

Метод многократных отражений для электромагнитных волн в слоистых диэлектрических структурах

Г.В.Морозов, Р.Г.Маев, Г.В.Ф.Дрэйк

Исследуются отражение и прохождение плоской электромагнитной волны в слоистой диэлектрической структуре с произвольным числом слоев разной толщины. В общем случае наклонного падения волны на такую структуру методом многократных отражений рассчитаны коэффициенты отражения для ТЕ- и ТМ-волн. Предложен алгоритм использования полученных формул для численных и приближенных аналитических расчетов.

Ключевые слова: слоистая диэлектрическая структура, электромагнитная волна, наклонное падение, коэффициент отражения.

1. Введение

Постоянный интерес к оптическим и электронно-оптическим приборам, основанным на многослойных диэлектрических покрытиях, делает классическую задачу о распространении электромагнитной волны в одномерной системе диэлектрических слоев [1] актуальной и в настоящее время. Развитие лазерной физики постоянно стимулирует поиск новых многослойных покрытий, применяемых в качестве зеркал или фильтров в оптических резонаторах. Этот поиск часто ограничивается использованием различных численных методов, в которых материальные параметры слоев могут легко и быстро варьироваться внутри компьютерной программы, приводя к изменению характеристик отражения и прохождения слоистой системы.

Однако для последующего установления области параметров, где проявляются новые свойства этих систем (для выявления класса реальных материалов тех слоев, где эти свойства возможны), а также для понимания физических процессов, происходящих в системе, по-прежнему остается актуальным применение аналитических подходов. Так, в совсем недавней, но уже получившей широкую известность работе [2] принципиально новые возможности использования слоистых систем в качестве идеальных отражающих зеркал для электромагнитных волн различной поляризации были обнаружены на основе результатов тщательного аналитического исследования классической проблемы о нахождении разрешенных и запрещенных зон частот в двухслойной периодической системе. Эта проблема впервые была затронута еще в [3]. В работах [4, 5], также предпочтя аналитический метод численному, мы получили ряд новых результатов по распространению электромагнитных волн в ограниченных слоистых периодических системах в случае нор-

мального падения. В частности, была показана возможность использования таких структур в качестве рабочей среды оптических затворов [5].

Что же касается методов, применяемых для исследования произвольной слоистой (не обязательно периодической) структуры, то обычно используется одна из многочисленных интерпретаций так называемого метода матриц переноса (transfer matrix method), впервые введенного Абелесом для оптических [6], а Томсоном и Хаскеллом – для акустических волн [7, 8]. Подробный современный анализ матричных подходов сделан в обзоре [9]. Кроме того, широкое применение находят различные рекуррентные методы, суть которых сводится к определению связи между какими-либо физическими величинами в соседних слоях. Так, в работах [10, 11] было показано, что в случае нормального распространения волн рекуррентные соотношения связывают коэффициенты отражения соответственно в $j+1$ -м и j -м слоях. Применяя эти рекуррентные соотношения необходимое число раз, легко получить коэффициенты отражения и прохождения для всей слоистой системы.

Основной принцип, лежащий в основе матричных и рекуррентных подходов, состоит в получении системы алгебраических уравнений для амплитуд отраженной и прошедшей волн с использованием граничных условий, что в случае электромагнитных волн соответствует требованию непрерывности электрического и магнитного полей на границах слоев, т. е. в точках разрыва показателя преломления.

Отличительной чертой как матричных, так и рекуррентных методов является то, что при числе слоев в системе больше пяти (включая полубесконечные среды справа и слева от собственно слоистой системы) оба подхода становятся существенно численными. Это связано с тем, что хотя аналитические выражения для коэффициентов отражения и прохождения принципиально и могут быть получены, они приобретают настолько громоздкий вид, что их использование практически лишается смысла. В результате матричные и рекуррентные методы используются непосредственно для численных параметров слоев и длины падающей на слоистую систему волн.

Department of Physics, University of Windsor, Windsor, Ontario N9B 3P4, Canada; e-mail: morozov@uwindsor.ca, maev@uwindsor.ca, gdra-ke@uwindsor.ca; fax: (001) (519) 973 70 75

Поступила в редакцию 11 мая 2001 г.

Целью настоящей работы является построение приближенного аналитического метода расчета коэффициента отражения электромагнитной волны, падающей под произвольным углом на слоистую диэлектрическую систему (не обязательно периодическую) с произвольным числом слоев. Основная идея предлагаемого метода – представление отраженной (прошедшей) от всей системы слоев волны как суммы волн, многократно отраженных от границ каждого индивидуального слоя. Для одного слоя, помещенного между двумя полубесконечными средами, данный метод широко известен. Он получил название метода многократных отражений. Расчет по нему для нормального падения электромагнитной волны на слой можно найти, например, в [1], а в [12] данный метод используется для описания прохождения электронов через одномерные потенциальные барьеры.

Как уже было отмечено, формализм многократных отражений, развиваемый нами в данной работе для электромагнитных волн, приложим и в случае наклонного падения. Следовательно, будут рассмотрены падающие волны двух возможных типов поляризации – так называемые ТЕ- и ТМ-моды, причем полученные выражения для коэффициентов отражения могут быть использованы для волн обеих поляризаций. Кроме того, предполагается, что сама структура может обладать физическим затуханием или усилением, т.е. диэлектрическая проницаемость каждого слоя в общем случае комплексна.

