

# Исследование распространения излучения в среде с квадратичной неоднородностью

А.А.Пикулев

*Рассмотрено распространение эрмитовых пучков в среде с распределенной квадратичной неоднородностью и показано, что любое решение может быть представлено в виде функции от некоторого частного решения. Это осуществляется путем построения взаимно однозначного соответствия между оптическими полями в однородной среде и в среде с произвольной квадратичной неоднородностью. Исследована устойчивость оптических резонаторов и найдено условие устойчивости. С помощью разработанной методики построено несколько решений.*

**Ключевые слова:** семейство пучков, уравнение квазиоптики, характеристические плоскости, эрмитов пучок.

## 1. Введение

Исследование двумерного уравнения квазиоптики с помощью теории групп Ли показало, что для некоторых зависимостей показателя преломления от координат существуют частные решения, которые являются аналогами плоской волны, точечного источника или эрмитовых пучков в однородной среде [1]. Характерная особенность данных частных решений – неизменность радиуса кривизны волнового фронта при пропорциональном изменении возмущения показателя преломления. Исключение из этого правила имеет место в случае квадратичной неоднородности показателя преломления, для которой существует целый континуум решений, не обладающих вышеперечисленным свойством.

Для того чтобы результаты работы [1] можно было использовать «на полную мощность», необходимо уметь по известному частному решению уравнения квазиоптики строить его общее решение. Цель настоящей работы – решение этой задачи в случае квадратичной неоднородности, т.е. в случае линейной оптической системы. Метод матричной оптики [2–4] для этой цели неприменим, поскольку в нем общее решение строится без использования частного решения. В настоящей работе применен альтернативный подход, использующий тот факт, что общее решение любого линейного уравнения можно представить в виде ряда Фурье по полной системе функций, которые являются его частными решениями [5]. В случае квадратичной неоднородности ряд можно просуммировать и получить общее решение уравнения квазиоптики в удобном для расчетов виде.

Применение метода, предложенного в настоящей работе, позволяет найти в явном виде новые теоретические решения, построение которых при использовании интеграла Френеля и аппарата матричной оптики не представ-

ляется возможным. В отличие от матричного метода, который сразу дает общее решение уравнения квазиоптики, метод разложения в ряд Фурье основан на построении решения для конкретных граничных условий. Основу для такого построения составляет некоторое частное решение уравнения квазиоптики. В работе введены такие понятия как семейство пучков и его характеристические плоскости. Положение характеристических плоскостей определяет тип данной оптической системы, а также наглядно решает вопрос об устойчивости резонаторов.

## 2. Постановка задачи

Поскольку в случае квадратичной неоднородности решение для распределения электромагнитного поля можно искать методом разделения переменных [6], достаточно рассмотреть случай двух переменных. В параксиальном приближении распространение излучения описывается уравнением квазиоптики [7]

$$U''_{xx} + 2ikn_0 U'_z + 2k^2 n_0 \Delta n U = 0, \quad \mathbf{E} = \mathbf{e} U e^{-i(\omega t - kn_0 z)}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля;  $\mathbf{e}$  – единичный вектор поляризации;  $k$  – волновое число;  $\omega$  – круговая частота;  $n_0$  – невозмущенный показатель преломления;  $\Delta n = 0.5 n''_{xx}(z) x^2$  – возмущение показателя преломления,  $|\Delta n| \ll n_0$ ;  $n(x, z) = n_0 + \Delta n$ . Ось  $z$  совпадает с направлением распространения излучения.

Решениями уравнения (1) в этом случае являются эрмитовы пучки [6]

$$U^m = \left( \frac{w_0}{w} \right)^{1/2} H_m \left( \frac{x}{w} \right) \exp \left[ ikn_0 \frac{x^2}{2\tilde{\rho}} - \frac{i(m+1)}{2} \varphi \right], \quad (2)$$

где  $w$  – радиус пучка;  $w_0$  – радиус пучка в перетяжке;  $\varphi$  – набег фазы;  $\tilde{\rho}$  – комплексный радиус кривизны волнового фронта [6]:

$$\frac{1}{\tilde{\rho}} = \frac{1}{r} + \frac{i}{kn_0 w^2}; \quad (3)$$

$r$  – радиус кривизны волнового фронта;

Вероссийский федеральный ядерный центр – ВНИИЭФ, Россия, 607190 Саров Нижегородской обл., просп. Мира, 37; e-mail: pikulev@expd.vniief.ru

Поступила в редакцию 19 октября 2000 г., после доработки – 7 февраля 2001 г.

