PACS 42.65.Dr; 42.65.Es

Функция Грина для задач трехволнового взаимодействия

Н.Е.Молевич

Найдена функция Грина для задач трехволнового взаимодействия. С помощью этой функции проанализированы особенности параметрического усиления в диссипативных и активных средах. Показано, что параметрический инкремент в активных средах может стать экспоненциальным. В качестве примера рассмотрено нестационарное вынужденное рассеяние электромагнитных волн на звуковых и температурных волнах.

Ключевые слова: *трехволновое взаимодействие, функция Грина, параметрический инкремент, активная среда.*

1. Введение

Трехволновые взаимодействия охватывают широкий круг нелинейных явлений: различные виды вынужденного рассеяния электрогмагнитных и акустических волн на волнах иной природы, генерацию волн суммарной и разностной частот, возбуждение второй гармоники, параметрическое усиление и тому подобные процессы. При использовании приближений медленно меняющихся амплитуд, бесконечных плоских волн и в пренебрежении истощением волны накачки все эти взаимодействия допускают единую форму описания с помощью системы двух связанных уравнений в частных производных первого порядка. Методы получения этих уравнений и обоснование используемых приближений подробно описаны, например, в [1–5]. В настоящей работе эти уравнения решаются с помощью функции Грина.

2. Приближение заданного поля

В условиях фазового синхронизма стандартная система уравнений, описывающая трехволновое взаимодействие в приближении заданного поля волны накачки, имеет вид [6–12]

$$A_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}+A_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}+A_2\Phi=A_3\Psi^*\Pi,$$
$$B_0\frac{\partial\Psi^*}{\partial t}+B_1\frac{\partial\Psi^*}{\partial x}+B_2\Psi^*=B_3\Phi\Pi^*, \qquad (1)$$

где Φ, Ψ, Π – комплексные амплитуды взаимодействующих квазиплоских квазимонохроматических волн с частотами ω_1, ω_2, ω_0 и волновыми векторами $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$, $\boldsymbol{k}_0$ соответственно, причем $\omega_1+\omega_2=\omega_0$, $\boldsymbol{k}_1+\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_0$; амплитуда волны накачки $\Pi=\Pi_0$ не зависит от времени t и координаты x; ось x выбирается в направлении распространения возбуждающей волны; A_i, B_i – константы, определяемые физической постановкой задачи. В ряде физических задач диссипативные коэффициенты A_2, B_2 и коэффициенты нелинейной связи A_3, B_3 могут быть комплексными. Отношения коэффициентов A_1/A_0 и B_1/B_0 (скорости соответствующих волн вдоль оси x) полагаются вещественными.

Систему (1) следует дополнить краевыми условиями. Для определенности запишем их в виде

$$\Phi(0,t)=\Phi_0(t),\quad \Psi^*(0,t)=\Psi_0(t),$$
$$\Phi(x,0)=\Psi^*(x,0)=0. \qquad (2)$$

Здесь граничные условия заданы на входе в нелинейную среду ($x=0$), что удобно при распространении волн в направлении оси x. Этому соответствуют условия $A_1/A_0 > 0$, $B_1/B_0>0$. Если какая-то из волн распространяется в противоположную сторону, то граничные условия для нее удобнее задавать на границе среды $x=L$.

В предыдущих работах система (1) решалась с помощью различных упрощающих приближений. Например, в [10] эта система решалась при $B_1=A_2=0$, в [6, 7] – при $B_1=0$ и целом ряде предположений о рассматриваемых временных и пространственных пределах, в [8] – при $A_0=A_2=B_2=0$, в [9] – при $A_2=B_2=0$ и $\Phi_0(t)=0$. В [11] точное интегральное решение системы (1) получено также при $A_2=B_2=0$, но уже при произвольных функциях $\Phi_0(t)$, $\Psi_0(t)$. Это решение записано в форме Римана с использованием средней характеристики для волн Ψ и Φ. В этой же работе описана процедура, позволяющая учесть роль величин A_2 и B_2, но окончательные выражения с A_2, $B_2\neq 0$ не приведены из-за их сложности и громоздкости.