2. Свойства электромагнитных волн в слоистых комплексных диэлектрических средах

Геометрия задачи изображена на рис.1. Между двумя полубесконечными средами с вещественной (ε_0) и комплексной (ε_f) диэлектрическими проницаемостями расположена слоистая диэлектрическая структура длиной L , представляющая собой m однородных плоских слоев с комплексными диэлектрическими проницаемостями ε_j и толщинами $d_j = z_j - z_{j-1}$, где $j = 1, 2, \dots, m$, $z_0 \equiv 0$, $z_m \equiv L$, $d_0 \equiv 0$:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_0, & z < 0, \\ \varepsilon_1, & 0 < z < z_1, \\ \dots, & \dots, \\ \varepsilon_m, & z_{m-1} < z < z_m, \\ \varepsilon_f, & z > L. \end{cases} \quad (1)$$

Напомним, что комплексность диэлектрической проницаемости означает наличие физического поглощения в диэлектрической среде. Будем полагать, что во всех слоях $\mu = 1$, т.е. $\mathbf{B} = \mathbf{H}$. Пусть электромагнитная волна с частотой ω и волновым числом в вакууме k падает на слоистую систему из среды с ε_0 под произвольным углом θ_0 к нормали с плоскостью раздела.

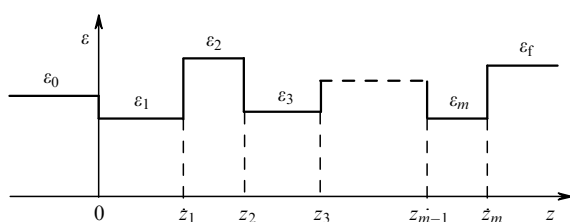


Рис.1. Слоистая диэлектрическая структура.

Из уравнений Максвелла следует, что в диэлектрической структуре, описываемой (1), координаты x , y могут быть выбраны так, что электромагнитное поле плоских волн будет зависеть только от одной из них, например от координаты x . Это означает, что для плоских монохроматических волн, распространяющихся в такой структуре, возможны две независимые поляризации. В первом случае поле \mathbf{E} перпендикулярно плоскости распространения xz , т.е. направлено вдоль оси y , а магнитное поле \mathbf{H} лежит в данной плоскости (случай ТЕ-волн). Во втором случае электрическое поле \mathbf{E} лежит в плоскости xz , а поле \mathbf{H} направлено вдоль оси y (случай ТМ-волн). Однако для волн обоих типов из уравнений Максвелла следуют некоторые общие закономерности. Так, для любого слоя с ε_j выполняется дисперсионное соотношение, связывающее комплексный в общем случае волновой вектор \mathbf{k}_j с частотой волны ω ,

$$\mathbf{k}_j^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_j,$$

или в более подробной записи

$$k_j'^2 - k_j''^2 + 2i\mathbf{k}_j' \mathbf{k}_j'' = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon_j' + i\varepsilon_j''), \quad (2)$$

где \mathbf{k}_j' и \mathbf{k}_j'' – вещественные векторы, направления которых соответственно перпендикулярны поверхностям постоянной фазы и амплитуды волны; ε_j' и ε_j'' – вещественные и мнимые части диэлектрической проницаемости ε_j . Далее в силу однородности задачи в плоскости xu для всех слоев выполнено соотношение

$$k_{0x} = k_{jx}, \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (3)$$

где \mathbf{k}_0 – волновой вектор падающей волны в среде с ε_0 . Связь же электрического поля с магнитным в плоской монохроматической волне, распространяющейся в немагнитной среде, дается соотношениями (см., напр., [13])

$$\mathbf{H}_j = \frac{c}{\omega} \mathbf{k}_j \times \mathbf{E}_j, \quad \mathbf{E}_j = -\frac{c}{\omega \varepsilon_j} \mathbf{k}_j \times \mathbf{H}_j, \quad (4)$$

где все три вектора комплексны. Отметим, что соотношения (2)–(4) очевидно выполняются и для полубесконечных сред с ε_0 , ε_f .

Из (2) легко видеть, что даже для прозрачной среды с ε_0 ($\varepsilon_0'' = 0$) \mathbf{k}_0 может быть комплексным, если $\mathbf{k}_0' \perp \mathbf{k}_0''$. Однако, поскольку такая ситуация имеет место только для полного внутреннего отражения, логично считать вектор падающей волны \mathbf{k}_0 вещественным по определению. Тогда его модуль и проекции на оси x и y определяются формулами

$$k_0 = \frac{\omega}{c} \varepsilon_0^{1/2}, \quad k_{0x} = \frac{\omega}{c} \varepsilon_0^{1/2} \sin \theta_0, \quad k_{0z} = \frac{\omega}{c} \varepsilon_0^{1/2} \cos \theta_0, \quad (5)$$

где θ_0 – угол между волновым вектором \mathbf{k}_0 падающей волны и осью z . Соотношение (3) означает вещественность x -компонент волновых векторов в любом слое с ε_j , а также в среде с ε_f . Из этого следует, что \mathbf{k}_j' в любом слое направлен вдоль оси z , т.е. в любом слое затухание происходит перпендикулярно его границам. В этом случае угол θ_j между векторами \mathbf{k}_j' и \mathbf{k}_j'' в любом j -м слое есть угол между вектором \mathbf{k}_j' преломленной (отра-

женной) волны и осью z , т. е. привычный нам угол преломления (отражения). Подчеркнем, что угол θ_j , введенный нами таким образом, всегда веществен. В случае полного внутреннего отражения на границе каких-либо двух слоев во втором слое он равен $\pi/2$. Отметим, что для характеристики полного внутреннего отражения, а также для сред с затуханием можно использовать и комплексные углы падения и преломления [14].

