

# Влияние малых разъюстировок и разброса параметров на оптические моды многоканального волоконного лазера с пространственным фильтром

Н.Н.Ёлкин, А.П.Напартович, А.Г.Сухарев, В.Н.Трощива

*Рассмотрен многоканальный волоконный лазер, в котором роль пространственного фильтра, выделяющего желаемую коллективную моду, играет кольцевой волновод (КВ) с длиной, равной  $1/2$  или  $1/4$  длины Тальбо. В явном виде получены выражения для собственных чисел мод указанных резонаторов при использовании гауссовой аппроксимации для полей отдельных каналов. В рамках теории малых возмущений рассмотрено влияние регулярных и случайных смещений положений каналов, а также угловой разъюстировки многоканального волокна (МКВ) относительно КВ. По теории возмущений рассчитано изменение спектра потерь мод, вызванное случайным набегом фаз в МКВ. Выведенные явные выражения для возмущенных собственных чисел сопоставлены с результатами численного моделирования конструкции на основе МКВ и КВ с длиной, равной  $1/4$  длины Тальбо. Сравнение результатов позволяет рекомендовать полученные формулы для оценок собственных чисел резонаторов Тальбо с возмущенными параметрами набора лазеров.*

**Ключевые слова:** волоконный лазер, синхронизация излучения, резонатор, эффект Тальбо.

## 1. Введение

Волоконные лазеры широко применяются в системах оптической связи и обладают рядом свойств, позволяющих говорить о перспективах их использования в промышленности. Переход к многоканальным конструкциям волокна даёт возможность сделать эти лазеры более компактными вследствие уменьшения длины за счёт более эффективного поглощения накачки от лазерных диодов. Одна из перспективных конструкций многоканального волоконного лазера была предложена в работе [1]. Активные каналы располагаются по кругу вблизи внешней оболочки волокна (рис.1). Фазовая синхронизация излучения всех каналов может существенно повысить выходную яркость. Исследования на эту тему в работах [2–4] привели к выводу, что наиболее перспективной оказывается фазовая синхронизация, основанная на помещении в резонатор с активным волокном пространственного фильтра в форме кольцевого волновода (КВ) с шириной, близкой к диаметру каналов. Если каналы расположены периодически по азимуту, то выходное излучение из них может воспроизводиться после двойного прохода по КВ с оптической длиной, кратной длине Тальбо (см., напр., [5]).

Использование такого пространственного фильтра неоднократно обсуждалось в литературе (см. обзор [6]). Однако эффект Тальбо в кольцевой геометрии имеет ряд особенностей. Кроме того, технология вытягивания многоканальных волокон (МКВ) не позволяет делать их идентичными. Малый размер каналов и малая длина фильтров делают также нетривиальной юстировку сис-

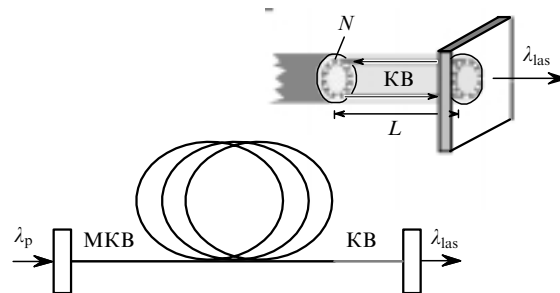


Рис.1. Конструкция МКВ-лазера с пространственным фильтром в форме КВ;  $\lambda_p$  и  $\lambda_{las}$  – длины волн накачки и генерации,  $L$  – длина КВ,  $N$  – число микроканалов.

темы. Основная цель настоящей работы заключается в проведении по теории возмущений оценок разъюстировки и разброса параметров каналов, критических для осуществления фазовой синхронизации описываемой лазерной системы. Выведенные аналитические формулы сопоставляются с результатами численного решения скалярного квазиоптического уравнения.

