Z) \quad (20)$$

для светлого солитона и соотношением

$$K^-(Z) = \eta^2 D(Z)P^2(Z) \quad (21)$$

для темного солитона и имеет ту же трансляционную симметрию, что и периодические возмущения параметров нелинейной среды. Отметим, что фазы темного и светлого солитонов по модулю различаются в два раза.

### 3. Нелинейная динамика солитонных волн Блоха

Предсказанные солитонные волны Блоха могут быть обнаружены при различных условиях постановки конкретных экспериментов. В том случае, когда при планировании конкретного эксперимента дисперсионный параметр  $D(Z)$  предполагается известным, мы можем, аппроксимируя его аналитической периодической функцией  $D(Z) = D(Z + nL)$ , найти основные параметры, описывающие солитонную волну Блоха, из уравнения

$$P(Z) = P_0 \left[ 1 + P_0 \int_0^Z D(Z') dZ' \right]^{-1}, \quad (22)$$

$$R(Z) = \frac{P(Z)D(Z)}{C}.$$

Если, наоборот, в конкретном эксперименте известна аналитическая аппроксимация параметра нелинейности  $R(Z) = R(Z + nL)$ , то дисперсионная характеристика и параметры волны Блоха в системе определяются согласно выражениям

$$P(Z) = P_0 \exp \left[ -C \int_0^Z R(Z') dZ' \right], \tag{23}$$

$$D(Z) = \frac{CR(Z)}{P(Z)}.$$

Нелинейная теорема Блоха для шредингеровских солитонов (8), (16), (17) позволяет решить и более общую задачу оптимального управления параметрами солитона в линиях передачи и солитонных лазерах. Замечательной особенностью решения (8) является тот факт, что амплитуда, длительность и фаза солитона в неоднородной среде определяются только одной функцией  $P(Z) = P(Z + nL)$ . Будем рассматривать эту функцию как функцию оптимального управления параметрами солитона. Выбирая функцию  $P(Z)$  в соответствии с требованиями конкретной задачи как аналитическую функцию переменной  $Z$ , мы получаем следующие условия существования солитонной волны Блоха:

$$D(Z) = -\frac{1}{P^2(Z)} \frac{\partial P}{\partial Z}, \quad R(Z) = -\frac{1}{CP(Z)} \frac{\partial P}{\partial Z}. \tag{24}$$

Как правило, в эксперименте бывает гораздо удобнее использовать конкретный периодический коэффициент усиления солитона  $\Gamma(Z) = \Gamma(Z + nL)$ . Если эту функцию можно аппроксимировать заданной аналитической функцией переменной  $Z$ , то так называемая карта основных параметров – дисперсии и нелинейности – может быть найдена из следующей системы уравнений:

$$\frac{D(Z)P(Z)}{N(Z)} = \frac{D_0P_0}{N_0} \exp \left[ -2\gamma_0 Z + 2 \int_0^Z \Gamma(\zeta) d\zeta \right], \tag{25}$$

$$P(Z) = P(0) \exp \left\{ - \int_0^Z N(\xi) CG(0) \times \exp \left[ -2\gamma_0 \xi + 2 \int_0^\xi \Gamma(\zeta) d\zeta \right] d\xi \right\}. \tag{26}$$

Рассмотрим ряд конкретных примеров. Представим себе ситуацию, когда периодическая волоконно-оптическая структура, содержащая лазерные усилители, с длиной, кратной периоду  $L$  изменения основных параметров структуры, замкнута в кольцо. Подобная система оптической памяти на солитонах была предложена еще в работе [21]. Фундаментальные решения для такой модели солитонной памяти могут быть записаны в тригонометрических функциях. Аппроксимируя периодическую дисперсионную функцию, например, соотношением

$$D(Z) = 1 + \delta \sin^m(\kappa Z) \tag{27}$$

и рассматривая простейшую ситуацию, когда нелинейность показателя преломления не изменяется по длине распространения импульса ( $N(Z) = 1$ ), мы получаем следующие решения для периодически циркулирующего в кольце солитона:

$$P^{-1}(Z) = - \left( C - Z - \frac{\delta}{\kappa} \int_0^{\kappa Z} \sin^m x dx \right), \tag{28}$$

$$2\Gamma(Z) = -D(Z)P(Z) + \frac{\delta \kappa m \sin(2\kappa Z) \sin^{2m-2}(\kappa Z)}{D(Z)}, \tag{29}$$

где произвольная константа интегрирования  $C$  может быть как положительной, так и отрицательной.