Из (2), (3) и (5) легко получить выражения для проекций комплексного вектора \mathbf{k}_j на оси x и z :

$$k_{jx} = \frac{\omega}{c} \varepsilon_0^{1/2} \sin \theta_0, \quad k_{jz} = \pm \frac{\omega}{c} [(\varepsilon_j' + i\varepsilon_j'') - \varepsilon_0 \sin^2 \theta_0]^{1/2}, \quad (6)$$

где знак «+» соответствует волне, направление распространения которой (направление вектора \mathbf{k}_j') образует острый угол с осью z . Как уже отмечалось, проекция k_{jx} всегда вещественна и не зависит от номера слоя j . Что же касается проекции k_{jz} , то она комплексна, и в силу этого выражение (6) для нее носит несколько формальный характер, т. к. в нем не выделены вещественная и мнимая части. Однако попытка выделить их немедленно приводит нас к необходимости нахождения самих векторов \mathbf{k}_j' и \mathbf{k}_j'' и угла θ_j между ними, что является весьма громоздкой задачей [15].

Сами электромагнитные поля ТЕ- и ТМ-волн в каждом слое s ($j = 1, 2, \dots, m$) согласно уравнениям Максвелла могут быть выражены как

$$E_{jy}^{\text{TE}}(x, z, t) = \{A_j \exp[ik_{jz}(z - z_{j-1})] + B_j \exp[-ik_{jz}(z - z_{j-1})]\} \exp[i(k_{jx}x - \omega t)],$$

$$H_{jx}^{\text{TE}}(x, z, t) = -\frac{k_{jz}}{k} \{A_j \exp[ik_{jz}(z - z_{j-1})] - B_j \exp[-ik_{jz}(z - z_{j-1})]\} \exp[i(k_{jx}x - \omega t)], \quad (7)$$

$$H_{jz}^{\text{TE}}(x, z, t) = \frac{k_{jx}}{k} \{A_j \exp[ik_{jz}(z - z_{j-1})] + B_j \exp[-ik_{jz}(z - z_{j-1})]\} \exp[i(k_{jx}x - \omega t)]$$

и

$$H_{jy}^{\text{TM}}(x, z, t) = \{A_j \exp[ik_{jz}(z - z_{j-1})] + B_j \exp[-ik_{jz}(z - z_{j-1})]\} \exp[i(k_{jx}x - \omega t)],$$

$$E_{jx}^{\text{TM}}(x, z, t) = \frac{k_{jz}}{k\varepsilon_j} \{A_j \exp[ik_{jz}(z - z_{j-1})] - B_j \exp[-ik_{jz}(z - z_{j-1})]\} \exp[i(k_{jx}x - \omega t)], \quad (8)$$

$$E_{jz}^{\text{TM}}(x, z, t) = -\frac{k_{jx}}{k\varepsilon_j} \{A_j \exp[ik_{jz}(z - z_{j-1})] + B_j \exp[-ik_{jz}(z - z_{j-1})]\} \exp[i(k_{jx}x - \omega t)].$$

Для полубесконечных пространств с ε_0 и ε_f формулы (7) и (8) останутся справедливыми, если мы будем полагать, что $z_{-1} \equiv 0$ и вместо индекса f используем $m + 1$. Кроме того, в силу падения начальной волны из среды с ε_0 следует, что $B_f = 0$. Далее, не теряя общности, можно положить $A_0 = 1$. Тогда амплитудные коэффициенты отражения R и прохождения T запишутся как $R = B_0$ и $T = A_f$.

Введем теперь френелевские коэффициенты отражения и прохождения для одиночной неоднородной плоской волны на границе между произвольными слоями с ε_j и ε_{j+1} . Рассмотрим сначала ТЕ-волну. Для нее электрические поля в слоях с ε_j и ε_{j+1} принимают вид

$$E_{jy}^{\text{TE}}(x, z, t) = \{a_j \exp[ik_{jz}(z - z_{j-1})] + b_j \exp[-ik_{jz}(z - z_{j-1})]\} \exp[i(k_{jx}x - \omega t)], \quad (9)$$

$$E_{j+1,y}^{\text{TE}}(x, z, t) = \{a_{j+1} \exp[ik_{j+1,z}(z - z_j)] \exp[i(k_{jx}x - \omega t)]\}.$$

Магнитные поля данной волны в слоях с ε_j и ε_{j+1} могут быть получены из (9) с помощью уравнений Максвелла. Выражения для френелевских коэффициентов отражения и прохождения следуют немедленно из граничных условий:

$$r_{j,j+1}^{\text{TE}} \equiv \frac{E_j^-(z_j - 0)}{E_j^+(z_j - 0)} = \frac{b_j \exp(-ik_{jz}d_j)}{a_j \exp(ik_{jz}d_j)} = \frac{k_{jz} - k_{j+1,z}}{k_{jz} + k_{j+1,z}}, \quad (10)$$

$$t_{j,j+1}^{\text{TE}} \equiv \frac{E_{j+1}^+(z_j + 0)}{E_j^+(z_j - 0)} = \frac{a_{j+1}}{a_j \exp(ik_{jz}d_j)} = \frac{2k_{jz}}{k_{jz} + k_{j+1,z}}. \quad (11)$$

