PACS 42.25.Dd; 42.25.Fx

Об одном подходе к решению многомерных задач теории рассеяния света в мутных средах

Д.А.Рогаткин

Предложен новый подход к разработке простых аналитических моделей в многомерной теории рассеяния света в мутных средах. Подход основан на развитии одномерной модели Кубелки – Мунка на случай двух и более пространственных измерений и может позволить находить решение ряда задач в явном виде с точностью, достаточной для практических приложений.

***Ключевые слова**: рассеяние света, мутные среды, модель Кубелки – Мунка.*

Широкое внедрение в практику современных лазерных локационных систем и методов оптической (лазерной) диагностики в биологии и медицине [1 – 3] послужило толчком для возрождения интереса к теоретическому описанию распространения света в мутных средах, в частности к так называемой теории переноса (ТП) [4]. Особый интерес (в первую очередь, например, для медицинской диагностики) представляют простые аналитические модели, позволяющие наглядно изучать закономерности влияния параметров среды на поведение поля рассеянного излучения. Отличительной чертой таких моделей является то, что они должны описывать распространение излучения в условиях сильного многократного рассеяния, а также давать решение для потока, выходящего из среды со стороны освещаемой поверхности, т. к. большинство методов диагностики строится по принципу регистрации отраженного (обратно рассеянного) света.

Однако, несмотря на длительную историю развития методов оптики светорассеивающих сред, сегодня практически нет моделей, пригодных для аналитического решения реальных, особенно многомерных задач. Статистическое моделирование методом Монте-Карло лишено наглядности и требует больших затрат машинного времени. Наиболее часто используемое в ТП диффузионное приближение обладает низкой точностью применительно к указанным условиям (у поверхности) и даже приводит к несоблюдению собственных граничных условий [4, 5].

В связи с этим усилия специалистов направлены сегодня на поиск путей улучшения существующих моделей и анализ областей их применимости [5 – 7]. Например, найдены интересные подходы к уточнению малоуглового приближения [7] с использованием аппроксимирующих функций. Недавно нам удалось показать [8], что одномерные задачи ТП могут с хорошей точностью решаться на основе известных двухпотоковых моделей Кубелки – Мунка (КМ) при условии коррекции исходных уравнений на этапе их изначальной феноменологической

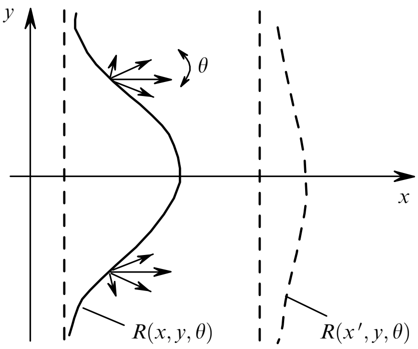

Рис.1. Функция интенсивности в двухмерной задаче.

формулировки. Этот подход, затрагивающий и общую проблему некорректности уравнения переноса, представляется возможным распространить на случай двух и более пространственых измерений.

В классической ТП излучение в среде описывается зависящей от угла интенсивностью, производная по лучу которой задается из априорных соображений. Даже если требуется найти распределение интенсивности в случае двумерного пространства, система уравнений становится бесконечно-неопределенной, и ее решение в явном виде сегодня неизвестно. Между тем практические аспекты большинства задач требуют по сути знаний не об изменении интенсивности вдоль какого-либо направления x, а о пространственном распределении всего поля интенсивности внутри и на границах среды. Таким образом, в общем случае, например в случае двумерной полубесконечной среды при $x > 0$ (рис.1), нас интересует некая трехмерная функция $R(x, y, \theta)$, которая изменяется по мере распространения излучения внутрь среды и характеризует собой пространственное распределение интенсивности излучения внутри среды.