## 2. Идеальная конструкция

В отсутствие возмущений предметом рассмотрения является распространение скалярного волнового поля по кольцевому волноводу, толщина которого много меньше радиуса кольца. Предполагается, что поле на выходе из МКВ представляет собой периодическую по азимуту систему идентичных пучков, каждый из которых соответствует полю основной моды канала (одномодового микроволокна (МВ)). В численных расчётах поле одной моды задавалось по известным формулам (см. [7]). Распространение по КВ описывается параболическим уравнением. Численный метод прямого моделирования излучения в составном волокне описан в работе [8].

Для тонкого кольца радиальный оператор может быть сведён ко второй производной по переменной, изменяющейся в пределах толщины кольца. В таком случае трёхмерное параболическое уравнение формально совпадает с двумерным квазиоптическим уравнением при плоской геометрии с периодичностью по углу. Если дополнительно предположить, что КВ удерживает только одну радиальную моду, то после разделения переменных получим параболическое уравнение, описывающее распространение излучения с одномерной дифракцией по азимуту. Таким образом, задача о распространении излучения по КВ, удерживающему одну радиальную моду, сводится к одномерной задаче дифракции с периодическим условием на поле, соответствующим обходу по азимуту на  $2\pi$ .

На вход КВ излучение поступает из  $N$  одномодовых МВ с фиксированной поперечной структурой в каждом из них, описываемой функцией  $f(r)$ . В качестве  $f(r)$  рассматриваются только вещественные и нормированные ( $\int f^2(r)dr = 1$ ) функции, обращающиеся в нуль на расстоянии, меньшем периода структуры. В аналитических расчётах распределение поля на выходе из МВ аппроксимируется гауссовым пучком. Хотя поле не обращается строго в нуль на конечном расстоянии, в центре соседнего МВ оно пренебрежимо мало для рассматриваемых условий.

Задача о распространении периодического набора пучков анализировалась неоднократно. Мы будем следовать подходу, изложенному в [9], где эта задача сводится к решению системы уравнений для амплитуд поля отдельных пучков. Поле от  $N$  излучателей (волокон) на входе в КВ представляется в виде

$$E(\rho) = \sum_n C(R_n) f(\rho - R_n).$$

Здесь  $\rho$  – тангенциальная переменная;  $R_n = 2\pi R_c n/N$  – координата  $n$ -го канала;  $R_c$  – средний радиус кольца;  $C(R_n)$  – амплитуда поля. На расстоянии  $z$  от входа проекция полного поля на  $f(r)$  в точке расположения микроволокна может быть записана в виде

$$C(R_n, z) = \sum_{n'} M(R_n, R_{n'}) C(R_{n'}). \quad (1)$$

При этом матричные элементы имеют следующее интегральное представление:

$$M(R_n, R_{n'}) = \left(-\frac{ik_0}{2\pi z}\right)^{1/2} \times \int d\rho d\rho' f(\rho - R_n) f(\rho' - R_{n'}) \exp\left[\frac{ik_0}{2z}(\rho - \rho')^2\right], \quad (2)$$

где  $k_0 = 2\pi n_0/\lambda$ ;  $n_0$  – показатель преломления среды;  $z = 2L$  – длина распространения;  $L$  – длина КВ. В рассматриваемой геометрии излучение отражается от дальнего торца КВ и возвращается в МКВ, возбуждая моды МВ. После двойного прохода по МВ поле вновь переизлучается в КВ. Полагая, что для пассивного МКВ проход по каналам приводит только к набегу фаз, одному и тому же для всех каналов, условие воспроизведения поля после кругового обхода по резонатору можно записать в виде

$$\gamma C(R_n) = \sum_{n'} M(R_n, R_{n'}) C(R_{n'}), \quad (3)$$

где  $\gamma$  – собственное число. Уравнение (3) при периодическом расположении излучателей (поскольку матрица  $M(R_n, R_{n'})$  разностная) имеет решения в виде  $C_m(R_n) = \exp(iq_m R_n)$ , где  $q_m = 2\pi m/(Nb)$ ;  $m$  – номер коллективной моды;  $b = R_n/n$  – период решётки МВ. Подставляя решения в систему уравнений (3), легко получить следующее выражение для собственных чисел  $\gamma_m$  системы (3) (см. [9]):