$$H_m(\tau) = (-1)^m e^{\tau^2} \frac{d^m e^{-\tau^2}}{d\tau^m}$$

– полиномы Эрмита. Подставив решение (2) в уравнение квазиоптики (1), получаем уравнения

$$\tilde{\rho}'_z + \frac{n''_{xx}}{n_0} \tilde{\rho}^2 - 1 = 0, \quad \varphi'_z = \frac{1}{kn_0 w^2}. \quad (4)$$

Отметим, что заменой переменной  $\tilde{\rho} = p'_z p^{-1}$  первое уравнение системы (4) сводится к линейному уравнению второго порядка  $n_0 p''_{zz} = n''_{xx} p$ , которое формально полностью совпадает с известными лучевыми уравнениями [8]. Формулы (4) являются дифференциальным аналогом алгебраических выражений матричной оптики.

Введем терминологию, которая будет использована в изложении. Частным решением уравнения (4) назовем решение, удовлетворяющее (4) при определенных граничных условиях. Общее решение удовлетворяет системе (4) при любых граничных условиях и содержит две постоянные интегрирования. Каждому частному решению (4) соответствует целый класс эрмитовых пучков (2), удовлетворяющих уравнению квазиоптики (1) при тех же граничных условиях, что и исходное частное решение. Этот класс эрмитовых пучков будем называть частным решением уравнения квазиоптики. Ниже будет показано, что знание частного решения уравнения (4) позволяет теоретически с помощью конечного числа операций найти его общее решение, что эквивалентно построению класса эрмитовых пучков (2), удовлетворяющего уравнению квазиоптики (1) при любых граничных условиях. Этот метод особенно удобен в том случае, если для данной зависимости  $n''_{xx}(z)$  существуют некоторые выделенные пучки, которые распространяются в неоднородной среде наиболее простым способом.

### 3. Разложение эрмитового пучка в ряд Фурье

Поскольку любому частному решению уравнений (4) соответствует полная ортогональная система (2) решений уравнения квазиоптики, общее решение уравнения (1) можно представить в виде ряда Фурье по этой системе функций [5]:

$$u^m = \sum_n a_n^m U^n, \quad (5)$$

где  $U^n$ ,  $u^m$  – распределение поля для частного и общего решений соответственно;  $a_n^m$  – коэффициенты Фурье. Далее будем использовать следующие обозначения:  $U^n$ ,  $\tilde{P}$ ,  $W$ ,  $W_0$ ,  $R$ ,  $\Phi$  – распределение поля, комплексный радиус кривизны волнового фронта, радиус пучка, радиус пучка в перетяжке, радиус кривизны волнового фронта и набег фазы для частного решения, которое предполагается известным;  $u^m$ ,  $\tilde{\rho}$ ,  $w$ ,  $w_0$ ,  $r$ ,  $\varphi$  – те же величины для общего решения.

В принципе ряд (5) дает формальное решение поставленной задачи для любых граничных условий, необходимо только найти коэффициенты Фурье. Однако решение задачи таким методом неудобно, поскольку требует вычисления многочисленных интегралов для определения коэффициентов Фурье и суммирования комплексных величин в формуле (5). Более того, если мы будем искать собственные функции оптического резонатора, то выражение (5) сведется к системе линейных уравнений с бес-

конечным числом неизвестных, собственные векторы которой будут являться модами резонатора. Оказывается, что теоретическое решение данной задачи можно получить и не прибегая к интегрированию и дальнейшему суммированию ряда Фурье.

Для этого рассмотрим трансформацию выражения (5) для однородной среды (эта операция физически эквивалентна переносу оптического поля из неоднородной среды в однородную):

$$u_h^m = \sum_n a_n^m U_h^n, \quad (6)$$

где индекс  $h$  соответствует однородной среде. Далее, как и выше, используем следующие обозначения:  $U_h^n$ ,  $\tilde{P}_h$ ,  $W_h$ ,  $W_{h0}$ ,  $R_h$ ,  $\Phi_h$  – распределение поля, комплексный радиус кривизны волнового фронта, радиус пучка, радиус пучка в перетяжке, радиус кривизны волнового фронта и набег фазы для вспомогательного пучка;  $u_h^m$ ,  $\tilde{\rho}_h$ ,  $w_h$ ,  $w_{h0}$ ,  $r_h$ ,  $\varphi_h$  – те же величины для опорного пучка. Таким образом, вспомогательный пучок является образом частного решения  $U^n$ , а опорный – общего решения уравнения квазиоптики  $u^m$ . Следовательно, для нахождения общего решения уравнения квазиоптики достаточно установить вид отображения, переводящего частное решение во вспомогательный пучок.