Ниже будет показано, что точное решение системы (1) может быть записано в удобной интегральной форме через функцию Грина $G(x,t)$, и будет найден вид этой функции. Впервые подобное интегральное решение было предложено в [12] для частного случая системы (1) (при $A_0=B_0=1$). Полученная в настоящей работе функция Грина окажется справедливой при любых коэффициентах A_i, B_i, включая их нулевые значения. Это сделает

Самарский государственный аэрокосмический институт им. С.П.Королева, Россия, 443086 Самара, Московское шоссе, 34; http://www.ssau.ru; e-mail: molevich@mb.ssau.ru

Поступила в редакцию 10 января 2001 г.; после доработки – 3 апреля 2001 г.

возможным ее использование для более широкого класса задач, например задач, рассмотренных в разд.3.

С помощью метода обобщенных функций [13] преобразуем систему (1) к следующим уравнениям с однородными краевыми условиями:

$$A_1B_1\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+(A_1B_0+B_1A_0)\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial t}+A_0B_0\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

$$+(A_2B_0+B_2A_0)\frac{\partial\phi}{\partial t}+(A_2B_1+A_1B_2)\frac{\partial\Phi}{\partial x}$$

$$+\left(A_2B_2-A_3B_3|\Pi_0|^2\right)\Phi=g(x,t),$$

$$\Psi^*=\frac{1}{A_3\Pi_0}\left(A_0\frac{\partial\Phi}{\partial t}+A_1\frac{\partial\Phi}{\partial x}+A_2\Phi\right). \qquad (3)$$

Здесь

$$g(x,t)=A_1B_1\Phi_0(t)\frac{\mathrm{d}\delta(x)}{\mathrm{d}x}+\left[A_1B_2\Phi_0(t)+A_3B_1\Pi_0\Psi_0(t)\right.$$

$$\left.+A_1B_0\frac{\mathrm{d}\Phi_0(t)}{\mathrm{d}t}\right]\delta(x);$$

$\delta(x)$ – дельта-функция.

Решение неоднородного уравнения (3) определяется через функцию Грина в виде

$$\Phi(x,t)=-\int_0^x\mathrm{d}x'\int_0^t G(x',t')g(x-x',t-t')\mathrm{d}t'$$

$$=-\int_0^t\left\{A_1\Phi_0(t-t')\left[B_1\frac{\partial G(x,t')}{\partial x}+B_0\frac{\partial G(x,t')}{\partial t'}\right.\right.$$

$$\left.\left.+B_2G(x,t')\right]+A_3B_1\Pi_0\Psi_0(t-t')G(x,t')\right\}\mathrm{d}t', \qquad (4)$$

где функция Грина удовлетворяет уравнению с однородными краевыми условиями

$$A_1B_1\frac{\partial^2G}{\partial x^2}+(A_1B_0+B_1A_0)\frac{\partial^2G}{\partial x\,\partial t}+A_0B_0\frac{\partial^2G}{\partial t^2}$$

$$+(A_2B_0+B_2A_0)\frac{\partial G}{\partial t}+(A_2B_1+A_1B_2)\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$+\left(A_2B_2-A_3B_3|\Pi_0|^2\right)G=-\delta(x)\delta(t). \qquad (5)$$

Для нахождения функции Грина применим к (5) двумерное преобразование Лапласа ($t\to\omega$, $x\to p$). В результате получим изображение по Лапласу функции Грина в виде

$$\Gamma(\omega,p)=-\left[(A_1p+A_0\omega+A_2)\right.$$

$$\left.\times(B_1p+B_0\omega+B_2)-A_3B_3|\Pi_0|^2\right]^{-1}. \qquad (6)$$

Обратное преобразование Лапласа выражения (6) (с помощью таблиц из [14]) позволяет найти искомую функцию Грина системы (1):

$$G(x,t)=\frac{\exp[Z_1(x,t)]}{A_1B_0-B_1A_0}J_0[Z_2(x,t)][\eta(\tau_2)-\eta(\tau_1)], \qquad (7)$$

где $\tau_1=t-xA_0/A_1$; $\tau_2=t-xB_0/B_1$; $Z_1(x,t)=(A_2B_1\tau_2-A_1B_2\tau_1)/(A_1B_0-B_1A_0)$; $Z_2(x,t)=2(A_1B_1A_3B_3|\Pi_0|^2\tau_1\tau_2)^{1/2}\times(A_1B_0-B_1A_0)^{-1}$; J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка; η – единичная функция Хевисайда.