$$\gamma_m = M(q_m) = \sum_{n'-n} \exp[iq_m(R_{n'} - R_n)] \int f_F(q) f_F(-q) \times \exp\left(-\frac{iq^2 z}{2k_0}\right) \exp[iq(R_{n'} - R_n)] \frac{dq}{2\pi}, \quad (4)$$

где

$$f_F(q) = \int f(\rho) \exp(iq\rho) d\rho$$

является образом Фурье функций  $f$ . При длине КВ, равной половине длины Тальбо  $z_T = k_0 b^2/\pi = 2n_0 b^2/\lambda$ , в [9] выведено выражение

$$M(q) = \sum_k \exp\left(\frac{iz_T q^2}{2k_0} - ibqk\right) \times \int f(\rho) f\left(\rho - \frac{z_T q}{k_0} + kb\right) d\rho. \quad (5)$$

При длине КВ, равной четверти длины Тальбо, можно получить следующее выражение:

$$M(q) = \sum_k \exp\left[\frac{iz_T q^2}{4k_0} - ibq\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] \times \int f(\rho) f\left[\rho - \frac{z_T q}{2k_0} + b\left(k + \frac{1}{2}\right)\right] d\rho. \quad (6)$$

В частности, при использовании аппроксимации распределения поля одного канала гауссовым пучком

$$f(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho^2}{2a^2}\right) (a\sqrt{\pi})^{-1/2} \quad (7)$$

можно найти явные выражения для собственных чисел:

$$\gamma_m^{(z_T/2)} = \sum_{k=0, \pm 1} \exp\left[-\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{k-1}{2} + \frac{m}{N}\right)^2 + 2\pi i \left(\frac{k-1}{2} + \frac{m}{N}\right)^2 - \frac{\pi(k-1)^2 i}{2}\right] \quad (8)$$

при  $L = z_T/2$  и

$$\gamma_m^{(z_T/4)} = \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) \times \exp\left[-\left(\frac{b}{2a}\right)^2 \left(\frac{m}{N} - \frac{1}{2}\right)^2 + \pi i \left(\frac{m}{N} - \frac{1}{2}\right)^2\right] \quad (9)$$

при  $L = z_T/4$ .

При выводе формул (5) и (6) предполагалось, что функция  $f(r)$  обращается строго в нуль на конечном расстоянии. Для гауссовой аппроксимации это не выполняется, поэтому в формуле (8) следует опустить члены

порядка  $\exp\{-[b/(2a)]^2\}$ , возникающие из-за перекрытия полей соседних МВ. При  $z = z_T$  собственные числа  $\gamma_0$  (синфазная мода) и  $\gamma_{N/2}$  (антифазная мода) с указанной выше точностью равны 1 и  $-i$  соответственно. Это означает, что обе моды не имеют потерь (точное самовоспроизведение) и различаются частотой. При нечетном  $N$  и  $z = z_T$  воспроизводится только синфазная мода, которая представляет очевидный практический интерес. При этом минимальными потерями обладают моды с  $m = (N \pm 1)/2$ , для которых  $|\gamma_{(N \pm 1)/2}| = \exp\{-[b/(2Na)]^2\}$ . Таким образом, в этом случае вырождение по потерям снимается, а дискриминация нежелательных мод определяется величиной  $|\gamma_{(N \pm 1)/2}|$ .