Пространственно-временная структура светлых и темных солитонов, амплитуда и длительность которых периодически изменяются (солитонных волн Блоха), для системы (27)–(29) приведена на рис.1. На рис.2 показана динамика взаимодействия периодических решений (27)–(29) в сравнении с упругим взаимодействием канонических солитонов НУШ с постоянными коэффициентами. Результаты, представленные на рис.2,а–в (синфазное взаимодействие) и рис.2,г (противофазное взаимодействие), получены прямым численным интегрированием уравнения (3) при разных значениях параметра  $\kappa$  периодичности структуры (27).

Представим функцию управления  $P(Z)$  в следующем виде:

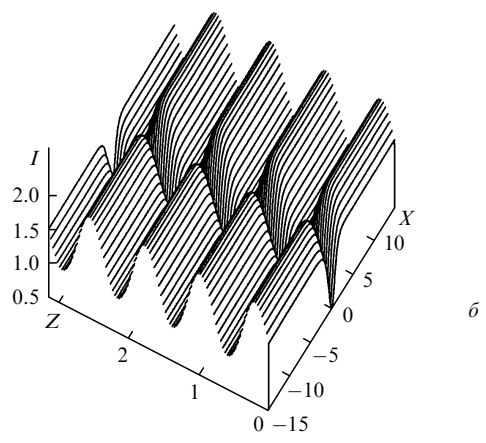
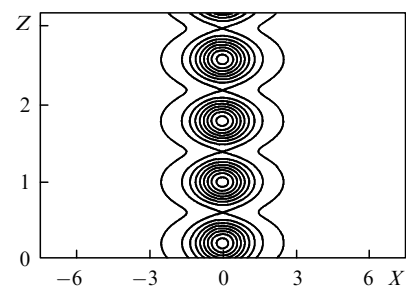
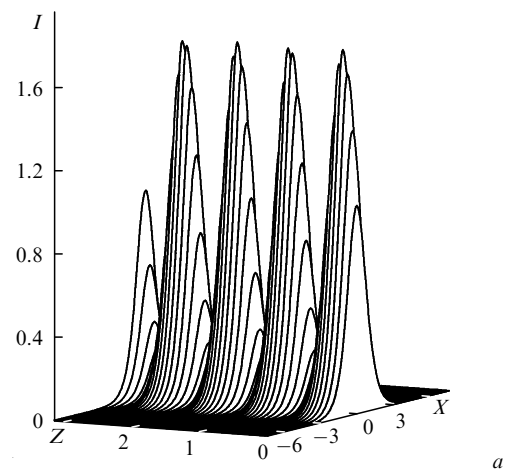


Рис.1. Пространственная динамика взаимодействия светлой (а) и темной (б) солитонных волн Блоха в периодической нелинейной системе (27)–(29) при  $\delta = 0.75, m = 1, \kappa = 8, C = 10^5$ .

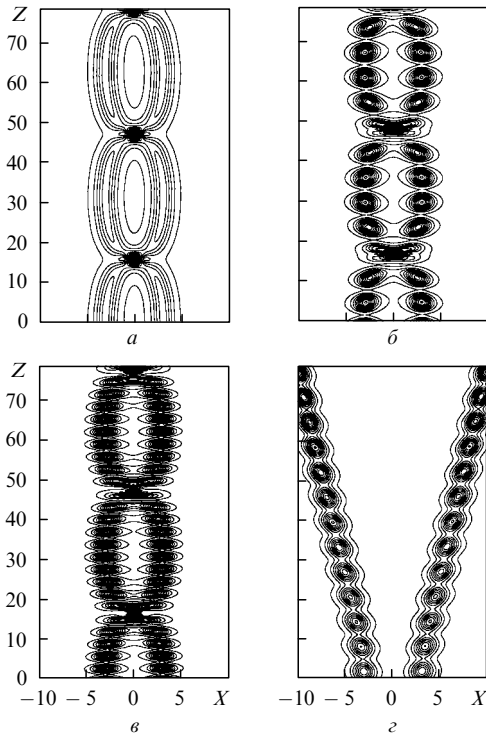


Рис.2. Нелинейная динамика взаимодействия синфазных (а-в) и противофазных (г) солитонных волн Блоха в сравнении с динамикой взаимодействия канонических солитонов НУШ с постоянными коэффициентами. Периодические функции дисперсии  $D(Z)$  и усиления  $\Gamma(Z)$  заданы соотношениями (27)–(29) с параметрами  $m = 2, \kappa = 2$  (б, г) и 4 (в). Расстояние между центрами солитонов  $\Delta x = 6$  при  $Z = 0$ .

$$P(Z) = \frac{(1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - \beta \cos(\kappa Z)}. \tag{30}$$

Данная функция при параметре  $\beta \rightarrow 1$  представляет собой периодическую решетку  $\delta$ -функций. При  $\beta \rightarrow 0$  функция (30), испытывая периодические колебания, стремится к постоянному значению  $P(Z) = 1$ . Подчеркнем, что в солитонных линиях связи функция вида (30) позволяет моделировать периодическое скачкообразное усиление солитонов по длине распространения информации.