Для ТМ-волны в слоях с ε_j и ε_{j+1} выражения (9) верны для магнитных полей H_{jy} и $H_{j+1,y}$ с заменой $E \rightarrow H$, а электрические поля получаются из данных выражений с помощью уравнений Максвелла. Тогда френелевские коэффициенты для ТМ-волны принимают форму

$$r_{j,j+1}^{\text{TM}} \equiv \frac{H_j^-(z_j - 0)}{H_j^+(z_j - 0)} = \frac{b_j \exp(-ik_{jz}d_j)}{a_j \exp(ik_{jz}d_j)} = \frac{\varepsilon_{j+1}k_{jz} - \varepsilon_j k_{j+1,z}}{\varepsilon_{j+1}k_{jz} + \varepsilon_j k_{j+1,z}}, \quad (12)$$

$$t_{j,j+1}^{\text{TM}} \equiv \frac{H_{j+1}^+(z_j + 0)}{H_j^+(z_j - 0)} = \frac{a_{j+1}}{a_j \exp(ik_{jz}d_j)} = \frac{2\varepsilon_{j+1}k_{jz}}{\varepsilon_{j+1}k_{jz} + \varepsilon_j k_{j+1,z}}. \quad (13)$$

Далее весь развиваемый нами формализм одинаково применим к волнам обеих поляризацій, если под френелевскими коэффициентами в получаемых выражениях понимать соответствующую формулу из (10), (11) или (12), (13). Например, так называемые соотношения Стокса для френелевских коэффициентов имеют общий вид и для ТЕ- и для ТМ-волн:

$$r_{j,j+1} = -r_{j+1,j}, \quad r_{j,j+1}^2 + t_{j,j+1}t_{j+1,j} = 1. \quad (14)$$

Перейдем теперь непосредственно к выводу коэффициента отражения R для ТЕ- и ТМ-волн, падающих на слоистую систему, описываемую (1), с помощью метода многократных отражений. Случай произвольной поляризации падающей волны удобно затем рассматривать путем ее разложения на ТЕ- и ТМ-моды.

3. Точный расчет коэффициента отражения для одного слоя

Применение метода многократных отражений для одного слоя хорошо известно в литературе и обычно рассматривается в рамках теории резонатора Фабри–Перо. Кратко опишем суть метода для этого случая. Волну, отраженную от всей системы (среды с ε_0 и ε_f и слой с ε_1), можно рассматривать как суперпозицию следующих волн: а) волны, отраженной от границы $\varepsilon_0/\varepsilon_1$; б) волны, которая проходит через границу $\varepsilon_0/\varepsilon_1$, а затем

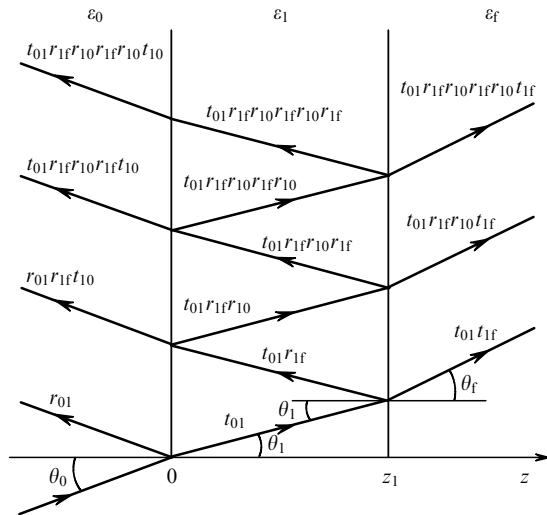


Рис.2. Применение метода многократных отражений к одному слою.

через слой и, отразившись от границы ϵ_1/ϵ_f , снова проходит через слой и выходит из него через границу ϵ_1/ϵ_0 ; в) волны, которая проникает в слой, дважды отражается от границы ϵ_1/ϵ_f и один раз – от границы ϵ_1/ϵ_0 , затем дважды проходит туда и обратно по слою и выходит через границу ϵ_1/ϵ_0 , г) и т. д. (см. рис.2). Суммируя вклад всех этих парциальных волн в суммарный коэффициент отражения R_1 , получаем

$$R_1 = r_{01} + t_{01} \exp(ik_{1z}d_1)r_{1f} \exp(ik_{1z}d_1)t_{10} + t_{01} \exp(ik_{1z}d_1) \times r_{1f} \exp(ik_{1z}d_1)r_{10} \exp(ik_{1z}d_1)r_{1f} \exp(ik_{1z}d_1)t_{10} + \dots$$

Члены ряда, начиная со второго, образуют бесконечную геометрическую прогрессию. Пользуясь формулой для ее суммы и учитывая (14), получаем

$$R_1 = r_{01} + \frac{t_{01}t_{10}r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1)}{1 + r_{01}r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1)} = \frac{r_{01} + r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1)}{1 + r_{01}r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1)}, \tag{15}$$

где френелевские коэффициенты отражения и прохождения для ТЕ- и ТМ-волн даются формулами (10)–(13). К

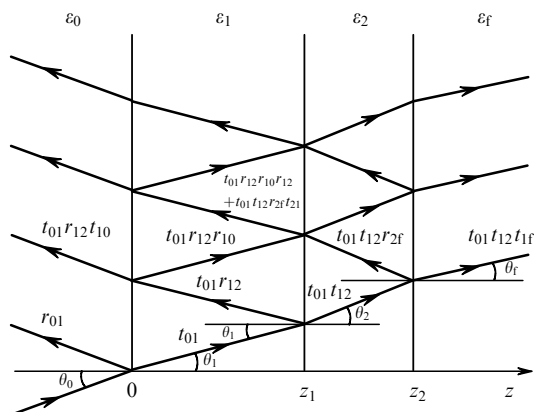


Рис.3. Применение метода многократных отражений к двум слоям.