Антифазная мода с дополнительной фазовой пластиной, выпрямляющей фазовый фронт, также может представлять интерес. Для КВ с длиной  $z_T/4$  при четном  $N$  лишь антифазная мода имеет собственное число  $\gamma_{N/2} = \exp(-i\pi/4)$ , по модулю равное единице. Модуль собственного числа двух ближайших к антифазной мод  $|\gamma_{N/2 \pm 1}| = \exp\{-[b/(2Na)]^2\}$ .

Таким образом, одну моду можно выделить двумя способами: использовать либо КВ длиной  $z_T/2$  и МКВ с нечетным числом каналов (синфазная мода), либо КВ длиной  $z_T/4$  и МКВ с четным числом каналов (антифазная мода). Селективность при этом оказывается одинаковой. Отметим также, что моды с номерами  $m$  и  $N - m$  имеют строго равные собственные числа. Физически это очевидно, т. к. огибающие поля  $C_m(R_n)$  и  $C_{N-m}(R_n)$  различаются лишь направлением изменения фазы.

Приведенные выше выражения описывают идеальную конструкцию, показанную на рис.1. Нарушение относительной юстировки МКВ и КВ и разброс параметров каналов (параметров МВ) приводит к разрушению эффекта Тальбо, уменьшению собственного числа выбранной моды и может привести к возникновению генерации на соседних модах. В работе [5] экспериментально продемонстрирована фазовая синхронизация МКВ-лазера с антифазной модой на выходе. В последующих разделах будет аналитически рассмотрено влияние разъюстировок и разброса параметров МВ для двух длин КВ ( $L = z_T/2$  и  $z_T/4$ ) и проведено сравнение с численными расчётами, сделанными для экспериментально реализованной в [5] конструкции.

### 3. Анализ малых возмущений

Пока отклонения от идеальной конструкции малы, производимые ими эффекты складываются независимо. Это обуславливает отдельное рассмотрение следующих возмущений: параллельного сдвига КВ относительно МКВ, угловой разъюстировки КВ, случайных смещений МВ относительно их регулярного расположения в плоскости МКВ, случайного разброса постоянных распространения МВ, приводящего к флуктуациям фазы поля, прошедшего через МКВ. При анализе используется стандартная теория малых возмущений для дифракционного оператора распространения излучения в КВ, удерживающем одну радиальную моду. Рассмотрено возмущение параметров синфазной моды ( $L = z_T/2$ ) и антифазной моды ( $L = z_T/4$ ).

#### 3.1. Параллельный сдвиг

При параллельном сдвиге КВ поперёк оси смещение каналов зависит от их положения и направления сдвига.

Очевидно, что при большом числе каналов не следует ожидать сильной зависимости изменения собственного числа от направления сдвига. В одномерной аналитической модели смещение МВ по азимуту при параллельном сдвиге может быть записано как функция номера МВ  $n$  следующим образом:

$$A_n = S \sin \frac{2\pi n}{N}, \quad (10)$$

где  $S$  – максимальное смещение оси МВ. В уравнении (3) рассматриваемое возмущение приведёт к изменению матрицы связи  $M(R_n, R_{n'})$ :

$$M(R_n, R_{n'}) = \int \frac{dq}{2\pi} f_F(-q) f_F(q) \times \exp \left[ -\frac{iq^2 z}{2k_0} + iq(R_{n'} - R_n) + iq(A_{n'} - A_n) \right]. \quad (11)$$

Эта матрица уже не является функцией разности номеров каналов, поэтому решить систему (3) не удастся. Используя теорию возмущений вплоть до второго порядка, т. к. первый неисчезающий член оказывается пропорциональным  $S^2$ , можно получить следующие выражения для собственных чисел синфазной моды ( $L = z_T/2$ ) и антифазной моды ( $L = z_T/4$ ) при четном  $N$  соответственно:

$$\frac{\gamma_0}{\gamma_0^{(0)}} = 1 - \frac{S^2}{4a^2} \left[ 1 - \frac{\gamma_1^{(0)}}{\gamma_0^{(0)}} + \frac{2\gamma_1^{(0)}}{\gamma_0^{(0)} - \gamma_1^{(0)}} \frac{b^2}{(aN)^2} \right], \quad (12)$$

$$\gamma_{N/2}^{(z_T/4)} = (-i)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{S^2}{4a^2} \left[ 1 - \frac{\gamma_{1+N/2}^{(0)}}{\gamma_{N/2}^{(0)}} + \frac{2\gamma_{1+N/2}^{(0)}}{\gamma_{N/2}^{(0)} - \gamma_{1+N/2}^{(0)}} \frac{b^2}{(2aN)^2} \right] \right\}, \quad (13)$$