Выражение (7) уточняет и обобщает на широкий класс задач трехволнового взаимодействия, описываемых системой уравнений (1), вид функции Грина, впервые приведенный без строгого математического обоснования в [12] для ВРМБ (частного случая подобных задач). Заметим, что вид функции Грина (7) сохранится и при других краевых условиях, отличных от условий (2). Меняться будет только вид «источника» $g(x,t)$ в неоднородном уравнении (3) и подынтегральном выражении (4).

В качестве примера конкретного применения функции Грина рассмотрим решения системы уравнений, описывающей нестационарное ВРМБ. Эта система в приближении заданного поля волны накачки E_0 имеет вид, аналогичный системе (1) [7]:

$$\frac{\partial E_1}{\partial t}+c\varphi_1\frac{\partial E_1}{\partial x}+c\alpha_1E_1=\mathrm{i}AP^*E_0,$$

$$\frac{\partial P^*}{\partial t}+u_s\varphi_2\frac{\partial P^*}{\partial x}+u_s\alpha_2P^*=-\mathrm{i}BE_1E_0^*, \qquad (8)$$

где $\varphi_1=\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_0/(k_1k_0)$; $\varphi_2=\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_0/(k_2k_0)$; E_1, P^* – комплексные амплитуды рассеянной электромагнитной волны (с частотой ω_1 и волновым вектором $\boldsymbol{k}_1$) и акустической волны ($\omega_2=\omega_0-\omega_1$, $\boldsymbol{k}_2=\boldsymbol{k}_0-\boldsymbol{k}_1$); α_1, α_2, c, u_s – коэффициенты поглощения и скорости соответствующих волн; $A=0.25Y\beta_s\omega_1/n^2$; $B=\omega_2Y/16\pi$; Y – параметр нелинейной электрострикционной связи; β_s – коэффициент адиабатической сжимаемости; n – показатель преломления.

Дополним систему (8) краевыми условиями $E_1(0,t)=E_{10}(t)$, $P^*(0,t)=P_0(t)$, $E_1(x,0)=P^*(x,0)=0$. Выражения (4), (7) позволяют сразу записать зависимости $E_1(x,t)$, $P^*(x,t)$ в виде

$$E_1(x,t)=\frac{1}{2}\int_0^t E_{10}(t-t')\exp(Z_1')I_1(Z_2')\frac{Z_2'}{\tau_1'}$$

$$\times\left[\eta(\tau_1')-\eta(\tau_2')\right]\mathrm{d}t'+E_{10}(\tau_1)\exp\left(-\frac{\alpha_1x}{\varphi_1}\right)\eta(\tau_1) \qquad (9а)$$

$$+\frac{\mathrm{i}AE_0u_s\varphi_2}{c\varphi_1-u_s\varphi_2}\int_0^t P_0(t-t')\exp(Z_1')I_0(Z_2')\left[\eta(\tau_1')-\eta(\tau_2')\right]\mathrm{d}t',$$

$$P^*(x,t)=-\frac{\mathrm{i}BE_0^*c\varphi_1}{c\varphi_1-u_s\varphi_2}\int_0^t E_{10}(t-t')\exp(Z_1')I_0(Z_2')$$

$$\times\left[\eta(\tau_1')-\eta(\tau_2')\right]\mathrm{d}t'+P_0(\tau_2)\exp\left(-\frac{\alpha_2x}{\varphi_2}\right)\eta(\tau_2) \qquad (9б)$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t P_0(t-t')\exp(Z_1')I_1(Z_2')\frac{Z_2'}{\tau_2'}\left[\eta(\tau_1')-\eta(\tau_2')\right]\mathrm{d}t',$$

где I_ν – модифицированная функция Бесселя первого рода ν-го порядка;

$$Z_1(x,t)=-\frac{\alpha_2u_sc\varphi_1\tau_1}{c\varphi_1-u_s\varphi_2}+\frac{\alpha_1u_sc\varphi_2\tau_2}{c\varphi_1-u_s\varphi_2};$$

$$Z_2(x,t)=\frac{2(-AB|E_0|^2u_sc\varphi_1\varphi_2\tau_1\tau_2)^{1/2}}{c\varphi_1-u_s\varphi_2};$$

$$\tau_1 = t - \frac{x}{c\varphi_1};\ \tau_2 = t - \frac{x}{u_s\varphi_2};\ Z'_{1,2}(x,t) = Z_{1,2}(x,t');$$

$$\tau'_{1,2}(x,t) = \tau_{1,2}(x,t').$$

В выражениях (9) устранены опечатки, допущенные ранее при записи амплитуд $E_1(x,\ t)$, $P^*(x,\ t)$ в [12].