Распространение эрмитового пучка в однородной среде описывается формулами [9]

$$\tilde{\rho}_h = \tilde{\rho}_{h0} + z - z_0, \quad w_h^2 = w_{h0}^2 \left[ 1 + \frac{(z - z_0)^2}{(kn_0 w_{h0}^2)^2} \right], \quad (7)$$

$$r_h = \frac{(z - z_0)^2 + (kn_0 w_{h0}^2)^2}{z - z_0}, \quad \varphi_h = \arctan \frac{z - z_0}{kn_0 w_{h0}^2}.$$

В формулах (7) предполагается, что перетяжка опорного пучка расположена в плоскости  $z = z_0$ . Для вспомогательного пучка справедливы соотношения, совершенно аналогичные выражениям (7), причем параметры  $W_{h0}$  и  $z_{h0}$  произвольны. Для удобства примем, что  $z_{h0} = 0$  и  $W_{h0} = W_0$ . Представим ряды (5) и (6) в следующем виде:

$$u^m = \left( \frac{W_0}{W} \right)^{1/2} \exp \left( i kn_0 \frac{x^2}{2P} \right) f^m(x, z), \quad (8)$$

$$f^m(x, z) = \sum_n a_n^m H_n \left( \frac{x}{W} \right) \exp \left( -i \frac{2n+1}{2} \Phi \right),$$

$$u_h^m = \left( \frac{W_0}{W_h} \right)^{1/2} \exp \left( i kn_0 \frac{x^2}{2P_h} \right) f_h^m(x, z), \quad (9)$$

$$f_h^m(x, z) = \sum_n a_n^m H_n \left( \frac{x}{W_h} \right) \exp \left( -i \frac{2n+1}{2} \Phi_h \right).$$

Функция  $f_h^m(x, z)$  известна. Введем новые координаты  $\xi(x, z)$  и  $\zeta(z)$ , такие, что справедливо равенство  $f_h^m(\xi(x, z), \zeta(z)) = f^m(x, z)$ . Сравнение выражений (8) и (9) показывает, что должны выполняться соотношения

$$\frac{\xi}{W_h(\zeta)} = \frac{x}{W(z)}, \quad \Phi_h(\zeta) = \Phi(z),$$

$$\zeta(z) = kn_0 W_0^2 \tan \Phi(z).$$

Для общего решения системы (4) получаем выражения

$$\frac{1}{r(z)} = \frac{1}{R(z)} + \frac{W_h^2(\zeta)}{W^2(z)} \left[ \frac{1}{r_h(\zeta - \zeta_0)} - \frac{1}{R_h(\zeta)} \right], \tag{10}$$

$$w(z) = \frac{w_h(\zeta - \zeta_0)}{W_h(\zeta)} W(z), \quad \varphi(z) = \varphi_h(\zeta - \zeta_0).$$

где  $\zeta_0 = \zeta(z_0)$ . Распространение комплексного радиуса кривизны описывается уравнением, аналогичным первому уравнению системы (10), поэтому соответствующее выражение не приводим. Для замыкания решения (10) необходимо знать радиус опорного пучка  $w_{h0}$  и положение перетяжки  $z_0$ , которые играют роль постоянных интегрирования системы (4). Их можно найти из краевых условий для искомого пучка.

Выражение для радиуса пучка  $w$  в системе (10) можно представить в более наглядном виде. Для этого выберем фазу частного решения  $U^n$  таким образом, чтобы  $\zeta(0) = 0$ , чего легко добиться путем сдвига начала отсчета фазы частного решения. Тогда для вспомогательного пучка справедливо соотношение  $W_h^2(\zeta) = W_0^2 [1 + \tan^2 \Phi(z)]$ . После некоторых преобразований окончательное выражение для  $w$  принимает вид

$$w^2(z) = \frac{w_{h0}^2 W^2(z)}{W_0^2} \left\{ 1 + \frac{W_0^4}{w_{h0}^4} [\tan \Phi(z) - \tan \Phi(z_0)]^2 \right\} \cos^2 \Phi(z). \tag{11}$$

Формула (11) показывает, что радиус общего решения осциллирует около радиуса частного решения. Осцилляции в общем случае не являются периодическими, а зависят от фазы частного решения  $\Phi(z)$ .

#### 4. Определение параметров опорного пучка

Граничные условия на параметры пучков можно наложить двумя способами: задать распределение поля на некоторой поверхности либо наложить два граничных условия на радиус кривизны волнового фронта. Граничные условия первого типа характерны для распространения излучения в пространстве, а второго – для формирования излучения в оптических резонаторах. Рассмотрим способы удовлетворения граничным условиям этих двух типов по очереди.

