

Использование кристаллического кварца для компенсации термонаведенной деполяризации в изоляторах Фарадея

Н.Ф.Андреев*, Е.В.Катин*, О.В.Палашов*, А.К.Потемкин*, Д.Х.Райтци**, А.М.Сергеев*, Е.А.Хазанов*

Показано, что расположенный внутри телескопа кристалл кварца, оптическая ось которого параллельна оси пучка, может уменьшить деполяризацию излучения, вызванную термонаведенным двулучепреломлением в изоляторе Фарадея. Экспериментально реализовано увеличение степени изоляции в 8 раз. Важным преимуществом предлагаемого метода по сравнению с предложенными ранее является возможность использования стандартных коммерческих фарадеевских вращателей.

Ключевые слова: изолятор Фарадея, лазеры с большой средней мощностью, термонаведенное двулучепреломление, деполяризация.

1. Введение

Одним из факторов, сдерживающих разработку и использование мощных одномодовых твердотельных лазеров, являются тепловые эффекты, вызываемые поглощением лазерного излучения в изоляторах Фарадея (ИФ) [1–6]. Во многих приложениях (см., напр., [7, 8]) требуется сочетание высокой средней мощности излучения с малой неразвязкой ИФ, т. е. с большой степенью изоляции. В [9–12] впервые были исследованы тепловые эффекты, приводящие к деполяризации лазерного излучения и, следовательно, к ухудшению развязки: температурная зависимость постоянной Верде и фотоупругий эффект. В [10] было теоретически предсказано, что именно фотоупругий эффект ограничивает степень изоляции при больших средних мощностях, а влиянием температурной зависимости постоянной Верде можно пренебречь. В работах [11, 13, 14] этот вывод был подтвержден экспериментально.

В [10] был определен параметр качества, характеризующий магнитоактивную среду с точки зрения минимизации неразвязки при большой средней мощности излучения. Этот параметр в кристалле тербий-галлиевого граната (TGG) и ряде магнитоактивных стекол был измерен в [15, 16]. Зависимость неразвязки ИФ от ориентации магнитоактивного кристалла подробно исследована в [15].

В [12] были предложены и теоретически исследованы две новые схемы ИФ, позволяющие частично компенсировать самонаведенную в магнитоактивной среде деполяризацию. Они состоят из трех оптических элементов: двух фарадеевских вращателей, каждый из которых поворачивает плоскость поляризации на 22.5° , и взаимного оптического элемента между ними. Последующие эксперименты [13, 14] подтвердили высокую эффективность этих схем.

Однако наличие двух вращателей Фарадея не всегда удобно и ведет к увеличению габаритов ИФ. Кроме того, использование стандартных промышленных ИФ в этом случае практически невозможно, т. к. требует существенной перекомпоновки магнитной системы и оптических элементов. В настоящей работе предложен и экспериментально реализован новый способ компенсации деполяризации в ИФ, позволяющий использовать в мощных лазерных системах стандартные 45° -ные фарадеевские вращатели.

2. Увеличение степени изоляции при помощи кварцевого вращателя

Идея предлагаемого метода компенсации деполяризации в ИФ заключается в создании фазовой пластинки, в которой вычитались бы все фазовые набегии, приобретенные пучком в фарадеевском элементе. Для этого фазовая пластинка должна иметь такое же поперечное распределение собственных поляризаций, как и фарадеевский вращатель, и с таким же, но противоположным по знаку, поперечным распределением разности фаз. В этом случае после последовательного прохождения через два таких элемента излучение сохранит исходную поляризацию неискаженной. Невзаимные свойства ИФ (поворот поляризации на 90° за два прохода) также сохраняются.