С помощью (9) можно определить время t_s установления стационарного ВРМБ в виде

$$t_s = \frac{x}{c\varphi_1} + \frac{x(c\varphi_1 - u_s\varphi_2)}{2c\varphi_1 u_s\varphi_2}\left\{1 - \left(\frac{\alpha_2}{\varphi_2} - \frac{\alpha_1}{\varphi_1}\right)(c\varphi_1 u_s\varphi_2)^{1/2}\right.$$
$$\left.\times\left[c\varphi_1 u_s\varphi_2\left(\frac{\alpha_2}{\varphi_2} - \frac{\alpha_1}{\varphi_1}\right)^2 + 4AB|E_0|^2\right]^{-1/2}\right\}.$$

Здесь t_s соответствует максимуму показателя экспонент в интегралах в (9), причем $I_\nu(z) \sim \exp z(2\pi z)^{-1/2}$ при $z \gg 1$. При длительности возбуждающего импульса электромагнитного излучения $t < t_s$ коэффициент усиления интенсивности рассеянной волны υ в нестационарном режиме равен удвоенному показателю экспонент в интегралах в (9), т. е. при $Z_2 \gg 1$ имеем $\upsilon = 2[Z_1(x,\ t) + Z_2(x, t)]$. При $t > t_s$ достигается стационарный режим ВРМБ с известным коэффициентом усиления [7]

$$\upsilon_s = \upsilon(t_s) = -\left(\frac{\alpha_2}{\varphi_2} + \frac{\alpha_1}{\varphi_1}\right)x$$
$$+\left[\left(\frac{\alpha_2}{\varphi_2} - \frac{\alpha_1}{\varphi_1}\right)^2 + \frac{4AB|E_0|^2}{u_s c\varphi_1\varphi_2}\right]^{1/2} x.$$

Подобным образом с помощью функции Грина (7) могут быть рассмотрены любые трехволновые взаимодействия, описываемые системой (1). Разумеется, точные интегральные решения, записанные через функцию Грина и в форме Римана, должны совпадать. Выражение (9а) можно сравнить, например, с формулой (2.7) работы [11], полученной при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. В этой работе рассмотрено параметрическое взаимодействие волновых пакетов в заданном поле плоской монохроматической волны. Амплитуды волн записаны в форме Римана с использованием средней характеристики $\eta_{12} = (\eta_1 + \eta_2)/2$, где η_1, η_2 – характеристики взаимодействующих волн. Интегрирование при этом ведется по переменной η_{12}/ν_{12}, где ν_{12} – расстройка обратных групповых скоростей волновых пакетов.

С точностью до обозначений выражение (9а) (при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) и формула (2.7) из [11] могут быть приведены к одному виду. Различия состоят в следующем: во-первых, во втором интегральном слагаемом в (9а) присутствует множитель i и, во-вторых, в первом интеграле в (9а) деление производится на τ'_1, а не на τ'_2. Эти различия малосущественны и, возможно, связаны с какими-то неточностями или опечатками в [11]. Функцию Грина в подобных задачах использовать несколько удобнее, чем метод Римана, т. к. не требуется дополнительно переходить от переменных x, t к характеристикам взаимодействующих волн, переопределять краевые условия для этих характеристик и с помощью специальной подстановки устранять диссипативные слагаемые. Интегральные решения, записанные через функцию Грина, легко обобщаются для любых краевых условий.

3. Трехволновое взаимодействие в поле заданной диссипирующей волны накачки

В диссипирующих средах с большими декрементами α_0 на частоте возбуждающей волны приближение заданного поля $\Pi = \Pi_0$ оказывается неадекватным условиям трехволнового взаимодействия даже при малых амплитудах рассеянной волны (Φ, $\Psi^* \ll \Pi_0$). В этом случае менее грубым является приближение заданной диссипирующей волны накачки [15 – 19]

$$\Pi = \Pi_0 \exp(-\alpha_0 x). \tag{10}$$

Ниже с помощью функции Грина (7) будет найдено решение системы (1) при коэффициенте $B_1 = 0$ и амплитуде волны накачки (10). Приближение $B_1 = 0$ используется, например, при описании рассеяния электромагнитных (ВТР) и звуковых (ВТРЗ) волн на температурных волнах [15 – 20], рассеяния акустических волн на вихревых возмущениях [21], ВКР [22], а также ВРМБ и вынужденного энтальпийного рассеяния при больших акустических декрементах [10, 23].

