

Эффект Тальбо в гауссовых оптических системах

В.П.Кандидов*, А.В.Кондратьев**

Показано, что при распространении света через гауссовы оптические системы имеет место дифракционное воспроизведение волнового поля с периодической модуляцией. В общем случае такое воспроизведение сопровождается масштабированием изображения. Получены уравнения, связывающие расстояние воспроизведения и масштабный множитель с элементами ABCD-матрицы оптической системы. Рассмотрен эффект Тальбо в сходящейся (расходящейся) волне.

Ключевые слова: эффект Тальбо, дифракционное самовоспроизведение, резонатор Тальбо, фазовая синхронизация, лазерные решетки.

Дифракционное самовоспроизведение периодически модулированного волнового поля (эффект Тальбо) имеет уже почти двухвековую историю [1, 2]. Интерес к этому классическому эффекту непрерывно растет, равно как и число его практических приложений [3]. Экспериментально реализованы схемы фазовой синхронизации лазерных решеток в резонаторах Тальбо, в системах обработки оптических изображений используются тальбо-фильтры и т.д. Суть эффекта состоит в том, что монохроматическое волновое поле с пространственной периодической модуляцией в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, самовоспроизводится вследствие дифракции на расстояниях $z_t^{(m)} = z_t m$ ($m = 1, 2, \dots$), кратных расстоянию Тальбо z_t . В случае одномерной модуляции с периодом a расстояние Тальбо

$$z_t = 2a^2/\lambda, \quad (1)$$

где λ – длина волны. Эффект Тальбо по сути представляет собой френелевскую дифракцию. Пространственное сфазирование гармоник углового спектра, которое лежит в основе эффекта, имеет прямую аналогию с временной синхронизацией лазерных мод при формировании ультракоротких импульсов. Наглядной демонстрацией такого сфазирования гармоник дискретного эквидистантного спектра является периодическое совпадение угла отклонения в ансамбле маятников Чеботаева [4].

В настоящей работе проводится обобщение эффекта Тальбо на волновые поля, распространяющиеся в гауссовых оптических системах. Рассмотрим «гауссовы» оптические системы [5], в которых преобразование поля световых пучков описывается в приближении дифракции Френеля. Ограничимся одномерным случаем. Комплекс-

ная амплитуда поля $u(x, z)$, прошедшего через такую оптическую систему, связана с начальным распределением $u(x, z = 0)$ интегральным соотношением [5]

$$u(x, z) = \left(\frac{ik}{2\pi B} \right)^{1/2} \int u(\xi, z = 0) \times \exp \left[\frac{ik}{2B} (A\xi^2 + Dx^2 - 2x\xi) \right] d\xi, \quad (2)$$

где A, B, D – элементы ABCD-матрицы оптической системы; $k = 2\pi/\lambda$. Элемент C не является независимым, т. к. определитель ABCD-матрицы должен быть равен единице. В качестве начального распределения возьмем периодически модулированное поле с периодом a :

$$u(x \pm a, 0) = u(x, 0). \quad (3)$$

Представим его в виде суперпозиции пространственных гармоник Фурье с пространственными частотами q_n :

$$u(x, z = 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(iq_n x), \quad q_n = \frac{2\pi}{a} n. \quad (4)$$

Подставив (4) в (2), определим поле на выходе оптической системы:

$$u(x, z) = A^{-1/2} \exp \left[\frac{ikx^2}{2AB} (AD - 1) \right] \times \sum_n c_n \exp \left(\frac{iq_n x}{A} - \frac{iq_n^2 B}{2kA} \right). \quad (5)$$

Требую, чтобы набег фазы всех гармоник был кратен 2π , получаем уравнение для определения расстояния самовоспроизведения

$$\frac{B}{A} = \frac{2a^2}{\lambda}. \quad (6)$$

При воспроизведении поля происходит масштабирование изображения. Период a' воспроизведенного изо-

*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119899 Москва, Воробьевы горы; e-mail: kandidov@msu.ilc.msu.su

**Международный учебно-научный лазерный центр МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия, 119899, Москва, Воробьевы горы; e-mail: kondrat@msu.ilc.msu.su; web-site: http://www.ilc.msu.su

бражения, как видно из (4), (5), определяется элементом A матрицы $ABCD$:

$$a' = Aa. \tag{7}$$

Волновой фронт в плоскости воспроизведения имеет радиус кривизны

$$R' = \frac{AB}{AD - 1}. \tag{8}$$

Оптической системой для классического эффекта Тальбо служит свободное пространство, при этом $ABCD$ -матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Подставляя элементы (9) в (6)–(8), получаем классическую формулу (1); период изображения совпадает с исходным, волновой фронт плоский.

Рассмотрим оптическую схему, в которой также имеет место «классическое» воспроизведение поля, т. е. $a' = a, R' = \infty$. Периодически модулированное поле фокусируется цилиндрической собирающей линзой (с фокусным расстоянием R) в центр цилиндрического зеркала радиусом r (рис.1,а). После отражения от зеркала поле в исходной плоскости восстанавливается, если выполняется соотношение

$$R = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r\lambda} \right)^{1/2}. \tag{10}$$

В этом можно убедиться, разрешая уравнения (5)–(7) для элементов $ABCD$ -матрицы:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2R^2/r - 2R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Описанная схема используется для телескопирования изображения при фазовой синхронизации в лазерных решетках на основе эффекта Тальбо [6]. В работе [7] предложена схема цилиндрического резонатора Тальбо, параметры которого рассчитываются на основе соотношения (10).