сожалению, уже для двух слоев картина отраженных и прошедших волн становится настолько сложной (рис.3), что суммировать прямым и точным методом все парциальные волны, дающие вклад в суммарный коэффициент отражения R_2 , невозможно.

4. Рекуррентный расчет коэффициента отражения для многослойной системы

Обозначим через r_1 суммарный коэффициент отражения от границы ϵ_1/ϵ_2 первого слоя с оставшейся системой, состоящей из $m - 1$ слоев и среды с ϵ_f . Тогда, повторяя вычисления, проведенные для одного слоя в предыдущем разделе, получаем

$$R_m = r_{01} + \frac{t_{01}t_{10}r_1 \exp(2ik_{1z}d_1)}{1 + r_{01}r_1 \exp(2ik_{1z}d_1)}. \tag{16}$$

В свою очередь, представив волну, отраженную от границы ϵ_1/ϵ_2 , как сумму парциальных волн, отраженных от границы ϵ_2/ϵ_3 , получим

$$r_1 = r_{12} + \frac{t_{12}t_{21}r_2 \exp(2ik_{2z}d_2)}{1 + r_{12}r_2 \exp(2ik_{2z}d_2)}, \tag{17}$$

где r_2 – суммарный коэффициент отражения от границы ϵ_2/ϵ_3 второго слоя с оставшейся системой, состоящей из $m - 2$ слоев и среды с ϵ_f . Для произвольной же границы $\epsilon_j/\epsilon_{j+1}$

$$r_j = r_{j,j+1} + \frac{t_{j,j+1}t_{j+1,j}r_{j+1} \exp(2ik_{j+1,z}d_j)}{1 + r_{j,j+1}r_{j+1} \exp(2ik_{j+1,z}d_j)}, \tag{18}$$

где r_{j+1} – суммарный коэффициент отражения от границы $\epsilon_{j+1}/\epsilon_{j+2}$ $j + 1$ -го слоя с оставшейся системой, состоящей из $m - j - 1$ слоев и среды с ϵ_f . Для последней границы, т. е. для границы ϵ_m/ϵ_f , $j = m$ и $r_m = r_{mf}$, где r_{mf} – френелевский коэффициент отражения на границе последнего слоя со средой с ϵ_f .

Таким образом, задача об отражении ТЕ- или ТМ-волны от системы, состоящей из произвольного числа плоских слоев m , может быть решена последовательным применением m раз формулы (18) с учетом равенства $r_m = r_{mf}$. Данная процедура носит рекуррентный характер и приводит к точным аналитическим результатам. С учетом соотношений Стокса получаем, например, коэффициент отражения для двух ($m = 2$) слоев соответственно в виде

$$R_2 = \frac{r_{01} + r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2)}{1 + r_{01}r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{12}r_{2f} \exp(2ik_{2z}d_2)} \rightarrow \frac{r_{01} + r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2)}{1 + r_{01}r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{12}r_{2f} \exp(2ik_{2z}d_2)}. \tag{19}$$

Для системы, состоящей из большего числа слоев, окончательные результаты хотя и точны, но весьма громоздки. Так, уже для трех слоев ($m = 3$) коэффициент отражения R_3 имеет вид

$$R_3 = \frac{r_{01} + r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{23} \exp[2i(k_{1z}d_1 + k_{2z}d_2)]}{1 + r_{01}r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{12}r_{23} \exp(2ik_{2z}d_2)}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow \frac{+r_{3f} \exp[2i(k_{1z}d_1 + k_{2z}d_2 + k_{3z}d_3)] + r_{01}r_{12}r_{23} \exp(2ik_{2z}d_2)}{+r_{23}r_{3f} \exp(2ik_{3z}d_3) + r_{12}r_{3f} \exp[2i(k_{2z}d_2 + k_{3z}d_3)]} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{+r_{01}r_{23}r_{3f} \exp(2ik_{3z}d_3) + r_{01}r_{12}r_{3f} \exp[2i(k_{2z}d_2 + k_{3z}d_3)]}{+r_{01}r_{23} \exp[2i(k_{1z}d_1 + k_{2z}d_2)] + r_{01}r_{3f} \exp[2i(k_{1z}d_1} \\ & \rightarrow \frac{+r_{12}r_{23}r_{3f} \exp[2i(k_{1z}d_1 + k_{3z}d_3)]}{+k_{2z}d_2 + k_{3z}d_3]} + r_{01}r_{12}r_{23}r_{3f} \exp[2i(k_{1z}d_1 + k_{3z}d_3)]}. \quad (20) \end{aligned}$$

В результате имеет смысл использовать алгоритм (18) непосредственно в численной форме для заданных параметров (диэлектрических проницаемостей и толщин) слоев. Однако, как мы увидим в следующем разделе, сам метод многократных отражений все же позволяет получить для реальных оптических материалов хотя и приближенные, но хорошо согласующиеся с точными аналитические результаты в физически ясной и относительно простой форме.