Исходная система уравнений теперь имеет вид

$$\begin{aligned} &A_0\frac{\partial\Phi}{\partial t} + A_1\frac{\partial\Phi}{\partial x} + A_2\Phi = A_3\Psi^*\Pi_0\exp(-\alpha_0 x),\\ &B_0\frac{\partial\Psi^*}{\partial t} + B_2\Psi^* = B_3\Phi\Pi_0^*\exp(-\alpha_0 x). \end{aligned} \tag{11}$$

При краевых условиях (2) введем новые функции

$$\bar\Phi = \Phi\exp\left(\frac{A_2 x}{A_1}\right),\quad \bar\Psi = \Psi^*\exp\left(\alpha_0 x + \frac{A_2 x}{A_1}\right) \tag{12}$$

и новые переменные

$$y = t - \frac{A_0 x}{A_1},\quad \xi = \frac{1 - \exp(-2\alpha_0 x)}{2\alpha_0}. \tag{13}$$

С помощью (12), (13) система (11) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &A_1\frac{\partial\bar\Phi}{\partial\xi} = A_3\bar\Psi\Pi_0,\\ &B_0\frac{\partial\bar\Psi}{\partial y} + B_2\bar\Psi = B_3\bar\Phi\Pi_0^*. \end{aligned} \tag{14}$$

Решения (14) следуют из выражений (4), (7) (в которых коэффициенты A_0, A_2 и B_1 надо положить равными нулю):

$$\bar\Phi(\xi,y) = -A_1\int_0^y \Phi_0(y - y')$$
$$\times\left[B_0\frac{\partial G(\xi,y')}{\partial y'} + B_2 G(\xi,y')\right]\mathrm{d}y', \tag{15}$$

$$\bar\Psi(\xi,y) = \frac{A_1}{A_3\Pi_0}\frac{\partial\bar\Phi(\xi,y)}{\partial\xi}. \tag{16}$$

Здесь

$$G(\xi,y) = -\frac{\exp(-B_2y/B_0)}{A_1B_0}\,J_0[Z(\xi,y)]\eta(y),$$
$$Z(\xi,y) = 2\left(-\frac{A_3B_3|\Pi_0|^2y\xi}{A_1B_0}\right)^{1/2}. \tag{17}$$

Возвращаясь в (15)–(17) вновь к переменным x, t, получаем искомые выражения для амплитуд взаимодействующих волн:

$$\Phi(x,t) = -A_1\exp\left(-\frac{A_2x}{A_1}\right)\int_0^t \Phi_0(t-t')$$
$$\times\left[B_0\,\frac{\partial G(x,t')}{\partial t'} + B_2G(x,t')\right]\mathrm{d}t',$$
$$\Psi(x,t) = \frac{\exp(\alpha_0x)}{A_3\Pi_0}\left(A_0\,\frac{\partial}{\partial t} + A_1\,\frac{\partial}{\partial x} + A_2\right)\Phi(x,t), \tag{18}$$

где

$$G(x,t) = -\frac{\exp[-B_2(t-xA_0/A_1)]}{A_1B_0}\,J_0[Z(x,t)]\eta\left(t-\frac{xA_0}{A_1}\right),$$

$$Z(x,t) = \left[-2A_3B_3|\Pi_0|^2(t-xA_0/A_1)\,\frac{1-\exp(-2\alpha_0x)}{A_1B_0\alpha_0}\right]^{1/2}.$$

Эти результаты могут быть легко обобщены на краевые условия любого типа. Например, если граничное условие для волны Φ задано на границе $x = L$, то в (12), (13) надо просто везде заменить x на $x - L$. Тогда система (14) сохранит свой вид, но коэффициенты A_3, B_3 умножатся на $\exp(-\alpha_0L)$.