1. Предположим, что на некоторой плоскости  $z = z^*$  заданы характерный радиус распределения амплитуды (радиус пучка)  $w^* = w(z^*)$  и радиус кривизны волнового фронта  $r^* = r(z^*)$ . Тогда из формул (10) находим радиус кривизны волнового фронта и радиус опорного пучка в точке  $\zeta = \zeta^* - \zeta_0$ , где  $\zeta^* = \zeta(z^*)$ :

$$\frac{1}{r_h^*} = \frac{1}{r_h(\zeta^* - \zeta_0)} = \frac{1}{R_h(\zeta^*)} + \frac{W^2(z^*)}{W_h^2(\zeta^*)} \left[ \frac{1}{r^*} - \frac{1}{R(z^*)} \right], \tag{12}$$

$$w_h^* = w_h(\zeta^* - \zeta_0) = \frac{w^*}{W(z^*)} W_h(\zeta^*).$$

Поскольку правые части выражений (12) известны, по формулам (7) можно найти параметры опорного пучка

$$w_{h0} = \left[ \frac{(r_h^* w_h^*)^2}{r_h^{*2} + (kn_0 w_h^{*2})^2} \right]^{1/2}, \tag{13}$$

$$\zeta_0 = \zeta^* - \frac{r_h^* (kn_0 w_h^{*2})^2}{r_h^{*2} + (kn_0 w_h^{*2})^2}.$$

Из (13) видно, что для любых граничных условий первого типа можно найти опорный пучок с действительными параметрами.

2. Рассмотрим граничные условия второго типа. Предположим, что в точках  $z_1 < z_2$  расположены сферические зеркала с радиусами кривизны  $r_1$  и  $r_2$  соответственно. Радиусы фокусирующих зеркал считаем положительными, рассеивающих – отрицательными. Тогда на радиус кривизны волнового фронта искомого пучка накладываются два условия:  $r(z_1) = -r_1$ ,  $r(z_2) = r_2$ . Из первого уравнения системы (10) находим два радиуса кривизны опорного пучка  $r_{h1} = r_h(\zeta_1 - \zeta_0)$ ,  $r_{h2} = r_h(\zeta_2 - \zeta_0)$ , определяемые выражениями

$$\frac{1}{r_{h1,2}} = \frac{1}{R_h(\zeta_{1,2})} + \frac{W^2(z_{1,2})}{W_h^2(\zeta_{1,2})} \left[ \frac{1}{r_{1,2}} - \frac{1}{R(z_{1,2})} \right]. \tag{14}$$

Решение уравнений (7) в этом случае имеет вид

$$\zeta_0 = \frac{\zeta_1(\zeta_1 - r_{h1}) - \zeta_2(\zeta_2 - r_{h2})}{2\zeta_1 - 2\zeta_2 + r_{h2} - r_{h1}}, \tag{15}$$

$$w_{h0}^2 = \frac{[r_{h1}(\zeta_1 - \zeta_0) - (\zeta_1 - \zeta_0)^2]^{1/2}}{kn_0}.$$

Очевидно, что второе уравнение системы (15) не всегда имеет действительные корни, т. е. не для всяких граничных условий существует опорный эрмитов пучок с действительным радиусом распределения амплитуды. Следовательно, не всякий оптический резонатор является устойчивым, причем условие устойчивости имеет следующий вид:

$$r_{h1}(\zeta_1 - \zeta_0) \geq (\zeta_1 - \zeta_0)^2. \tag{16}$$

Совершенно аналогичное неравенство можно записать для  $r_{h2}$  и  $\zeta_2$ . Условие (16) означает, что в некоторой точке радиус кривизны волнового фронта опорного пучка по модулю не меньше расстояния от перетяжки опорного пучка до этой точки (равенство достигается для точечного источника). Это условие всегда выполняется для эрмитовых пучков в однородной среде, распространение которых описывается формулами (7). Таким образом, выражение (16) в параметрическом виде полностью решает задачу устойчивости резонатора с произвольной квадратичной неоднородностью.