5. Приближенный расчет коэффициента отражения

Основная физическая идея состоит в том, что наибольший вклад в коэффициент отражения от всей системы слоев вносят волны, испытавшие наименьшее число переотражений внутри данной системы. Это следует из того, что для френелевских коэффициентов отражения на границах двух произвольных слоев всегда выполнено соотношение $|r_{j,j+1}| < 1$. Очевидно, что любая парциальная волна, вносящая вклад в суммарный коэффициент отражения, испытывает внутри системы слоев нечетное число переотражений. Тогда в первом приближении мы будем учитывать только члены, пропорциональные $r_{j,j+1}$, где $j = 0, 1, 2, \dots, m$ и $m + 1 = f$, во втором приближении будем учитывать также члены, пропорциональные $r_{j,j+1} \times r_{p,p+1}r_{q,q+1}$, и т. д. В результате в первое приближение дадут вклад только парциальные волны, испытавшие одно переотражение во всей системе слоев, во второе – волны, испытавшие одно и три переотражения, и т. д.

Проиллюстрируем теперь вышесказанное конкретными примерами. Рассмотрим снова случай одного слоя ($m = 1$). Для него коэффициент отражения в первом приближении учитывает только вклад волны, отраженной от границы $\varepsilon_0/\varepsilon_1$, и волны, которая проходит через границу $\varepsilon_0/\varepsilon_1$, затем через слой, отражается от границы $\varepsilon_1/\varepsilon_f$, снова проходит через слой и выходит из него через границу $\varepsilon_1/\varepsilon_0$. Тогда

$$\begin{aligned} R_1 & \approx r_{01} + t_{01} \exp(ik_{1z}d_1)r_{1f} \exp(ik_{1z}d_1)t_{10} \\ & = r_{01} + (1 - r_{01}^2)r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1) \approx r_{01} + r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1), \end{aligned}$$

где мы пренебрегли членом $-r_{01}^2r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1)$, который является вкладом уже во второе приближение. В результате коэффициент отражения от одного слоя в первом приближении теории многократных отражений есть

$$R_1^{(1)} = r_{01} + r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1). \quad (21)$$

Во втором приближении в суммарный результат даст также вклад волна, дважды прошедшая по слою и вышедшая из него после двух отражений на границе $\varepsilon_1/\varepsilon_f$ и одного отражения на границе $\varepsilon_1/\varepsilon_0$. С учетом этой волны получаем

$$\begin{aligned} R_1 & \approx r_{01} + t_{01} \exp(ik_{1z}d_1)r_{1f} \exp(ik_{1z}d_1)t_{10} + t_{01} \exp(ik_{1z}d_1) \\ & \times r_{1f} \exp(ik_{1z}d_1)r_{10} \exp(ik_{1z}d_1)r_{1f} \exp(ik_{1z}d_1)t_{10} \\ & = r_{01} + (1 - r_{01}^2)r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1) + (1 - r_{01}^2)r_{10}r_{1f}^2 \\ & \times \exp(4ik_{1z}d_1) \approx r_{01} + r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1) \\ & - r_{01}^2r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1) - r_{01}r_{1f}^2 \exp(4ik_{1z}d_1), \end{aligned}$$

где мы пренебрегли членом $r_{01}^3r_{1f}^2 \exp(4ik_{1z}d_1)$ – вкладом в третье приближение. В результате коэффициент отражения от одного слоя во втором приближении теории многократных отражений есть

$$\begin{aligned} R_1^{(2)} & = r_{01} + r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1) - r_{01}^2r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1) \\ & - [r_{1f} \exp(2ik_{1z}d_1)]^2 r_{01}. \quad (22) \end{aligned}$$

Сравнение результатов расчета для коэффициента отражения от одного слоя в первом и втором приближениях с точной формулой (15) приведены на рис. 4.

Для примера рассмотрим зависимость коэффициента отражения от длины волны падающего света в оптическом диапазоне при нормальном падении в отсутствие поглощения. В этом случае френелевские коэффициенты отражения и прохождения (10)–(13) вещественны и совпадают для ТЕ- и ТМ-волн:

$$r_{j,j+1} = \frac{n_j - n_{j+1}}{n_j + n_{j+1}}, \quad t_{j,j+1} = \frac{2n_j}{n_j + n_{j+1}}, \quad n_j = \varepsilon_j^{1/2}. \quad (23)$$

Выбрав в качестве коэффициентов преломления $n_0 \simeq 1$ (воздух), $n_1 \simeq 2.4$ (халькогенидное стекло [16]) и $n_f \simeq 3.6$ (арсенид галлия), мы реализовали достаточно плохую из встречающихся на практике с точки зрения предлагаемого метода ситуацию (типичный диапазон показателей преломления оптических материалов $1 < n_j < 4$). Дело в том, что из-за большой разницы в показателях преломления достаточно велики (согласно формулам (23)) r_{01} и r_{1f} ($|r_{01}| \simeq 0.41$, $|r_{1f}| \simeq 0.2$). Если же, например, $n_1 = 1.3$ (фторированный этиленпропилен) и $n_f = 1.5$ (окись кремния), то $|r_{01}| \simeq 0.13$, $|r_{1f}| \simeq 0.07$, и члены более высоких