Применим полученные выражения для описания, например, нестационарного ВТР. Система уравнений, описывающая ВТР (без учета электрокалорического эффекта) в приближении заданной диссипирующей амплитуды накачки, имеет вид [20]

$$\frac{\partial E_1}{\partial t} + c\varphi_1\,\frac{\partial E_1}{\partial x} + c\alpha_1E_1 = A_TE_0\exp(-\alpha_0x)T_1^*,$$
$$\frac{\partial T_1^*}{\partial t} + \alpha_2T_1^* = B_TE_0^*\exp(-\alpha_0x)E_1, \tag{19}$$

где E_0, E_1 – амплитуды возбуждающей и рассеянной электромагнитных волн с частотами ω_0, ω_1 и волновыми векторами $\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}_1$; T_1 – амплитуда температурной волны с частотой $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$ и волновым вектором $\boldsymbol{k}_2 = \boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}_1$ (для стоксова рассеяния $\omega_2 > 0$, для антистоксова рассеяния $\omega_2 < 0$); α_0, α_1 – декременты электромагнитных волн; $\alpha_2 = \mathrm{i}\omega_2 + \chi k_2^2$; χ – коэффициент температуропроводности; $A_T = \mathrm{i}\omega_1(\partial\varepsilon/\partial T)_p/(4n^2)$; $B_T = \alpha_1n^2/(2\pi\rho_0c_p)$; ε – диэлектрическая проницаемость; c_p –удельная теплоемкость при постоянном давлении p; ρ, T – плотность и температура среды.

При краевых условиях вида (2), справедливых при $\theta < \pi/2$ (θ – угол рассеяния), из (18) получаем

$$E_1(x,t) = -\frac{1}{2}\int_0^t E_{10}(t-t')\,\frac{Z'_T}{\tau'}\,J_1(Z'_T)\exp\left(-\alpha_2\tau' - \frac{\alpha_1x}{\varphi_1}\right)$$
$$\times\,\eta(\tau')\mathrm{d}t' + E_{10}(\tau)\exp\left(-\frac{\alpha_1x}{\varphi_1}\right)\eta(\tau), \tag{20}$$

где J_1 – функция Бесселя первого рода первого порядка;

$$Z_T = \left[-2A_TB_T|E_0|^2\tau\,\frac{1-\exp(-2\alpha_0x)}{\alpha_0c}\right]^{1/2};\quad \tau = t - \frac{x}{c\varphi_1};$$

$$\tau' = t' - \frac{x}{c\varphi_1};\ Z'_T = Z_T(x,t');\ E_1(0,t) = E_{10}(t).$$

Эта зависимость совпадает с приведенной, например, в [20] при $\alpha_0 = 0$, $E_{10} = \mathrm{const}$ и в пренебрежении временной производной и диссипативным слагаемым $\sim\alpha_1$ в первом уравнении в (19).

Выражение (20) позволяет определить коэффициент усиления интенсивности рассеянной волны в нестационарном режиме (при $Z_T \gg 1$):

$$\upsilon_T = 2\mathrm{Re}\left\{-\alpha_2\tau - \frac{\alpha_1x}{\varphi_1} + \mathrm{i}Z_T\,\mathrm{sign}\left[B_T\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_p\right]\right\}, \tag{21}$$

где $\mathrm{sing}\,a = +1$ или -1 при $a > 0$ или $a < 0$ соответственно.

Время установления стационарного ВТР соответствует максимуму подынтегрального выражения в (20) и равно (при $\alpha_2 > 0$) модулю величины

$$t_{\mathrm{st}} = \frac{x}{c\varphi_1} + \frac{A_TB_T|E_0|^2[1-\exp(-2\alpha_0x)]}{2c\alpha_2^2\alpha_0}. \tag{22}$$

Учитывая (22), коэффициент усиления в стационарном режиме ($t > |t_{\mathrm{st}}|$) можно записать в виде

$$\upsilon_{\mathrm{st}} = \upsilon_T(t_{\mathrm{st}}) = -2\alpha_1\,\frac{x}{\varphi_1}$$
$$+\,\frac{\omega_2[1-\exp(-2\alpha_0x)]|A_TB_T||E_0|^2\mathrm{sign}[B_T(\partial\varepsilon/\partial T)_p]}{\alpha_0c(\omega_2^2+\chi^2k_2^4)}. \tag{23}$$