#### 5. Семейства пучков и характеристические плоскости

Семейством пучков будем называть множество эрмитовых пучков, не обязательно принадлежащих одному классу, но имеющих одинаковый радиус кривизны волнового фронта на некоторой плоскости. Такие плоскости будем называть характеристическими. Предположим, что на плоскости  $z = 0$  (положение несущественно) частное решение  $U^n$  и искомый пучок  $u^m$  имеют одинаковый радиус кривизны волнового фронта  $R_0 = r_0$ . Примем, что радиус распределения амплитуды искомого пучка в точ-

ке  $z = 0$  равен  $w_0$ . Как и выше, считаем, что  $\zeta(0) = 0$ . Тогда, как легко видеть из (13), перетяжка опорного пучка будет расположена в точке  $z_0 = 0$  и  $w_0 = w_{h0}$ , а закон распространения семейства пучков имеет вид

$$w^2 = \frac{w_0^2 W^2(z)}{W_0^2} \left[ \cos^2 \Phi(z) + \frac{W_0^4}{w_0^4} \sin^2 \Phi(z) \right], \tag{17}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{\tan \Phi(z)}{kn_0 W^2(z)} \frac{W_0^4 - w_0^4}{W_0^4 \tan^2 \Phi(z) + w_0^4}.$$

Из (17) видно, что кроме плоскости  $z_0 = 0$  могут существовать и другие характеристические плоскости. Пользуясь вторым уравнением системы (17), получаем, что  $r(z_j) = R(z_j) = r_j$  в точках  $\Phi(z_j) = \pi j/2$ , где  $j$  – целое число. Положение характеристических плоскостей совпадает с экстремумами радиуса распределения амплитуды искомого пучка  $w$  относительно радиуса пучка для частного решения  $W: dw/dW = 0$  в точках  $z = z_j$ . Дополнительные характеристические плоскости могут возникнуть только в том случае, если радиус искомого пучка совершает осцилляции относительно частного решения. Если осцилляций нет, то существует только одна характеристическая плоскость  $z_0 = 0$ . Рис.1 иллюстрирует понятие характеристических плоскостей семейства пучков.

Проведем качественное исследование устойчивости резонаторов. Пусть левое зеркало с радиусом  $r_0$  расположено в точке  $z_0 = 0$ , а правое зеркало с радиусом  $r_L$  – в точке  $z = L$ . Очевидно, что модой такого резонатора может быть только пучок, принадлежащий двум семействам пучков, первое из которых определяется левым зеркалом резонатора, а второе – правым. В некоторых областях изменения  $r_0, r_L$  такой пучок может не существовать и резонатор является неустойчивым.

Для каждого радиуса  $r_0$  по формуле (17) можно найти положения характеристических плоскостей  $z_j$ . Из формулы для набега фазы пучка (4) следует, что фаза является монотонной функцией координаты  $z$ , причем, поскольку  $\Phi(0) = 0$ , справедливо соотношение  $\text{sign } \Phi(z) = \text{sign } z$ . Отсюда следует, что множество характеристических плоскостей  $\{z_j\}$  упорядочено следующим образом:  $z_j < z_{j+1}$ . Следовательно, радиус правого зеркала устойчивого резонатора удовлетворяет неравенствам  $(R_L = R(L), W_L = W(L))$

$$-\tan \Phi(z) \Big\} < kn_0 W_L^2 \left( \frac{1}{r_L} - \frac{1}{R_L} \right) < \left\{ \begin{array}{l} \cot \Phi(z), z \in (z_{2j}, z_{2j+1}), \\ -\tan \Phi(z), z \in (z_{2j-1}, z_{2j}). \end{array} \right. \tag{18}$$

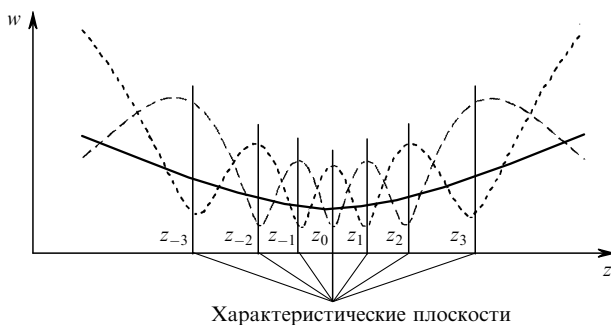


Рис.1. Характеристические плоскости оптической системы ( $z_j$ ) и зависимости  $w(z)$  для трех пучков, принадлежащих одному семейству.

Из (18) видно, что области неустойчивости резонатора группируются около характеристических плоскостей. Например, для случая однородной среды существует единственная характеристическая плоскость  $z_0 = 0$  и есть только две области неустойчивости.