Общий метод, используемый в ТП в случае, когда нельзя сразу определить вид функции, заключается в попытках на более «низком» уровне рассуждений найти производную этой функции, исходя из понимания физики процесса, а затем путем чисто математических операций получить вид самой функции. Тогда для распределения $R(x, y, \theta)$ вдоль оси x надо задать частную производную $\partial R(x, y, \theta)/\partial x$ и тривиальным интегрированием определить вид искомой функции. Весь вопрос заключается в способе задания производной.

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет), Россия, 109028 Москва, Б.Трехсвятительский пер., 3/12.; эл. почта: laserrog@mtu-net.ru

Поступила в редакцию 13 ноября 2000 г.

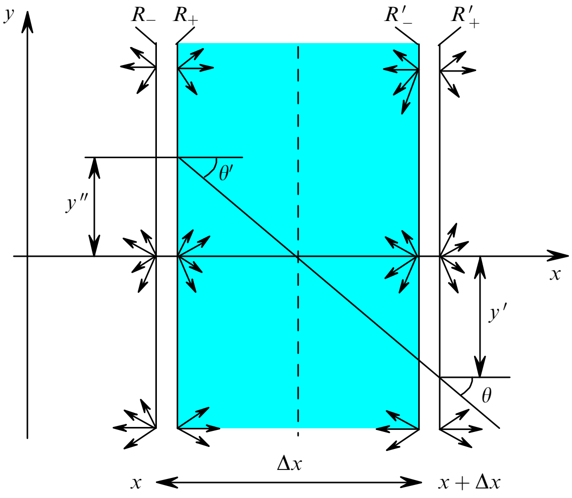

Рис.2. Метод встречных функций в многомерных задачах.

Общий подход метода КМ состоит в разбиении поля излучения в среде на два встречных потока [4]. Однако согласно [8] производную от интенсивности по координате можно корректно определить только на основе непосредственного вычисления предела приращения функции на элементе длиной Δx, варьируя Δx в зависимости от условий задачи. В двумерном и выше случаях представляется целесообразным также использовать аналогичный метод встречных функций (рис.2). Поскольку главные трудности заключаются в определении производной, а не в методах решения уравнений, для пояснения сути предлагаемого подхода достаточно рассмотреть один из потоков, например R_+, в двумерном пространстве, отвлекаясь на время от R_-. Согласно определению частной производной,

$$\frac{\partial R_+(x,y',\theta)}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{R_+(x+\Delta x,y',\theta)-R_+(x,y',\theta)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Следуя методике задания производной [8], с учетом разнесенности в пространстве актов поглощения и рассеяния излучения (рис.2) запишем:

$$R_+(x+\Delta x,y',\theta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_+(x,y'',\theta')\mathrm{e}^{-k\Delta x/\cos\theta'}\rho(\theta,\theta')\mathrm{d}\theta', \quad (2)$$

где k – погонный показатель поглощения в среде; ρ – фазовая (угловая) функция рассеяния. При этом переменная y'' в (2) может быть представлена в следующем виде:

$$y''=y'+\Delta x\tan\theta'. \quad (3)$$

Для функции $R_+(x,y,\theta)$ в (1), очевидно в силу неизменности физики процесса по координате x, имеет место также интегральное равенство

$$R_+(x,y',\theta)=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} R_+(x,y',\theta')\rho(\theta,\theta')\mathrm{d}\theta'. \quad (4)$$

Тогда, подставляя (3) в (2) и далее в (1) и (4) в (1), получаем при $\Delta x\to 0$ предел, имеющий неопределенность вида 0/0. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя и учитывая, что предел функции равен функции предела [9], для нахождения $R_+(x,y',\theta)$ получаем искомое дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных

$$\frac{\partial R_+(x,y',\theta)}{\partial x}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\partial R_+(x,y',\theta')}{\partial y}\tan\theta' - \frac{k}{\cos\theta'}R_+(x,y',\theta')\right]\rho(\theta,\theta')\mathrm{d}\theta'. \quad (5)$$

Если в рассмотрение вводится поток $R_-(x,y,\theta)$, то в правую часть (5), по аналогии с методом КМ, добавляется интеграл от $R_-(x,y,\theta)$. Кроме того, к общему уравнению (5) надо будет добавить связанное интегродифференциальное уравнение для потока $R_-(x,y,\theta)$. Иными словами, в общем случае многомерной задачи необходимо решать систему из двух интегродифференциальных уравнений в частных производных первого порядка.