В цикле работ [15–19] система уравнений (11) при $A_0 = 0$, $\Phi_0 = \mathrm{const}$ с помощью специальной автомодельной замены преобразовывалась к уравнению Бесселя. В результате этой процедуры, примененной к краевой задаче, решения системы уравнений (11) теряли свой интегральный вид. Амплитуда волны $\Phi(x,t)$ в [15–19] практически совпадала с первым слагаемым в (18) (после интегрирования при $A_0 = 0$, $\Phi_0 = \mathrm{const}$). С помощью такого автомодельного решения невозможно проследить установление стационарного режима рассеяния. В [15–19] величина t_{M} (фактически совпадающая с $|t_{\mathrm{st}}|$), при которой амплитуда волны становится максимальной, трактуется как время достижения нестационарным параметрическим инкрементом максимума. На основе указанного (не интегрального) решения делается вывод о немонотонности нестационарного инкремента и стремлении его к нулю при $t \gg t_{\mathrm{M}}$. Из интегрального вида решения систем (11), (19) следует качественно иной вывод: при $t < |t_{\mathrm{st}}|$ параметрический инкремент нарастает, а при $t > |t_{\mathrm{st}}|$ устанавливается стационарный режим с инкрементом υ_{st}. При $\alpha_0 = 0$ выражение для времени установления стационарного режима (22) совпадает с приведенным в [20].

При обратном рассеянии ($\theta > \pi/2$) в формулах (20)–(23) надо просто осуществить указанные выше замены ($x \to x - L$, A_T, $B_T \to A_T\exp(-\alpha_0L)$, $B_T\exp(-\alpha_0L)$). В результате при прямом рассеянии электромагнитных волн ($\theta < \pi/2$) усиление будет происходить при $B_T\omega_2(\partial\varepsilon/\partial T)_p$

> 0, а при обратном рассеянии – при $B_T\omega_2(\partial\varepsilon/\partial T)_p < 0$. Формулы (20)–(23) справедливы при $\alpha_2 > 0$ и любых знаках α_0, α_1 (случай $\alpha_0 = 0$, $\alpha_2 < 0$ исследован в [24]), но в активной (инвертированной) среде меняется вид коэффициента B_T. Например, в работе [25] в случае быстрой релаксации нижнего лазерного уровня в инвертированном углекислом газе вместо α_1 в выражении для B_T предлагается использовать эффективный коэффициент поглощения $\alpha_{\rm eff} = |\alpha_1|\omega_0/\Omega$, где Ω – частота перехода с нижнего лазерного уровня на основной. Теоретически в неравновесных средах возможны также ситуации, когда $B_T < 0$.

Рассмотрим отдельно случаи диссипативной (α_0, $\alpha_1 > 0$) и активной ($\alpha_0, \alpha_1 < 0$) сред. В диссипативной среде для большинства веществ $(\partial\varepsilon/\partial T)_p < 0$ [10, 20], поэтому усиление при рассеянии вперед возможно только в антистоксовой области ($\omega_2 < 0$). Параметрические инкременты (21), (23) при $\alpha_0 x \ll 1$ являются линейными. Наличие диссипации с декрементом α_0 ограничивает длину нелинейного взаимодействия величиной $x \sim 1/\alpha_0$. При $\alpha_1 > 0$ ВТР является пороговым процессом. Пороговая интенсивность накачки согласно (23) возрастает в $2\alpha_0 x/[1 - \exp(-2\alpha_0 x)]$ раз по сравнению со случаем $\alpha_0 = 0$.

В активной среде при $\alpha_0, \alpha_1 < 0$ ВТР будет беспороговым, причем даже при слабой параметрической связи (малости второго слагаемого в (23) по сравнению с первым) усиливаться будут не только электромагнитные волны, но и температурная волна. Ее амплитуда $T_1 \sim \exp(-\alpha_0 x - \alpha_1 x/\varphi_1)$ будет нарастать в результате как стоксова, так и антистоксова рассеяния света. В литературе подобный перенос инкремента неустойчивой волны на слабую сигнальную волну иногда называют супергетеродинным усилением [26, 27].