Обратимся к вопросу об изменении устойчивости резонатора при плавном (квазистационарном) изменении показателя преломления, которое может происходить из-за нагрева среды. Сначала, пока не появились дополнительные характеристические плоскости, диаграмма устойчивости напоминает диаграмму устойчивости резонатора для однородной среды. Далее, при увеличении степени неоднородности, могут появиться несколько новых характеристических плоскостей, которые с ростом  $|n''_{xx}|$  приближаются к точке  $z_0$ . Резонатор теряет устойчивость, когда очередная характеристическая плоскость  $z_j$  оказывается в окрестности плоскости  $z = L$ . На рис.2 представлена диаграмма устойчивости резонатора в зависимости от фазы  $\Phi(L)$ . Слева от нуля в сторону отрицательных величин отложена фаза  $\Phi(L)$ , если она является чисто мнимой. Области, являющиеся неустойчивыми, заштрихованы. По рис.2, зная как изменяется  $\Phi(L)$  при изменении показателя преломления, можно предсказать, является ли резонатор устойчивым или нет.

### 6. Примеры построения решений

1. Наиболее простое частное решение можно построить для однородной распределенной линзы с  $n''_{xx} = \text{const}$ . Поскольку в этом случае переменная  $z$  не входит в уравнение квазиоптики явным образом, уравнение (1) инвариантно относительно сдвигов вдоль оси  $z$  ( $z \rightarrow z + \epsilon$ ). Следовательно, существует решение уравнения (1), инвариантное относительно этого однопараметрического преобразования [10]. Таким решением для показателя преломления  $n''_{xx} = -\alpha < 0$  является плоский пучок с параметрами

$$W_\infty^2 = \frac{1}{k(xn_0)^{1/2}}, \quad R_\infty = \infty, \quad \Phi_\infty = z \left( \frac{\alpha}{n_0} \right)^{1/2}. \tag{19}$$

Эту неоднородность показателя преломления будем называть  $\alpha$ -линзой. Рассмотрим распространение пучка, удовлетворяющего граничным условиям  $r(0) = \infty, w(0) = w_0$ . Для радиуса распределения амплитуды из (11) получаем известное соотношение [6, 8, 11]

$$w^2 = w_0^2 \left\{ \cos^2 \left[ z \left( \frac{\alpha}{n_0} \right)^{1/2} \right] + \frac{W_\infty^4}{w_0^4} \sin^2 \left[ z \left( \frac{\alpha}{n_0} \right)^{1/2} \right] \right\}. \tag{20}$$

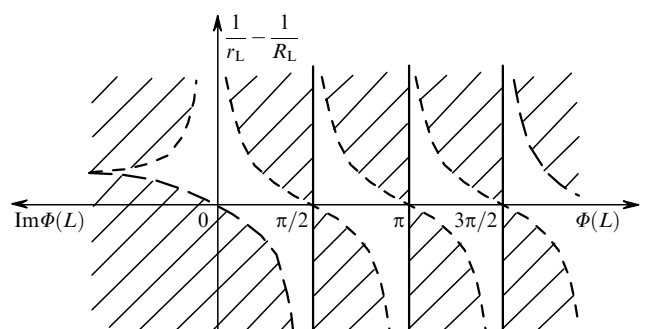


Рис.2. Диаграмма устойчивости оптического резонатора (неустойчивые области заштрихованы).

Для распределенной  $\alpha$ -линзы радиус  $w$  любого пучка осциллирует около  $W_\infty$ .

Решение (19) формальным образом можно распространить и на область положительных  $n''_{xx} = \beta > 0$ , т. е. для  $\beta$ -линзы. Подставим в систему (4) показатель преломления  $n''_{xx} = \beta > 0$ , тогда

$$W_\infty^2 = \mp \frac{i}{k(\beta n_0)^{1/2}}, \quad R_\infty = \infty, \quad \Phi_\infty = \pm iz \left( \frac{\beta}{n_0} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

Несмотря на то что решение (21) не удовлетворяет условиям ограниченности на бесконечности, его можно использовать для построения общего решения для  $\beta$ -линзы. Как и выше, рассмотрим распространение пучка с граничными условиями  $r(0) = \infty$ ,  $w(0) = w_0$ . Подставим (21) в (11) и воспользуемся соотношением  $\tan(iq) = i \tanh q$ , где  $q$  – действительное число. В результате получим

$$w^2 = w_0^2 \left\{ \cosh^2 \left[ z \left( \frac{\beta}{n_0} \right)^{1/2} \right] + \frac{|W_\infty^4|}{w_0^4} \sinh^2 \left[ z \left( \frac{\beta}{n_0} \right)^{1/2} \right] \right\}. \quad (22)$$

Следовательно, для  $\beta$ -линзы любой пучок расходится экспоненциально [6, 8, 11].