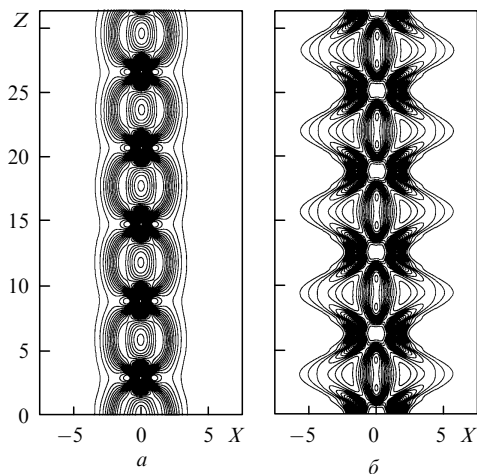


Рис.3. Динамика взаимодействия сильно перекрывающихся солитонных волн Блоха (б) для функции управления (30) в сравнении с динамикой взаимодействия канонических солитонов НУШ с постоянными коэффициентами (а), рассчитанная при  $\beta = 0.75, \kappa = 1, \Delta x = 3$  и  $Z = 0$ .

онного сигнала. Результаты, представленные на рис.3, 4, иллюстрируют динамику связанного состояния первоначально покоящихся (в сопровождающей системе координат) солитонов, рассчитанную с помощью функции управления (30). Сравнение динамики взаимодействия (рис.3) солитонов (8), (30) с динамикой канонических солитонов НУШ с постоянными по длине параметрами показывает, что, несмотря на существенное различие в деталях, характер упругого взаимодействия солитонов (8), (30) не претерпевает принципиальных изменений: солитонные волны Блоха взаимодействуют упруго. На рис.4 проиллюстрированы детали формирования сложной структуры при взаимодействии сильно перекрывающихся солитонных волн Блоха.

Тот факт, что задачу о солитонных волнах Блоха удастся свести к полностью интегрируемой модели (см. (10), (11) и (16), (17)), позволяет утверждать, что как в солитонных линиях передачи и хранения информации, так и в солитонных волоконных лазерах возможно формирование связанных состояний нелинейных волн Блоха.

Для генерации нелинейных волн Блоха высших порядков необходимо задать начальные условия в следующем виде:

$$\tilde{\Psi}^+(Z = 0) = NP_0^{1/2} \eta \operatorname{sech}(\eta P_0 X) \exp\left(i \frac{P_0}{2} X^2\right). \tag{31}$$

Кардинальное отличие от стандартной ситуации генерации связанных состояний солитонов в волоконных световодах с постоянными по длине характеристиками [12–16] состоит в том, что теперь для формирования связанного состояния необходимо не только увеличить амплитуду солитона в целое число раз, но и соответствующим образом задать начальную фазовую модуляцию солитона на входе в среду. Для пространственных солитонов это означает задание начального параболического волнового фронта пучка.

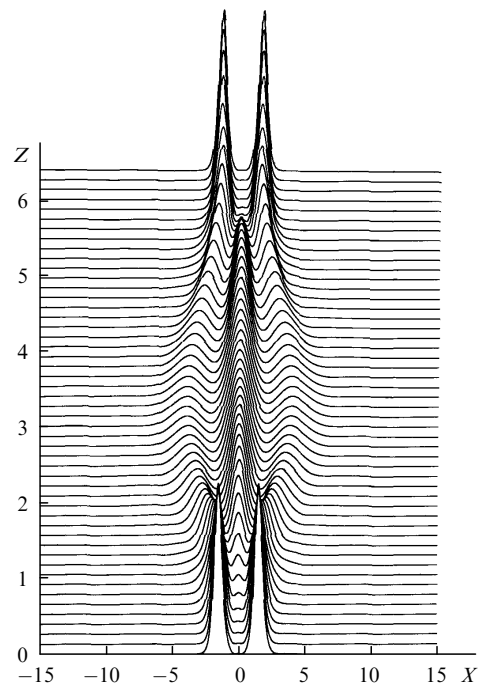


Рис.4. Детальная структура распределения поля, соответствующая одному периоду взаимодействия сильно перекрывающихся темных солитонных волн Блоха.