При наличии градиента температуры в фарадеевском элементе имеет место суперпозиция двух видов двулучепреломления: циркулярного (эффект Фарадея) и линейного (фотоупругий эффект). Циркулярное двулучепреломление характеризуется фазовым набегом δ_c , не зависящим от полярных координат r и φ , т. к. мы пренебрегаем температурной зависимостью постоянной Верде. Линейное двулучепреломление характеризуется фазовым набегом δ_{lin} и углом наклона собственных поляризаций. В цилиндрическом элементе из стекла или кубического кристалла с ориентацией [111] δ_{lin} не зависит от φ и вблизи оси пучка пропорционально r^2 , а собственные поляризации направлены в радиальном и тангенциальном направлениях, т. е. угол их наклона равен φ . (При использовании кристаллов других ориентаций это не так [15, 17],

*Институт прикладной физики РАН, Россия, 603600 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; www.sci-nnov.ru/science/science/appl.new/

**D.H.Reitze. NFB, University of Florida, Physical Department, Gainesville, FL 32611, USA; www.ufl.edu

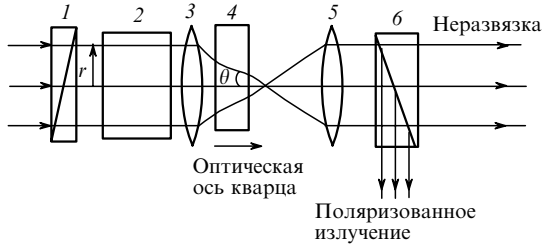


Рис.1. Схема компенсации деполаризации в ИФ:
 1, 6 – скрещенные поляризаторы; 2 – 45°-ный фарадеевский вращатель; 3, 5 – линзы телескопа; 4 – 45°-ный кварцевый вращатель; θ – угол между волновым вектором и оптической осью кварца; r – полярный радиус.

однако эти случаи мы рассматривать не будем.) В результате суперпозиции двух двулучепреломлений собственные поляризации фарадеевского элемента становятся эллиптическими, причем угол наклона оси эллипса равен φ , а эллиптичность и разность фаз зависят только от r .

Известно, что при распространении плоской волны в кристаллическом кварце под углом θ к оптической оси также имеет место суперпозиция линейного и циркулярного двулучепреломлений. Набег фаз линейного двулучепреломления $\delta_{q\text{lin}}$ зависит от θ ; причем при $\theta \ll 1$ – квадратично. В то же время разность фаз циркулярного двулучепреломления δ_{qc} при $\theta \ll 1$ слабо зависит от θ .

При распространении сходящегося или расходящегося пучка (рис.1) угол наклона собственной поляризации линейного двулучепреломления равен φ , а угол θ пропорционален r , т.е. $\delta_{q\text{lin}} \sim r^2$. Таким образом, распределения эллиптичности собственных поляризаций и фазового набег между ними в фарадеевском элементе и кристалле кварца близки друг к другу, а углы наклона эллипса совпадают точно. Если направления вращения поляризации в фарадеевском элементе и кварце противоположны (т.е. δ_c и δ_{qc} имеют разные знаки), то возможна компенсация деполаризации после последовательного прохождения фарадеевского элемента и кристалла кварца.

Найдем условия наиболее эффективной компенсации. Поскольку лазерный пучок одновременно и записывает искажения (являясь источником тепла) и считывает их, то самовоздействие зависит от поперечного распределения интенсивности, в частности от скорости ее спадания от центра к периферии [18]. Эффективность компенсации также может существенно зависеть от формы пучка, т.к. форма зависимости $\delta_{\text{lin}}(r)$ полностью определяется распределением интенсивности.

Рассмотрим супергауссов пучок с радиусом r_0 :

$$E_{\text{in}} = E_0 x_0 \exp\left(-\frac{r^{2m}}{2r_0^{2m}}\right), \quad (1)$$

где x_0 – единичный вектор вдоль оси x ; параметр m характеризует скорость спадания интенсивности. При $m = 1$ интенсивность спадает довольно медленно (гауссов пучок). По мере возрастания m скорость спадания интенсивности увеличивается, и при $m \rightarrow \infty$ пучок превращается в П-образный.