При больших $|E_0|^2$ или больших x второе слагаемое в (23) доминирует и рассеяние в прямом направлении при $B_T(\partial\varepsilon/\partial T)_p < 0$ будет, как и в диссипативной среде, антистоксовым, а в обратном направлении – стоксовым. Учет усиления волны накачки ($\alpha_0 < 0$) приводит к экспоненциальному нарастанию инкремента вдоль оси x вместо линейного и, следовательно, к более резкому росту амплитуд E_1 и T_1, чем в диссипативной среде. Впервые подобный вывод был сделан в [28] при рассмотрении стационарного параметрического усиления ультразвуковых волн в пьезополупроводниках. Время установления стационарного режима рассеяния (22) также будет экспоненциально нарастать с ростом x.

Аналогичного изменения свойств параметрического взаимодействия в активных средах следует ожидать и при иной природе взаимодействующих волн, например при взаимодействии акустических волн с температурными и вихревыми волнами в средах с отрицательной второй (объемной) вязкостью [29].

4. Заключение

Полученная функция Грина и приведенные в настоящей работе решения систем уравнений нестационарного трехволнового взаимодействия могут быть полезны при исследовании широкого круга задач, в частности при исследовании ВРМБ, ВТР, ВТРЗ и подобных им процессов. Учет усиления волны накачки в активной среде приводит к экспоненциальному нарастанию параметрического инкремента вместо линейного и к экспоненциальному росту времени установления стационарного режима.

1. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики* (М., ВИНИТИ, 1964).
2. Бломберген Н. *Нелинейная оптика* (М., Мир, 1966).
3. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М., Наука, 1979).
4. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. *Прикладная нелинейная оптика* (М., Радио и связь, 1982).
5. Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М., Наука, 1989).
6. Kroll N.M. *J.Appl.Phys.*, **36**, 34 (1965).
7. Старунов В.С., Фабелинский И.Л. *УФН*, **98**, 441 (1969).
8. Сухоруков А.П., Щеднова А.К. *ЖЭТФ*, **60**, 1251 (1971).
9. Азимов Б.С., Карамзин Ю.Н., Сухоруков А.П., Сухорукова А.К. *ЖЭТФ*, **78**, 81 (1980).
10. Зельдович Б.Я., Пипипецкий Н.Ф., Шкунов В.В. *Обращение волнового фронта* (М., Наука, 1985).
11. Сухоруков А.П. *Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике* (М., Наука, 1988).
12. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. *Квантовая электроника,* **14**, 1678 (1987).
13. Владимиров В.С. *Уравнения математической физики* (М., Наука, 1981).
14. Диткин В.А., Прудников А.П. *Операционные исчисления по двум переменным и его приложения* (М., ГИФМЛ, 1958).
15. Бункин Ф.В., Воляк К.И., Ляхов Г.А. *Акустич.ж.*, **28**, 606 (1982).
16. Бункин Ф.В., Воляк К.И., Ляхов Г.А., Романовский М.Ю. *Изв.АН СССР. Сер.физич.*, **47**, 2437 (1983).
17. Бункин Ф.В., Воляк К.И., Ляхов Г.А., Романовский М.Ю. *ЖЭТФ*, **86**, 140 (1984).
18. Бункин Ф.В., Ляхов Г.А. *Труды ФИАН*, **156**, 3 (1984).
19. Бункин Ф.В., Ляхов Г.А., Романовский М.Ю. *Труды ИОФАН*, **6**, 103 (1987).
20. Старунов В.С. *ЖЭТФ*, **57**, 1012 (1969).
21. Пушкина Н.И., Хохлов Р.В. *Акустич.ж.*, **17**, 167 (1971).
22. Carman R.L., Shimizu F., Wang C.S., Bloembergen N. *Phys.Rev.A*, **2**, 60 (1970).
23. Зуев В.С., Корольков К.С., Носач О.Ю., Орлов Е.П. *Квантовая электроника*, **11**, 1737 (1984).
24. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **15**, 844 (1988).
25. Бельдюгин И.М., Васильев Л.А., Галушкин М.Г., Серегин А.М., Чебуркин Н.В. *Квантовая электроника*, **10**, 843 (1983).
26. Гуляев Ю.В., Зильберман П.Е. *ФТП*, **5**, 126 (1971).
27. Рабинович М.И., Фабрикант А.Л. *Изв.вуов.Сер.Радиофизика*, **19**, 722 (1976).
28. Zemon S., Zucker J., Wasko J.H., Conwell E.M., Ganguly A.K. *Appl.Phys.Letts*, **12**, 378 (1968).
29. Молевич Н.Е., Ораевский А.Н. *Труды ФИАН*, **222**, 45 (1992).