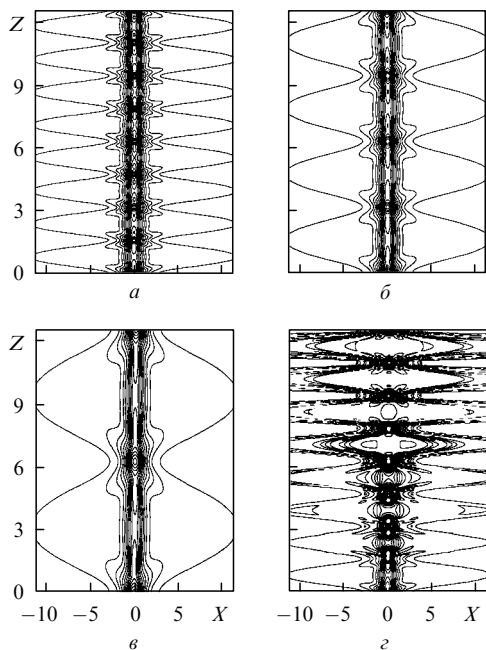


Рис.5. Динамика формирования связанных состояний четырехсолитонных волн Блоха, рассчитанная для функции управления (30) при варьируемых периодах пространственной модуляции дисперсии и нелинейности и параметрах  $\beta = 0.75$ ,  $\kappa = 8$  (а), 4 (б), 2 (в), а также при рассогласовании периодов пространственной модуляции дисперсии и нелинейности 2% ( $\kappa = 8$ ) (г).

На рис.5 приведены данные компьютерного моделирования динамики формирования связанных состояний солитонов в периодической нелинейной системе (8), (30), полученные при варьировании периода пространственной модуляции параметров  $D(Z)$  и  $R(Z)$  в модели (7). Как следует из рис.5, по мере увеличения периода модуляции заметно уменьшается число нелинейных фокусов, являющихся характерным атрибутом связанного состояния шредингеровских солитонов [12–16]. Дальнейшее увеличение периода модуляции приводит к стабилизации структуры излучения и формированию квазисолитонного импульса. Как показывает компьютерное моделирование, связанные состояния солитонных волн Блоха оказываются структурно неустойчивыми образованиями: даже незначительное, порядка 1–2%, рассогласование периодов пространственной модуляции дисперсии и коэффициента усиления, как показано на рис.5, приводит к полной стохастизации системы.

#### 4. Заключение

Таким образом, данные компьютерного моделирования подтверждают вывод о «классическом» упругом взаимодействии нелинейных волн Блоха и возможности формирования их связанных состояний. Отметим, что одним из наиболее простых методов профилирования дисперсии по длине распространения солитонного импульса является использование отрезков различных световодов с противоположными знаками дисперсии [22]. Важность использования начальной фазовой модуляции (чирпа) в солитонных линиях передачи информации была показана недавно в работе [23].

Однако примененный авторами [23] подход, базирующийся на вариационном приближении Андерсона [5], не позволил им получить точное аналитическое решение за-

дачи. В отличие от предшествующих работ, в настоящей работе получены точные аналитические решения для солитонных волн Блоха и показано, что нелинейная теорема Блоха устанавливает закон преобразования шредингеровских солитонов в системах с периодически изменяющимися нелинейностью, дисперсией и усилением. Солитонные нелинейные волны Блоха существуют только при определенной связи между основными параметрами системы. Это означает, что в реальных солитонных системах передачи и хранения информации, а также в солитонных лазерах дисперсия и нелинейность не могут быть выбраны произвольно – они должны быть взаимосогласованы условиями нелинейной теоремы Блоха. При этом наряду с фазово-модулированными нелинейными волнами Блоха с периодически изменяющимися амплитудой и длительностью (8) существуют и нефазово-модулированные солитонные волны Блоха с постоянной длительностью [24].

Пространственный аналог рассмотренных нелинейных волн Блоха хорошо известен в литературе вот уже более 25 лет – это периодическое изменение временных и пространственных характеристик сверхкоротких импульсов света в резонаторе лазера при внутрирезонаторной самофокусировке излучения. Возможность использования внутрирезонаторной самофокусировки излучения для компрессии сверхкоротких импульсов света и увеличения степени самосинхронизации мод (так называемого контраста излучения) впервые была предсказана в работе [25]. В настоящее время пассивная синхронизация мод за счет внутрирезонаторной самофокусировки излучения нашла широкое применение для создания лазеров, работающих в режиме керровской синхронизации мод (см., напр., работы [26–29] и приведенную в них литературу). Хорошо известно также, что подобный аналог пространственно-временных нелинейных волн Блоха существует только при определенных условиях, в противном случае развивается обратный эффект стохастизации излучения [30, 31]. Несомненно, что дальнейшее развитие фемтосекундных лазерных систем типа  $\text{Ti}:\text{Al}_2\text{O}_3$  будет основано на использовании концепции солитонных волн Блоха.