Матрицы Джонса фарадеевского вращателя F и кварца R_q имеют следующий вид [10, 19, 20]:

$$F = \sin \frac{\delta}{2} \begin{pmatrix} \cot \frac{\delta}{2} - i \frac{\delta_{\text{lin}}}{\delta} \cos 2\varphi & -\frac{\delta_c}{\delta} - i \frac{\delta_{\text{lin}}}{\delta} \sin 2\varphi \\ \frac{\delta_c}{\delta} - i \frac{\delta_{\text{lin}}}{\delta} \sin 2\varphi & \cot \frac{\delta}{2} + i \frac{\delta_{\text{lin}}}{\delta} \cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$R_q = \sin \frac{\delta_q}{2} \begin{pmatrix} \cot \frac{\delta_q}{2} - i \frac{\delta_{q\text{lin}}}{\delta_q} \cos 2\varphi & -\frac{\delta_{qc}}{\delta_q} - i \frac{\delta_{q\text{lin}}}{\delta_q} \sin 2\varphi \\ \frac{\delta_{qc}}{\delta_q} - i \frac{\delta_{q\text{lin}}}{\delta_q} \sin 2\varphi & \cot \frac{\delta_q}{2} + i \frac{\delta_{q\text{lin}}}{\delta_q} \cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\delta^2 = \delta_{\text{lin}}^2 + \delta_c^2; \delta_q^2 = \delta_{q\text{lin}}^2 + \delta_{qc}^2; \delta_c = \frac{\pi}{2}; \delta_{qc} = -\frac{\pi}{2};$$

$$\delta_{\text{lin}} = \frac{1 + 2\xi}{3} \frac{p}{\sigma_0} \frac{f(y)}{y}; \delta_{q\text{lin}} = p_q y;$$

$$f(y) = \int_0^y \left(\int_0^z \exp(-x^m) dx \right) dz; \sigma_0 = \int_0^\infty \exp(-y^m) dy;$$

$$y = \frac{r^2}{r_0^2}; p = \frac{\alpha Q}{\kappa} \frac{LP_0}{\lambda}; p_q = \frac{\pi n_o - n_e}{2 |\Delta n_c|} \frac{r_0^2}{n^2 f^2};$$

$$\xi = \frac{2p_{44}}{p_{11} - p_{12}}; Q = \left(\frac{1}{L} \frac{dL}{dT} \right) \frac{n^3}{4} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} (p_{11} - p_{12}).$$

Здесь L , $(1/L)dL/dT$, ν , κ , n , p_{ij} – соответственно длина, коэффициент теплового расширения, коэффициент Пуассона, теплопроводность, показатель преломления и коэффициенты фотоупругости магнитоактивной среды в дефиндексном обозначении Ная [21]; T – температура; λ – длина волны в вакууме; P_0 – мощность излучения; n_o , n_e – показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн кварца; $n = (n_o + n_e)/2$; Δn_c – разность показателей преломления правой и левой циркулярнополяризованных волн в кварце при $\theta = 0$; f – фокусное расстояние линзы 3. В выражении для δ_c мы пренебрегли температурной зависимостью постоянной Верде и учли, что δ_c и δ_{qc} имеют разные знаки (см. выше). Кроме того, мы учли, что в парааксиальном приближении $\theta = r/(nf)$.

Если поле, прошедшее через поляризатор 1 (см.рис.1), имеет вид (1), то поле, падающее на поляризатор 6, определяется выражением

$$E_{\text{out}} = FR_q E_{\text{in}}. \quad (4)$$

Здесь и далее мы полагаем, что проход от поляризатора 1 до поляризатора 6 – это обратный проход излучения через ИФ, например от усилителей к задающему генератору. Таким образом, при идеальной развязке все излучение должно отражаться поляризатором 6, а излучения, прошедшего через поляризатор 6 в сторону задающего генератора, быть не должно.