Примечательность подхода (5), использующего уравнение (5), заключается, на наш взгляд, в следующем. Во-первых, поле излучения $R(x,y,\theta)$ в двумерном пространстве описывается функцией с неразделяющимися переменными. Уместно напомнить, что решения общих уравнений математической физики получены сегодня методом Фурье (методом разделения переменных). В данном случае открывается перспектива описания полей в функциях с неразделенными переменными. Во-вторых, использование уравнения (5) предполагает появление явной многомерной функции граничных условий для $x=0$ – функции $R_0(y,\theta)$.

Обратившись к методам решения многомерных задач в ТП на основе системы линейных уравнений для дискретных одномерных направлений (метод дискретных ординат, например), мы увидим, что там граничные условия задаются в виде дискретных чисел для каждого направления, а это меняет размерность величин. Кроме того, при постановке задачи эти дискретные числа не всегда известны. В данном же случае граничные условия формулируются наиболее естественным образом в виде распределенной функции.

Справедливость предложенного подхода может быть показана, например, для простейшего случая однородной и нерассеивающей среды. Отсутствие рассеяния приведет к исчезновению интеграла в первоначальной формулировке (2), и уравнение (5) примет вид

$$\frac{\partial R_+(x,y',\theta)}{\partial x}=\frac{\partial R_+(x,y',\theta)}{\partial y}\tan\theta-\frac{k}{\cos\theta}R_+(x,y',\theta). \quad (6)$$

Это уравнение является квазилинейным уравнением типа [9, 10]

$$a\frac{\partial F}{\partial x}+b\frac{\partial F}{\partial y}=cF. \quad (7)$$

Конус Монжа для него вырожден в ось Монжа, так что в каждой его точке есть только одно характеристическое направление [9]. Таким образом, решение уравнения (6) не представляет особых трудностей (уравнения типа (7) имеют табличные решения [10]). В частном случае равномерного освещения полупространства $x>0$ потоком $R_0(x=0,y,\theta)=R_0(\theta)$ решение не зависит от координаты y и имеет вид

$$R(x,\theta)=R_0(\theta)\mathrm{e}^{-kx/\cos\theta}. \quad (8)$$

Легко заметить, что при $k=0$ в среде будет продолжать распространяться первоначальный поток без изменений, как это и должно быть. В случае одномерной задачи $\theta = 0$ и формула (8) переходит в элементарный закон Бугера, что также хорошо согласуется с логикой задачи.

1. Тучин В.В. *Лазеры и волоконная оптика в биомедицинских исследованиях* (Саратов, изд-во Сарат. ун-та, 1998).
2. Рогаткин Д.А., Моисеева Л.Г. и др. *Современные методы лазерной клинической биоспектрофотометрии* (М., изд-во ВИНИТИ, 1997, ч.1).
3. Рогаткин Д.А. *Биомед. радиоэлектроника*, № 3, 34 (1998).
4. Исимару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* (М., Мир, 1981).
5. Аниконов Д.С. *ДАН*, **361**, 171 (1998).
6. Скипетров С.Е., Чесноков С.С. *Квантовая электроника*, **25**, 753 (1998).
7. Долин Л.С., Савельев В.А. *Препринт ИПФ РАН № 512* (Нижний Новгород, 1999).
8. Рогаткин Д.А. *Оптика и спектроскопия*, **87**, 109 (1999).
9. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов* (М., Наука, 1980).
10. Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка* (М., Наука, 1976).