Авторы пользуются предоставленной им возможностью выразить свою глубокую благодарность А.М. Прохорову и Е.М. Дианову за внимание к работе и стимулирующие дискуссии, а также всем участникам научного семинара ИОФ РАН за полезные обсуждения. Авторы считают приятным долгом поблагодарить А.И. Маймиштова, конструктивные замечания которого помогли им в работе над текстом статьи. Авторы благодарны Venemrita Universidad Autonoma de Puebla за поддержку работы на заключительном этапе ее выполнения.

1. Hasegawa A. (Ed.) *Massive WDM and TDM soliton transmission systems* (Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2000).
2. Nakazawa M., Kubota H., Suzuki K.S., Yamada E. *Chaos*, **10**, 486 (2000).
3. Haus H.A., Chen Y. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **16**, 889 (1999).
4. Chen Y., Kärtner F.X., Morgner U., Cho S.H., Haus H.A., Ippen E.P., Fujimoto J.G. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **16**, 1999 (1999).
5. Anderson D. *Phys.Rev.A*, **27**, 3135 (1983).
6. Lakoba T.I., Kaup D.J. *Phys.Rev.E*, **58**, 6728 (1998).
7. Turitsyn S.K., Shapiro E.G. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **16**, 1321 (1999).
8. Zakharov V.E., Manakov S.V. *Письма в ЖЭТФ*, **70**, 573 (1999).
9. Bloch F. *Zs.Phys.*, **52**, 555 (1928).
10. Anderson P.W. *Concepts in solids* (Boston, Benjamin, 1964).
11. Lax M. *Symmetry principles in solid state and molecular physics* (N.Y., John Wiley & Sons, 1974).

12. Dianov E.M., Mamyshev P.V., Prokhorov A.M., Serkin V.N. *Non-linear effects in optical fibers* (N.Y., Harwood Academic Publ., 1989).
13. Hasegawa A. *Optical solitons in fibers* (Berlin, Springer-Verlag, 1989).
14. Агравал Г.П. *Нелинейная волоконная оптика* (М., Мир, 1996).
15. Taylor J.R. (Ed.) *Optical solitons – theory and experiment* (Cambridge University Press, 1992).
16. Hasegawa A., Kodama Y. *Solitons in optical communications* (Oxford University Press, 1995).
17. Kumar S., Hasegawa A. *Optics Letts*, **22**, 372 (1997).
18. Hasegawa A. *Physica D*, **123**, 267 (1998).
19. Kodama Y. *Physica D*, **123**, 255 (1998).
20. Серкин В.Н., Беляева Т.Л. *Квантовая электроника*, **31**, 1007 (2001).
21. Belovolov M.I., Dianov E.M., Karpov V.I., Protopopov V.N., Serkin V.N. *Proc.SPIE*, **963**, 90 (1988).
22. Chernikov S.V., Taylor J.R., Kashyap R. *Electron.Letts*, **29**, 1788 (1993).
23. Liao Z.M., McKinstrie C.J., Agrawal G.P. *J.Opt.Soc.Amer.B*, **17**, 514 (2000).
24. Серкин В.Н., Мацумото М., Беляева Т.Л. *Письма в ЖЭТФ*, **73**, 64 (2001).
25. Ларионцев Е.Г., Серкин В.Н. *Квантовая электроника*, **2**, 1481 (1975).
26. Huang D., Ulman M., Acioli L.H., Haus H.A., Fujimoto J.G. *Optics Letts*, **17**, 511 (1992).
27. Zhou J., Taft G., Huang C.-P., Murnane M.M., Kapteyn H.C., Christov I.P. *Optics Letts*, **19**, 1149 (1994).
28. Christov I.P., Kapteyn H.C., Murnane M.M., Huang C.-P., Zhou J. *Optics Letts*, **20**, 309 (1995).
29. Brabec T., Krausz F. *Rev.Mod.Phys.*, **72**, 545 (2000).
30. Жерихин А.Н., Крюков П.Г., Матвеев Ю.А., Чекалин С.В. *Квантовая электроника*, **1**, 956 (1974).
31. Ларионцев Е.Г., Серкин В.Н. *Изв.вузов.Сер.Радиофизика*, **19**, 357 (1976).