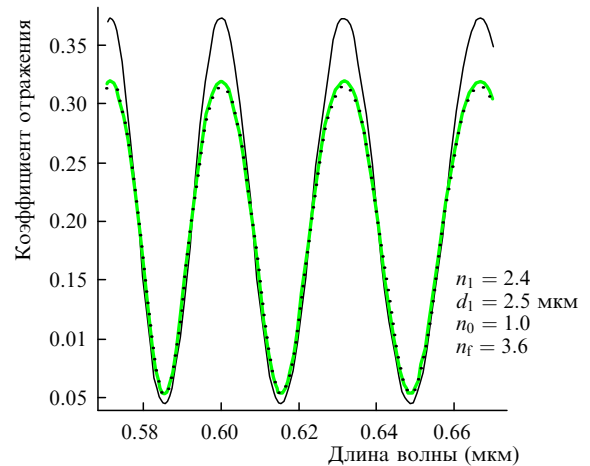


Рис. 4. Зависимости коэффициента отражения от длины волны падающего света для слоистой системы, состоящей из одного слоя; сплошная линия – первое приближение, пунктирная линия – второе приближение, серая линия – точный результат.

порядков будут давать значительно меньший вклад в суммарный коэффициент отражения R_1 .

Рассмотрим теперь случай двух слоев ($m = 2$). Для него вклад в коэффициент отражения в первом приближении теории многократных отражений дают только парциальные волны, испытавшие одно отражение, т. е. а) волна, отраженная от границы $\varepsilon_0/\varepsilon_1$, ее вклад есть r_{01} ; б) волна, которая проходит через границу $\varepsilon_0/\varepsilon_1$, затем через слой ε_1 , отражается от границы $\varepsilon_1/\varepsilon_2$, снова проходит через слой ε_1 и выходит из него через границу $\varepsilon_1/\varepsilon_0$; ее вклад в суммарный коэффициент отражения есть $t_{01} \times \exp(ik_{1z}d_1)r_{12} \exp(ik_{1z}d_1)t_{10}$, а в коэффициент отражения в первом приближении $-r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1)$; в) волна, которая проходит через границу $\varepsilon_0/\varepsilon_1$, затем через слой ε_1 и через границу $\varepsilon_1/\varepsilon_2$, затем через слой ε_2 , отражается от границы $\varepsilon_2/\varepsilon_f$, снова проходит через слой ε_2 , границу $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, слой ε_1 и выходит через границу $\varepsilon_1/\varepsilon_0$; ее вклад в суммарный коэффициент отражения есть $t_{01} \exp(ik_{1z}d_1)t_{12} \exp(ik_{2z}d_2) \times r_{2f} \exp(ik_{2z}d_2)t_{21} \exp(ik_{1z}d_1)t_{10}$, а в коэффициент отражения в первом приближении $-r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2i \times k_{2z}d_2)$. В результате получим

$$R_2^{(1)} = r_{01} + r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2). \quad (24)$$

Подчеркнем, что волна б) дает также вклад $-r_{01}^2 r_{12} \times \exp(2ik_{1z}d_1)$ во второе приближение, а волна в) – вклады $-r_{01}^2 r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2) - r_{12}^2 r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2i \times k_{2z}d_2)$ и $r_{01}^2 r_{12}^2 r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2)$ во второе и третье приближения соответственно. Учитывая для второго приближения также вклад парциальных волн, испытавших три переотражения в системе двух слоев (всего таких волн пять), получаем

$$R_2^{(2)} = r_{01} + r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2) - r_{01}^2 r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) - r_{01}^2 r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2) - r_{12}^2 r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2) - [r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1) + r_{2f} \exp(2ik_{1z}d_1) \exp(2ik_{2z}d_2)]^2 r_{01} - [r_{2f} \exp(2ik_{2z}d_2)]^2 \times r_{12} \exp(2ik_{1z}d_1). \quad (25)$$

В случае нормального падения оптической волны на систему, состоящую из двух слоев, результаты расчета для коэффициента отражения в первом и втором приближениях сравниваются с точной формулой (19) (рис.5). В качестве показателей преломления мы снова использовали типичные для оптических материалов значения $n_0 \approx 1.0$ (воздух), $n_1 \approx 2.4$ (халькогенидное стекло), $n_2 \approx 1.5$ (окись кремния) и $n_f \approx 3.6$ (арсенид галлия). Выбор данных материалов снова выявляет неблагоприятную с точки зрения предлагаемого метода ситуацию, т. к. разница их показателей преломления достаточно высока. Однако, как можно видеть из рис.5, уже второе приближение находится в хорошем согласии с точными результатами (19).

В случае произвольного числа слоев m , просуммировав вклад всех соответствующих парциальных волн в предлагаемой теории многократных отражений, получаем в первом приближении

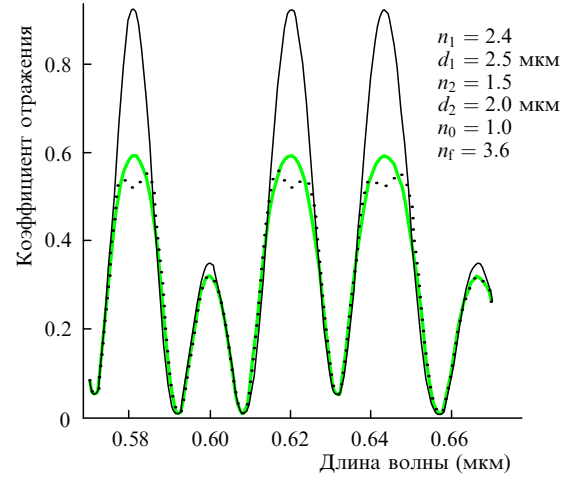


Рис.5. Зависимости коэффициента отражения от длины волны падающего света для слоистой системы, состоящей из двух слоев; сплошная линия – первое приближение, пунктирная линия – второе приближение, серая линия – точный результат.