Неразвязка γ (отношение мощности излучения, прошедшего через поляризатор 6, к мощности выходного излучения) определяется выражением

$$\gamma = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |E_{\text{out}} y_0|^2 r dr d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty |E_{\text{out}}|^2 r dr d\varphi}. \quad (5)$$

Здесь и далее мы пренебрегаем апертурными потерями и интегрируем в (5) по r до бесконечности.

Рассмотрим сначала случай слабого линейного двулучепреломления в фарадеевском элементе

$$\delta_{\text{lin}} \ll 1. \quad (6)$$

Поскольку для эффективной компенсации необходимо, чтобы $\delta_{q\text{lin}}$ было близко к δ_{lin} , то будем считать, что

$\delta_{q\text{lin}} \ll 1$. В этом случае, подставляя (1)–(4) в (5) и интегрируя с учетом (6), получаем

$$\gamma = \frac{1}{\pi^2} \left\{ \frac{\sigma_2}{\sigma_0} p_q^2 + 2 \frac{1+2\xi}{3} p_q p \left[\frac{\sigma_2}{\sigma_0} A_0(m) \right]^{1/2} + \left(\frac{1+2\xi}{3} \right)^2 p^2 A_1(m) \right\}, \quad (7)$$

где

$$A_0(m) = \frac{1}{\sigma_2 \sigma_0^3} \left[\int_0^\infty f(y) \exp(-y^m) dy \right]^2;$$

$$A_1(m) = \frac{1}{\sigma_0^3} \int_0^\infty \frac{f^2(y)}{y^2 \exp(y^m)} dy; \quad \sigma_2 = \int_0^\infty y^2 \exp(-y^m) dy.$$

При $p_q = 0$ из (7) получаем известное [12, 18] выражение для неразвязки γ_{old} традиционной схемы ИФ:

$$\gamma_{\text{old}} = \left(\frac{1+2\xi}{3} \right)^2 \frac{p^2}{\pi^2} A_1(m). \quad (8)$$

Из (7) видно, что γ зависит от двух безразмерных параметров: нормированной мощности излучения p и нормированного двулучепреломления в кварце p_q . Заметим, что p_q квадратично зависит от угла схождения пучка r_0/f .

Как видно из (7), (8), компенсация деполяризации возможна, только если p_q и p имеют разные знаки, т. к. в противном случае $\gamma > \gamma_{\text{old}}$ при любом p_q . Физически это является следствием того, что фазовые набег в фарадеевском вращателе δ_{lin} и кварце $\delta_{q\text{lin}}$ должны иметь разные знаки. Поскольку для кварца $n_o > n_e$, то $p_q > 0$. Знак p определяется знаком Q . По методике, описанной в [22], мы определили знак Q для магнитоактивного стекла МОС-115-35 и кристалла TGG. В обоих случаях $Q < 0$, что говорит о возможности компенсации предложенным методом. Заметим, что если $Q > 0$, то все равно можно использовать предложенный метод, расположив дополнительно 90° -ный вращатель поляризации между фарадеевским вращателем 2 и линзой 3. Расчет показывает, что это приведет к смене знака «плюс» на «минус» перед вторым слагаемым в формуле (7).

Дифференцируя γ по p_q и приравнивая производную нулю, получаем оптимальное $p_{q\text{opt}}$ и минимальную неразвязку γ_{min} :

$$\gamma_{\text{min}} = \left(\frac{1+2\xi}{3} \right)^2 \frac{p^2}{\pi^2} [A_1(m) - A_0(m)]. \quad (9)$$