Развитый подход позволяет обобщить дифракционное самовоспроизведение периодического волнового поля на случай сходящейся и расходящейся волн. Пусть поле плоской волны сразу после прохождения периодической решетки фокусируется собирающей линзой с фокус-

ным расстоянием R (рис.1,б). $ABCD$ -матрица системы линза – свободное пространство

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z/R & z \\ -1/R & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Используя элементы матрицы (12), из соотношений (6)–(8) получаем, что изображение исходной периодической структуры воспроизводится на расстоянии

$$z^* = \frac{2a^2}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{R} \frac{2a^2}{\lambda} \right)^{-1}. \tag{13}$$

При этом период структуры уменьшается:

$$a^* = a \left(1 + \frac{1}{R} \frac{2a^2}{\lambda} \right)^{-1}. \tag{14}$$

Волновой фронт в плоскости $z = z^*$ имеет радиус кривизны

$$R^* = R \left(1 + \frac{1}{R} \frac{2a^2}{\lambda} \right)^{-1}. \tag{15}$$

Эффект Тальбо в сходящейся волне является следствием инвариантности параболического уравнения дифракции $2iku_z = u_{xx}$ относительно «линзового» преобразования [8]:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x}{1 - z/R}, & z' &= \frac{z}{1 - z/R}, \\ u' &= \frac{u}{(1 - z/R)^{1/2}} \exp\left(-\frac{ik}{2R} \frac{x^2}{1 - z/R}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Это означает, что в сходящейся волне с точностью до масштабного множителя для периода изображения и радиуса кривизны волнового фронта имеют место эффект Тальбо высших порядков и так называемые дробные (fractional) [9] эффекты. Эффект m -го порядка в сходящейся волне можно наблюдать на расстоянии

$$z_m^* = \frac{2a^2 m}{\lambda} \left(1 + \frac{2a^2}{\lambda R} m \right)^{-1}. \tag{17}$$

Период изображения a_m^* и радиус кривизны R_m^* волнового фронта уменьшаются в $[(1 + 2a^2 m / (\lambda R))]^{-1}$ раз. Разумеется, в реальном эксперименте из-за ограниченности периодической структуры наблюдать можно только конечное число эффектов высшего порядка.

Формула (17) описывает и аналоги «дробных» [8] эффектов Тальбо. Так, в плоскости $z = z_{1/4}^*$ имеет место удвоение структуры (с учетом масштабирования), при $z = z_{1/2}^*$ изображение сдвигается на половину периода $a_{1/2}^*$. Отметим, что при отрицательном значении R формулы (12)–(17) описывают воспроизведение периодического поля в расходящейся волне: плоскости восстановления изображения в этом случае находятся на большем расстоянии, чем в случае плоской волны, а период изображения увеличивается.

Таким образом, в гауссовых оптических системах, описываемых $ABCD$ -матрицами, имеет место эффект Тальбо. Расстояние дифракционного воспроизведения периодически модулированного волнового поля определяется элементами A, B матрицы оптической системы.

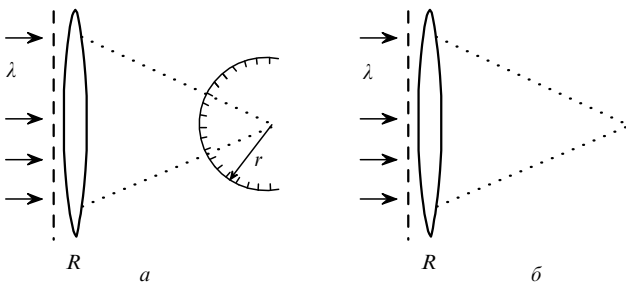


Рис.1. Эффект Тальбо в гауссовых оптических системах: телескопическая система линза – свободное пространство – сферическое зеркало (а) и дифракционное воспроизведение периодического поля в сходящейся волне (б).

Элемент A является также масштабным множителем, описывающим увеличение или уменьшение периода изображения. Эффект Тальбо существует в сходящейся или в расходящейся волне. При этом с учетом масштабирования наблюдаются «дробные» эффекты Тальбо и эффекты высших порядков.

Авторы благодарны В.В.Шувалову за полезную дискуссию.

1. Talbot H.F. *Philos.Mag.J.Sci., ser. III*, **9**, 401 (1836).
2. Rayleigh. *Philos.Mag.J.Sci., ser. V*, **11**, 196 (1881).
3. Patorski K. *Progr.Optics*, **27**, 1 (1989).
4. Ахманов С.А., Никитин С.Ю. *Физическая оптика* (М., изд-во МГУ, 1998).
5. Силичев О.О. *Основы оптики гауссовых пучков* (М., изд-во МФТИ, 1991).
6. Качурин О.Р., Лебедев Ф.В., Напартович А.П. *Квантовая электроника*, **15**, 1808 (1988).
7. Кандидов В.П., Кондратьев А.В. *Квантовая электроника*, **24**, 240 (1997).
8. Таланов В.И. *Письма в ЖЭТФ*, **11**, 303 (1970).
9. Winthrop J.T., Worthington C.R. *J.Opt.Soc.Amer.*, **55**, 373 (1965).

ПОПРАВКА

Е.П.Иванова, Н.А.Зиновьев, Л.В.Найт. Теоретическое исследование рентгеновского лазера на переходах Ni-подобного ксенона в области 13–14 нм («Квантовая электроника», 2001, т. 31, № 8, с. 683–688).

В статье допущена следующая опечатка: на с. 685 в табл.2 в последней колонке для τ_i^{Cu} в предпоследней строке вместо 0.15 следует читать 0.015.