2. Как показано в работе [1], для квадратичной неоднородности вида

$$\Delta n = \frac{l^4}{(z^2 + l^2)^2} \frac{n''_{xx}(0, 0)}{2} x^2 \quad (23)$$

существует следующее частное решение:

$$W_l^2 = W_0^2 \left( 1 + \frac{z^2}{l^2} \right), \quad R_l = \frac{z^2 + l^2}{z}, \quad \Phi_l = (1 - \delta)^{1/2} \arctan \frac{z}{l}, \quad (24)$$

$$W_0^2 = \frac{l}{kn_0(1 - \delta)^{1/2}}, \quad \delta = \frac{l^2 n''_{xx}(0, 0)}{n_0} < 1.$$

Неоднородную распределенную линзу (23) будем называть  $l$ -линзой. Оптическая сила  $l$ -линзы достигает максимума в точке  $z = 0$  и уменьшается при увеличении  $z$ . Параметр  $l$  определяет ширину распределения неоднородности по координате  $z$ . На расстоянии  $z = l$  сила  $l$ -линзы уменьшается в четыре раза.

Для того чтобы распространить решение (24) на область  $\delta > 1$ , воспользуемся приемом из п. 1. Определим радиус пучка в перетяжке и фазу следующим образом:

$$W_0^2 = \frac{l}{kn_0|1 - \delta|^{1/2}}, \quad \Phi_l = |1 - \delta|^{1/2} \arctan \frac{z}{l}. \quad (25)$$

Приведем окончательный результат вычислений:

$$w^2 = w_{h0}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{l^2} \right) \left( 1 + \frac{W_0^4}{w_{h0}^4} \times \begin{cases} [\tan \Phi_l(z) - \tan \Phi_l(z_0)]^2 \cos^2 \Phi_l(z), & \delta < 1, \\ [\tanh \Phi_l(z_0) - \tanh \Phi_l(z_0)]^2 \cosh^2 \Phi_l(z), & \delta > 1. \end{cases} \right) \quad (26)$$

Положение перетяжки  $z_0$  и радиус распределения интенсивности опорного пучка в перетяжке  $w_{h0}$  вычисляются

по формулам (13) или (15) в зависимости от типа граничных условий. Очевидно, что на бесконечности любой пучок для  $l$ -линзы расходится линейно, как и эрмитов пучок в однородной среде. Исключением из этого правила является случай  $l \rightarrow \infty$ , когда для  $\alpha$ -линзы происходит периодическое колебание радиуса пучка относительно радиуса плоскопараллельного пучка  $W_\infty$ , а для  $\beta$ -линзы любой пучок расходится экспоненциально. Причиной такого поведения является тот факт, что для  $l < \infty$  сила  $l$ -линзы при удалении от точки  $z = 0$  падает до нуля. В связи с этим на больших расстояниях от точки  $z = 0$  пучки практически не испытывают влияния неоднородности показателя преломления и становятся подобными эрмитовым пучкам в однородной среде. Для  $l \rightarrow \infty$  сила  $l$ -линзы постоянна, поэтому пучки испытывают влияние неоднородности на любых расстояниях от начала координат. В случае  $l \rightarrow 0$   $l$ -линза эквивалентна сосредоточенной тонкой линзе. Следовательно,  $l$ -линза является обобщением распределенной однородной линзы и тонкой линзы. Рис.3 иллюстрирует поведение гауссова пучка ( $m = 0$ ) в случае  $l$ -линзы при  $r(0) = \infty$  в фокусирующей ( $\delta < 0$ ) и рассеивающей ( $\delta > 1$ ) средах.

Рассмотрим случай  $\delta = 1$  ( $\Phi_l = 0$ ). Совершая в (26) предельный переход  $\delta \rightarrow 1$ , получаем

$$w^2 = w_{h0}^2 \left( 1 + \frac{z^2}{l^2} \right) \times \left[ 1 + \frac{l^2}{(kn_0 w_{h0}^2)^2} \left( \arctan \frac{z}{l} - \arctan \frac{z_0}{l} \right)^2 \right]. \quad (27)$$

Из (27) видно, что в этом случае не происходит ни периодических колебаний радиуса пучка около частного решения для  $l$ -линзы, ни экспоненциального приближения радиуса к этому решению. При  $l \rightarrow \infty$  из (27) следует закон распространения опорного пучка. Тот же результат получаем, если в уравнение (26) подставить  $\delta = 0$ . Таким образом, опорный пучок действительно можно считать образом искомого пучка в однородной среде, а искомый пучок – результатом деформации опорного пучка при его помещении в неоднородную среду. Положение перетяжки опорного пучка  $z = z_0$  является некоторым математическим центром искомого пучка, поскольку при плавном уменьшении неоднородности среды до нуля перетяжка оказывается в этой точке.