3. Экспериментальные результаты и их обсуждение

В эксперименте, схема которого приведена на рис.1, использовалось линейно поляризованное излучение непрерывного Nd:YLF-лазера (Photonics Industries) с поперечным распределением интенсивности, близким к гауссову, что соответствует случаю $m = 1$. В качестве поляризаторов использовались клинья из исландского шпата. Мы также использовали коммерческий вращатель Фарадея (угол поворота 45°) на основе кристалла TGG. Неразвязка определялась при помощи измерителей мощности. Изменяя расстояние между линзами телескопа, можно компенсировать тепловую линзу фарадеевского вращателя. Заметим также, что для реализации метода можно

использовать телескоп, состоящий из положительной и отрицательной линз, что позволяет уменьшить его длину вплоть до 1 см. Эксперименты проводились в двух геометриях с фокусными расстояниями линз $f = 88$ и 125 см. Для каждой геометрии измерялась зависимость γ от мощности излучения.

На рис.2 приведены экспериментальные зависимости $\gamma_{\text{old}}(P_0)$ и $\gamma(P_0)$ для двух указанных значений f . При малой мощности тепловые эффекты малы и γ_{old} определяется «холодным» двулучепреломлением в среде, а γ – только величиной p_q . При этом $\gamma(P_0 \rightarrow 0) > \gamma_{\text{old}}(P_0 \rightarrow 0)$, т. е. при малой мощности излучения традиционная схема обеспечивает лучшую изоляцию. Отметим, что ИФ, предложенный в [10–12], свободен от этого недостатка. При увеличении мощности до оптимальной P_{opt} деполяризация γ уменьшается, достигая минимума. При дальнейшем увеличении P_0 неразвязка γ начинает расти.

На рис.2 приведены также теоретические зависимости $\gamma_{\text{old}}(P_0)$ и $\gamma(P_0)$, построенные по формулам (7), (8). Произведение $Q\alpha$ для TGG было измерено по методике [15, 16]. Без компенсации (кривая 1, рис.2) теория хорошо согласуется с экспериментом при больших мощностях, когда теплонаведенная неразвязка много больше «холодной» $\gamma_{\text{cool}} = 2.5 \cdot 10^{-4}$. При $f = 125$ мм экспериментальное γ_{min} существенно больше теоретического, что объясняется влиянием «холодной» неразвязки, которая в 2.5 раза больше теоретического значения γ_{min} для этого случая.

С этим же, по-видимому, связано и то, что экспериментальное P_{opt} несколько больше теоретического. При больших мощностях влияние «холодной» деполяризации незначительно ($\gamma_{\text{cool}} \ll \gamma$) и теоретические и экспериментальные значения γ совпадают. При $f = 88$ мм (кривая 3) экспериментальное P_{opt} хорошо согласуется с теорией. Экспериментальные γ хотя и больше теоретических, но различие не столь существенно.

Наибольший практический интерес представляет отношение $G_{\text{max}} = \gamma_{\text{old}}/\gamma_{\text{min}}$, показывающее, во сколько раз может быть увеличена степень изоляции (обратная неразвязка) при использовании предложенного метода. Из (8), (9) получаем

$$G_{\text{max}}(m) = \frac{A_1(m)}{A_1(m) - A_0(m)}. \quad (10)$$

В табл.1 приведены A_0 , A_1 и G_{max} при разных m . Как

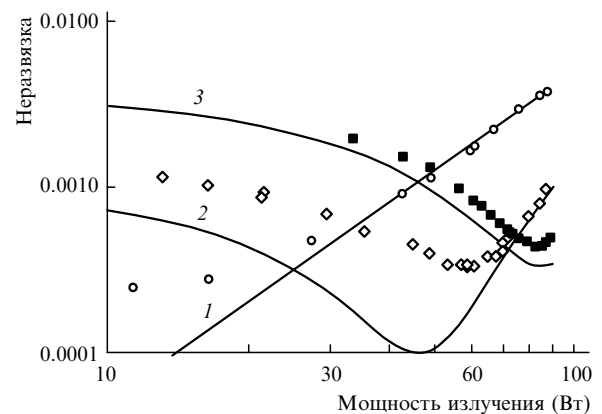


Рис.2. Неразвязка традиционной схемы ИФ $\gamma_{\text{old}}(P_0)$ (1, кружки) и неразвязка с компенсатором из кварца $\gamma(P_0)$ при $f = 125$ (2, ромбы) и 88 мм (3, квадраты). Теоретические зависимости построены по формулам (7), (8).