$$R_m^{(1)} = \sum_{j=0}^m \left\{ r_{j,j+1} \prod_{t=0}^j \exp(2ik_{tz}d_t) \right\}, \quad (26)$$

и втором приближении

$$R_m^{(2)} = \sum_{j=0}^m \left\{ r_{j,j+1} \prod_{t=0}^j \exp(2ik_{tz}d_t) \right\} - \sum_{j=1}^m \left\{ \left(\sum_{p=0}^{j-1} r_{p,p+1}^2 \right) \times r_{j,j+1} \prod_{t=0}^j \exp(2ik_{tz}d_t) \right\} - \sum_{j=0}^{m-1} \left\{ \left[\sum_{p=j+1}^m r_{p,p+1} \times \prod_{t=1}^p \exp(2ik_{tz}d_t) \right]^2 r_{j,j+1} \prod_{t=0}^j \exp(2ik_{tz}d_t) \right\}. \quad (27)$$

Напомним, что в данных формулах $d_0 \equiv 0$. На рис.6 сравниваются точный коэффициент отражения, получаемый при численном использовании алгоритма (18), и приближенные коэффициенты, получаемые из аналити-

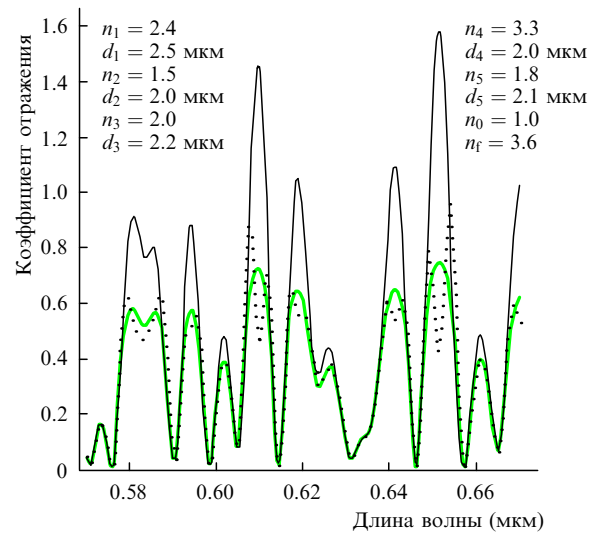


Рис.6. Зависимости коэффициента отражения от длины волны падающего света для слоистой системы, состоящей из пяти слоев; сплошная линия – первое приближение, пунктирная линия – второе приближение, серая линия – точный результат.

ческих расчетов по формулам (26), (27), в случае нормального падения электромагнитных волн из вакуума на систему, состоящую из $m = 5$ слоев с показателями преломления в диапазоне $1.5 < n_j < 3$. Толщины слоев при этом варьируются в пределах нескольких микрометров.

Приведенные примеры для случая нормального падения оптической волны на слоистую систему показывают хорошее совпадение точных результатов со вторым, а часто и с первым приближением теории многократных отражений. Исключения составляют системы с большой разницей в показателях преломления соседних слоев, причем в тех областях длин падающих волн, где коэффициент отражения достигает максимума. Определение же точного критерия необходимости применения более высоких порядков теории многократных отражений, включая и случай наклонного падения, требует отдельного исследования и будет проведено в нашей следующей публикации.

Отметим, что наличие в системе достаточно однородного вдоль всех слоев поглощения только улучшит совпадение приближенных аналитических результатов с точными численными, поскольку комплексные части

волновых векторов k_j обеспечивают дополнительное уменьшение членов более высоких порядков. Если же поглощение в системе резко меняется от слоя к слою, то теория многократных отражений в ее представленном виде требует определенной модификации, которая также будет проведена в следующей работе.

1. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах* (М., Наука, 1973).
2. Fink Y. et al. *Science*, **282**, 1679 (1998).
3. Левин М.Л. *ЖТФ*, **18**, 1399 (1948).
4. Морозов Г.В., Маев Р.Г., Дрэйк Г.В.Ф. *Квантовая электроника*, **28**, 977 (1998).
5. Morozov G.V., Maev R.G., Drake G.W.F. *Phys.Rev.E*, **60**, 4860 (1999).
6. Abeles F. *Ann.Phys. (Paris)*, **3**, 504 (1948).
7. Thomson W.T. *J.Appl.Phys.*, **21**, 89 (1950).
8. Haskell N. A. *Bull.Seism.Soc.Amer.*, **43**, 17 (1953).
9. Lowe M.J.S. *IEEE Trans.Ultrason.Ferr.Freq.Con.*, **42**, 526 (1995).
10. Столяров С.Н. *Квантовая электроника*, **15**, 1637 (1988).
11. Morales J.J, Nuevo M.J. *Amer.J. Phys.*, **59**, 1140 (1991).
12. Polak W.J. *Appl.Phys.*, **74**, 777 (1993).
13. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М., Наука, 1982, §83).
14. Morales J.J. *Europ.J.Phys.*, **13**, 222 (1992).
15. Parmigiani F. *Amer.J.Phys.*, **51**, 245 (1983).
16. Abdulhalim I. et al. *J.Non-Crystalline Solids*, **163**, 1251 (1993).