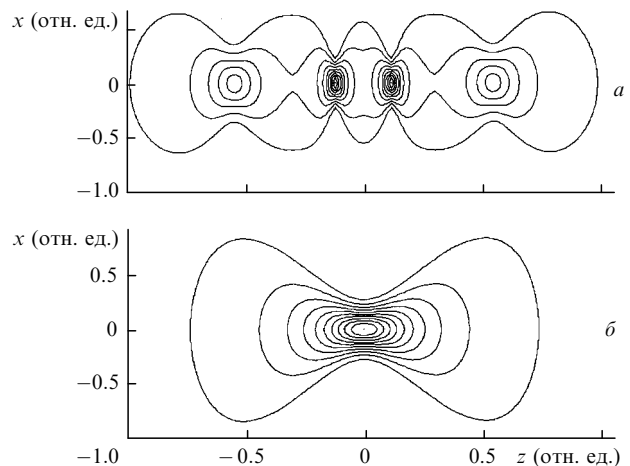


Рис.3. Линии равной интенсивности гауссова пучка ( $m = 0$ ) для  $l$ -линзы при  $\delta < 0$  (а) и  $\delta > 1$  (б).

## 7. Заключение

Итак, любое решение уравнения квазиоптики может быть представлено в виде функции от некоторого частного решения. Процедура поиска решения для данных граничных условий сводится к построению в однородной среде опорного пучка, который является образом искомого пучка. Поскольку параметры опорного пучка выражаются через граничные условия в виде дробно-иррациональных выражений, можно заключить, что если некоторое частное решение уравнения квазиоптики выражается через элементарные функции, то это справедливо и для общего решения.

Представление решения в виде функции от некоторого частного решения логически приводит к понятию семейства пучков и его характеристических плоскостей. Характеристические плоскости соответствуют экстремумам радиусов распределения амплитуды пучков данного семейства. Положение и число характеристических плоскостей качественно описывает поведение эрмитовых пучков в линейной оптической системе. Процедура построения мод резонатора сводится к поиску некоторого пучка, принадлежащего двум семействам, первое из которых определяется левым, а второе – правым зеркалом оптического резонатора. Если такого пучка не существует, резонатор является неустойчивым. Условие устойчивости также эквивалентно условию существования для данной моды резонатора опорного пучка. Области неустойчивости оптического резонатора группируются около характеристических плоскостей, положение которых определяется одним из зеркал резонатора.

В качестве приложения построены решения для однородной распределенной линзы и для  $l$ -линзы, которая является обобщением распределенной однородной линзы и сосредоточенной тонкой линзы. Исследование решения для  $l$ -линзы показывает, что в зависимости от параметра  $\delta$  возможно поведение пучков трех типов: при  $\delta < 0$  наблюдаются осцилляции радиуса пучка относительно частного решения (24), при  $0 < \delta < 1$  поведение пучка близко к поведению эрмитовых пучков в однородной среде, а при  $\delta > 1$  имеет место экспоненциальное расширение пучка относительно частного решения (24). В двух последних случаях существует только одна характеристическая плоскость, а при  $\delta < 0$  число характеристических плоскостей равно целой части выражения  $2(1 - \delta)^{1/2}$ .

1. Пикулев А.А. *Квантовая электроника*, **28**, 267 (1999).
2. Kogelnik H. *Bell Syst. Techn. J.*, **44**, 455 (1965).
3. Kogelnik H., Li T. *Proc. IEEE*, **54**, 1312 (1966).
4. Kogelnik H., Li T. *Appl. Optics*, **5**, 1550 (1966).
5. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* (М., Наука, 1989).
6. Ананьев Ю.А. *Оптические резонаторы и лазерные пучки* (М., Наука, 1990).
7. Глоге Д. *Квазиоптика* (М., Мир, 1966).
8. Джерард А., Берч Дж.М. *Введение в матричную оптику* (М., Мир, 1978).
9. Гончаренко А.М. *Гауссовы пучки света* (Минск, Наука и техника, 1977).
10. Арнольд В.И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений* (М., Наука, 1978).
11. Neal D.R., Torczynski J.R., Sweatt W.C. *Proc. Intern. Conf. Lasers '88* (STS Press, McLean, USA, 1989, p.245).