Табл.1. A_0 , A_1 и G_{\max} для различных m .

m	A_0	A_1	G_{\max}
1	1/8	0.137	11.5
2	0.109	0.111	66.7
4	0.095	0.095	640
8	0.087	0.087	9650
16	0.085	0.085	200000
∞	1/12	1/12	∞

видно из табл.1, эффективность компенсации существенно увеличивается с ростом m , что имеет простое физическое объяснение. Чем больше m , тем ближе профиль пучка к П-образному и, следовательно, тем ближе распределение температуры к параболическому. Величина δ_{lin} пропорциональна r^2 только при таком распределении температуры [18]. В этом случае при оптимальном p_q в любой точке поперечного сечения $\delta_{\text{lin}} = -\delta_{q\text{lin}}$, и деполяризация компенсируется полностью: $G_{\max} \rightarrow \infty$. В эксперименте достигнуто $G_{\max} = 8$ вместо предсказанного теорией $G_{\max}(m = 1) = 11.5$. Это различие связано с некоторой эллиптичностью пучка и с неидеальной соосностью линзы Z и пучка.

Величина G_{\max} не зависит от мощности излучения (см. формулу (10)) только при выполнении условия (6). В общем случае численное интегрирование (5) с учетом (1)–(4) показывает, что с ростом параметра p величина G_{\max} уменьшается (рис.3). Физически это связано с тем, что при $p \sim 1$ происходит насыщение зависимости $\gamma_{\text{old}}(p)$, поскольку при увеличении δ_{lin} от π до 2π деполяризация уменьшается [11, 12]. Последнее обстоятельство верно и для $\delta_{q\text{lin}}$, но при росте p отличие зависимости $\delta_{\text{lin}}(r)$ от параболы становится более существенным и, следовательно, G_{\max} уменьшается. Для П-образного ($m = \infty$) пучка $\gamma_{\text{min}} = 0$ при любых δ_{lin} .

4. Выводы

Эффективность предложенного метода компенсации и деполяризации ИФ существенно зависит от формы пучка – она максимальна для П-образного и минимальна для гауссова. В последнем случае степень изоляции увеличивается на порядок при $p < 2$, что соответствует мощности излучения $P_0 < 1$ кВт для TGG [15] и $P_0 < 200$ Вт для стекла [16]. Важным преимуществом этого метода по сравнению с рассмотренным в [12–14] является возможность использования стандартных коммерческих фарадеевских вращателей с углом поворота 45° .

Заметим также, что использование вместо кристалла кварца одноосного кристалла, не обладающего гиротропными свойствами, позволяет аналогичным способом компенсировать деполяризацию в активных элементах лазеров [23].

ПОПРАВКА

С.Н.Орлов, Ю.Н.Поливанов. Влияние распространения поляритонов на спектры ВКР-усиления и КАРС на поляритонах («Квантовая электроника», 2001, т.31, № 10, с.909–914).

В статье допущена следующая опечатка: на с.914 в списке литературы вместо

16. Qiu T.

17. , Maier M. *Phys.Rev.B*, **56**, 5717 (1997).

следует читать:

16. Qiu T., Maier M. *Phys.Rev.B*, **56**, 5717 (1997).

Соответственно, номера последующих ссылок нужно уменьшить на единицу.