где индекс (0) наверху означает невозмущённое собственное число. В реальной конструкции вклад такого же порядка в увеличение потерь дают смещения в радиальном направлении, пока эти смещения много меньше толщины КВ. В таком случае для получения полных потерь достаточно возвести модуль собственного числа (12), (13) в квадрат.

#### 3.2. Угловая разъюстировка

Наклон оптической оси МКВ относительно КВ эквивалентен оптическому клину, наклоняющему возвращенные из МКВ пучки. Фазовый множитель, соответствующий действию такого клина на кольцевой набор МВ, может быть записан в виде  $\exp[ik_0\psi R_c \sin(\rho/R_c)]$ , где  $\psi$  – угол наклона оси, и тогда

$$M(R_n, R_{n'}) = \left( -\frac{ik_0}{2\pi z} \right)^{1/2} \int d\rho d\rho' f(\rho - R) f(\rho' - R_{n'}) \times \exp \left[ \frac{ik_0}{2z} (\rho - \rho')^2 + ik_0\psi R_c \sin \frac{R_{n'}}{R_c} \right]. \quad (14)$$

Малым параметром, по которому следует строить теорию возмущений, является величина  $k_0\psi R_c \ll 1$ . При разложении экспоненты в (14) появятся члены, пропор-

циональные  $\sin(2\pi n/N)$  и  $\sin^2(2\pi n/N)$ , приводящие к связи  $m$ -й невозмущенной моды с соседними  $(m \pm 1)$ -й и  $(m \pm 2)$ -й модами. В результате система оказывается чувствительной к таким возмущениям. Чтобы описать влияние наклона оси более точно, в теории возмущений учтём связь между ближайшими модами, не предполагая её малой. Заметим, что моды, соседние с синфазной или антифазной модой, обладают одинаковыми потерями. Однако, поскольку возмущающий член имеет определенную симметрию ( $\sin(2\pi n/N)$ ), возбуждается мода, представляющая собой нечётную комбинацию двух соседних мод. Таким образом, задача может быть сведена к нахождению двух взаимодействующих между собой мод.

Эта задача имеет аналог в квантовой механике: перемешивание двух уровней резонансным возмущением. Проведя соответствующие преобразования, можно получить следующее выражение для возмущённых собственных чисел взаимодействующих мод:

$$\tilde{\gamma}_{0,1} = \frac{1}{2} \left\{ \left[ (\gamma_0 + \gamma_1) \left( 1 - \frac{\varphi^2}{4} \right) - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\gamma_0 - \gamma_2} \frac{\varphi^2}{2} \right] \pm |\gamma_0 - \gamma_1| \left( 1 - \frac{\varphi^2}{\varphi_c^2} \right)^{1/2} \right\}. \quad (15)$$

Здесь  $\varphi = k_0 \psi R_c$ ;  $\gamma_0 = |\gamma_{N/2}| = 1$  – модули невозмущённых собственных чисел воспроизводящихся мод;  $\gamma_1, \gamma_2$  – модули невозмущённых собственных чисел соседних мод (наряду со смешиванием двух резонансно взаимодействующих мод в (15) учтено возмущение этих мод, производимое более удаленными модами);

$$\varphi_c = (1 - \gamma_1) \left[ \frac{(1 + \gamma_1)^2}{2} - \frac{\gamma_1 \gamma_2 (1 - \gamma_1)}{1 - \gamma_2} \right]^{-1/2}$$