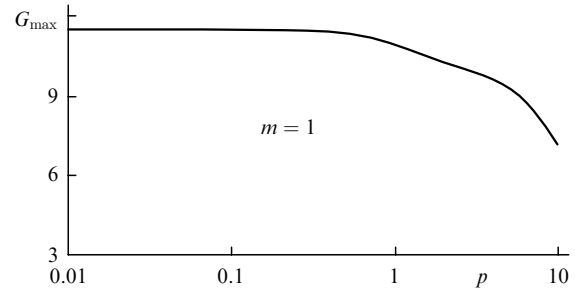


Рис.3. Зависимость увеличения степени изоляции G_{\max} от нормированной мощности p при $m = 1$.

Работа была поддержана грантом Национального научного фонда США (NSF) PHY-9900786 и грантом РФФИ № 99-02-17257.

1. Андреев Н.Ф., Палашов О.В., Пасманик Г.А., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **24**, 581 (1997).
2. Andreev N., Khazanov E., Kulagin O., Movshevich B., Palashov O., Pasmanik G., Rodchenkov V., Scott A., Soan P. *IEEE J. Quantum Electron.*, **35**, 110 (1999).
3. Eichler H.J., Mehl O., Eichler J. *Proc. SPIE*, **3613**, 166 (1999).
4. Lai K.S., Wu R., Phua P.B. *Proc. SPIE*, **3928**, 43 (2000).
5. Hirano Y., Yamamoto S., Tajime T., Taniguchi H., Nakamura M. *Proc. CLEO'2000. Postdeadline papers (OSA Technical Digest)* (Optical Society of America, Washington DC, 2000, с. 13–14).
6. Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **31**, 351 (2001).
7. Abramovici A., Althouse W.E., Drever R.W.P., et al. *Science*, **256**, 325 (1992).
8. Kanabe T., Kawashima T., Matsui H., Okada Y., Kawada Y., Eguchi T., Kandasamy R., Kato Y., Terada M., Yamanaka M., Nakatsuka M., Izawa Y., Nakai S., Kanzaki T., Miyajima H., Miyamoto M., Kan H. *Proc. SPIE*, **3889**, 190 (2000).
9. Khazanov E.A., Kulagin O.V., Yoshida S., Reitze D. *Proc. CLEO '98 (OSA Technical Digest)* (Optical Society of America, Washington DC, 1998, с. 250–251).
10. Khazanov E.A., Kulagin O.V., Yoshida S., Tanner D., Reitze D. *IEEE J. Quantum Electron.*, **35**, 1116 (1999).
11. Khazanov E.A. *Proc. SPIE*, **3609**, 181 (1999).
12. Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **26**, 59 (1999).
13. Khazanov E., Andreev N., Babin A., Kiselev A., Palashov O., Reitze D. *J. Opt. Soc. Am. B*, **17**, 99 (2000).
14. Андреев Н.Ф., Палашов О.В., Потемкин А.К., Райтци Д.Х., Сергеев А.М., Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **30**, 1107, (2000).
15. Khazanov E., Andreev N., Palashov O., Poteomkin A., Sergeev A., Mehl O., Reitze D. *Appl. Opt.* (to be published).
16. Андреев Н.Ф., Бабин А.А., Зарубина Т.В., Киселев А.М., Палашов О.В., Хазанов Е.А., Щавелев О.С. *Оптич. ж.*, **67**, 66 (2000).
17. Сомс Л.Н., Тарасов А.А. *Квантовая электроника*, **6**, 2546 (1979).
18. Хазанов Е.А. *Квантовая электроника*, **30**, 147 (2000).
19. Tabor M.J., Chen F.S. *Appl. Phys.*, **40**, 2760 (1969).
20. Jaecklin A.A., Lietz M. *Appl. Opt.*, **11**, 617 (1972).
21. Най Д. *Физические свойства кристаллов и их описание с помощью тензоров и матриц* (М., Иностранная литература, 1960).
22. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики* (М.: Наука, 1970, с. 725–752).
23. Khazanov E.A., Katin E.V., Poteomkin A.K. *J. Opt. Soc. Am. B*, **19**, No. 2 (2002).