– критический параметр, определяющий угол наклона оси, после которого перенормированные моды имеют равные потери:

$$|\tilde{\gamma}_{0,1}| = \gamma_1^{1/2} \left( 1 - \frac{\varphi^2}{4} \frac{\gamma_2}{\gamma_0 - \gamma_2} \right).$$

При  $\varphi \geq \varphi_c$  вклады воспроизводящейся моды и соседней с ней моды оказываются одного порядка, что приводит к изменению амплитуд поля  $C(R_n)$  по МВ. Контраст амплитуд поля

$$K = \max \left| \frac{C(R_n)}{C(R_{n+N/2})} \right| = \left[ \frac{\gamma_0 + 2\gamma_1 + 2(\gamma_0 - \gamma_1)(\varphi_c^{-2} - \varphi^{-2})^{1/2}}{\gamma_0 + 2\gamma_1 - 2(\gamma_0 - \gamma_1)(\varphi_c^{-2} - \varphi^{-2})^{1/2}} \right]^{1/2}.$$

### 3.3. Случайный сдвиг МВ

В процессе изготовления МКВ могут флуктуировать положение МВ и его размеры или форма. Вначале рассмотрим случайное смещение МВ относительно идеального положения. Разброс в размерах или форме МВ приводит к случайному изменению постоянной распространения моды волокна, приводящему, в свою очередь, к случайному набегу фазы, что будет рассмотрено в следующем разделе.

Естественно предположить, что случайные смещения МВ по двум координатам статистически независимы и при малом смещении дают одно и то же уменьшение собственного числа моды. В таком случае, чтобы перенести результаты развиваемой здесь теории для одномерной геометрии на реальную структуру, достаточно модуль найденного собственного числа возвести в квадрат. Рассмотрение сдвиговых возмущений удобно производить в фурье-представлении (см. (4)). Обозначив случайное смещение центра МВ как  $\Delta_n$ , образ Фурье поля МВ можно записать в виде

$$F[f(\rho - R_n - \Delta_n)] = F[f(\rho - R_n)] \exp(-iq\Delta_n).$$

Отсюда следует, что случайный разброс положений центров МВ приводит к модификации элементов матрицы связи посредством простого умножения подынтегральной функции (11) на экспоненциальный фактор. Если смещения  $\Delta_n$  независимы и удовлетворяют нормальному распределению, удастся получить явные выражения для собственных чисел, усредненных по ансамблю выборок:

$$\gamma = M(q) = \sum_k \exp \left( \frac{ib^2 q^2}{2\pi} - ibqk \right) \times \int \left\langle f(\rho) f \left( \rho - \Delta + \frac{b^2 q}{\pi} - kb \right) \right\rangle d\rho \quad (16)$$

при  $L = z_T/2$  и

$$\gamma = M(q) = \sum_k \exp \left[ \frac{ib^2 q^2}{4\pi} - ibq \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] \times \int \left\langle f(\rho) f \left[ \rho - \Delta + \frac{b^2 q}{2\pi} - b \left( k + \frac{1}{2} \right) \right] \right\rangle d\rho \quad (17)$$

при  $L = z_T/4$ . Здесь  $\Delta$  – случайная переменная; угловые скобки означают усреднение по ансамблю выборок. Напомним, что  $q$  пробегает значения  $q_m = 2\pi m/(Nb)$ , где  $m$  – номер коллективной моды, изменяющийся от нуля до  $N - 1$ .

При гауссовой аппроксимации поля МВ выражения для собственных чисел имеют следующий вид:

$$\gamma_m^{(z_T/2)} = \frac{1}{(1 + \sigma^2/a^2)^{1/2}} \sum_{k=0, \pm 1} \exp \left[ \left( \frac{k-1}{2} + \frac{m}{N} \right)^2 \times \left( 2\pi i - \frac{b^2}{a^2 + \sigma^2} \right) - \frac{\pi(k-1)^2 i}{2} \right] \quad (18)$$

для  $L = z_T/2$  и

$$\gamma_m^{(z_T/4)} = \frac{\exp(-i\pi/4)}{(1 + \sigma^2/a^2)^{1/2}} \times \exp \left[ \left( \frac{m}{N} - \frac{1}{2} \right)^2 \left( \pi i - \frac{b^2/4}{a^2 + \sigma^2} \right) \right] \quad (19)$$

для  $L = z_T/4$ . Здесь  $\sigma$  – дисперсия случайного сдвига МВ.

### 3.4. Случайный набег фаз

Как отмечалось выше, случайный разброс набегов фаз поля после обхода МВ вызван различием их размеров или формы. Для малых возмущений фаз система

линейных уравнений для амплитуд волновых полей на торце МВ имеет вид

$$\gamma C(R_n) = (E + V_n) \sum_{n'=0}^{N-1} M_{nn'} C(R_{n'}).$$

Здесь  $E$  – единичная матрица; матрица  $M_{nn'}$  соответствует идеальной системе;  $V_n = \exp(i\phi_n) - 1$  – элементы диагональной матрицы, содержащие разности фаз  $\phi_n$ , возникшие за двойной проход поля по МКВ. Для двукратно вырожденных мод с номерами  $m$  и  $N - m$  достаточно ограничиться теорией возмущений в первом порядке, что даёт

$$\gamma_m^{(1)} = \frac{\gamma_m^{(0)}}{N} \left[ \sum_k V_k + \left( \sum_k V_k^2 \right)^{1/2} \right]. \tag{20}$$

После усреднения по случайному разбросу находим

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_m^{(0)} + \gamma_m^{(1)}}{\gamma_m^{(0)}} &= e^{-\sigma^2/2} + \left[ \frac{(1 - e^{-\sigma^2/2})^2 - e^{-\sigma^2}(1 - e^{-\sigma^2})}{N} \right]^{1/2} \\ &= 1 - \frac{\sigma^2}{2} \pm i \left( \frac{\sigma^2}{N} \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Последнее равенство получается при переходе к малой дисперсии набега фаз. Для невырожденных мод с номерами  $m = 0$  и  $m = N/2$  теория возмущений, включая второй порядок, даёт выражение

$$\begin{aligned} \gamma_m^{(1)} + \gamma_m^{(2)} &= \frac{\gamma_m^{(0)}}{N} \sum_k V_k \\ &+ \frac{\gamma_m^{(0)}}{N^2} \sum_k V_k^2 \sum_{m'} \frac{\gamma_{m'}^{(0)}}{\gamma_m^{(0)} - \gamma_{m'}^{(0)}}. \end{aligned} \tag{22}$$

Для синфазной моды ( $m = 0$ ) теория возмущений до второго порядка после усреднения по случайным фазам даёт общее выражение ( $L = z_T/2$ ):

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_0}{\gamma_0^{(0)}} &= e^{-\sigma^2/2} + \frac{1 + e^{-2\sigma^2} - 2e^{-\sigma^2/2}}{N} \\ &\times \sum_m \frac{\gamma_m^{(0)}}{\gamma_0^{(0)} - \gamma_m^{(0)}} = 1 - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{N} \sum_m \frac{\gamma_m^{(0)}}{\gamma_0^{(0)} - \gamma_m^{(0)}}. \end{aligned} \tag{23}$$

При использовании гауссовой аппроксимации и выражения (8) можно получить следующую приближенную формулу:

$$\gamma_0 \approx 1 - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{N} \left( \frac{2\gamma_1^{(0)}}{1 - \gamma_1^{(0)}} - \frac{2i\gamma_1^{(0)}}{1 + i\gamma_1^{(0)}} - \frac{i}{1 + i} \right). \tag{24}$$

Для КВ длиной  $L = z_T/4$  с учётом выражения (9) для собственных чисел получим

$$\sqrt{i} \gamma_{N/2}^{(z_T/4)} \approx 1 - \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{N} \frac{2\gamma_{1+N/2}^{(0)}}{\gamma_{N/2}^{(0)} - \gamma_{1+N/2}^{(0)}}. \tag{25}$$

Формулы (24), (25) дают возможность оценить максимальное число МВ в одномерном наборе  $N_{\max}$ , все лазеры которого вовлечены в сфазированную генерацию.

Критерий, основанный на сравнении поправки к собственному числу с разностью ближайших собственных чисел [10], для рассматриваемой схемы при  $L = z_T/2$  даёт  $N_{\max} \sim [b^2/(\sigma a^2)]^{2/3}$ , а при  $L = z_T/4$  имеем  $N_{\max} \sim [b^2 \times (4\sigma a^2)^{-1}]^{2/3}$ . Когда число МВ в кольце превышает  $N_{\max}$ , весь набор может разбиться на группы со средним числом МВ, равным  $N_{\max}$  [10].

#### 4. Сравнение результатов анализа с численными расчётами

Численные исследования основаны на трехмерной дифракционной программе (см. [8]), описывающей распространение монохроматического излучения в приближении скалярной параксиальной оптики. Рассмотрена конструкция, реализованная в эксперименте [5] и представляющая собой два соединённых куса волокон, один из которых включает в себя кольцевой набор из 18 МВ диаметром 8 мкм, размещенных на радиусе 131 мкм, а другой – КВ с толщиной кольца, немного большей диаметра микроканалов (рис.1).

Резонатор образуют зеркала, расположенные вплотную к торцам волокон, длина КВ  $L = z_T/4$ . Рассчитывалось поле после двойного прохода по КВ. Результирующее распределение поля проецировалось на совокупность мод микроканалов. Полученные при этом коэффициенты умножались на поле в каждом МВ, и расчёт двойного прохода по КВ повторялся. Указанные итерации продолжались до сходимости, т. е. до воспроизведения с заданной точностью комплексных коэффициентов разложения по модам МВ. При этом, как и в обычных итерационных расчётах оптического резонатора, находилось комплексное собственное число, амплитуда которого определяла потери за обход, а фаза – точную резонансную частоту. Распространение излучения внутри МВ не рассматривалось.

Предполагалось, что обход каждого МВ может привести только к изменению комплексной амплитуды моды МВ. В соответствии с рассматриваемым возмущением вводились смещение МВ в выходной плоскости МКВ, набег фазы, имитирующий клин в случае углового наклона оси, или случайный набег фазы.

На рис.2 и 3 показаны рассчитанные по формулам (8) и (9) для экспериментальных условий модули и фазы собственных чисел 18 мод при длине КВ  $L = z_T/2$  и  $z_T/4$ . При аналитических расчётах радиус аппроксимирующего моду МВ гауссова пучка  $a$  был взят равным 3 мкм, период расположения МВ на кольце  $b = 2\pi R_c/N$

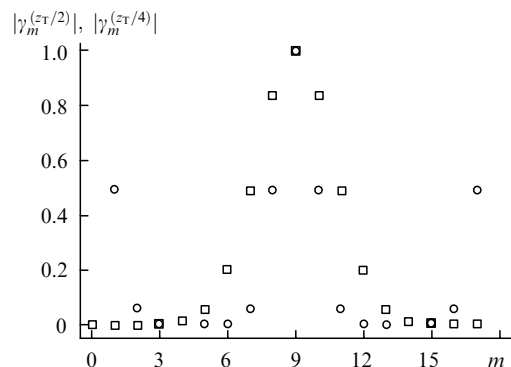


Рис.2. Модули собственных чисел  $\gamma_m^{(z_T/2)}$  (○, синфазная мода) и  $\gamma_m^{(z_T/4)}$  (□, антифазная мода).

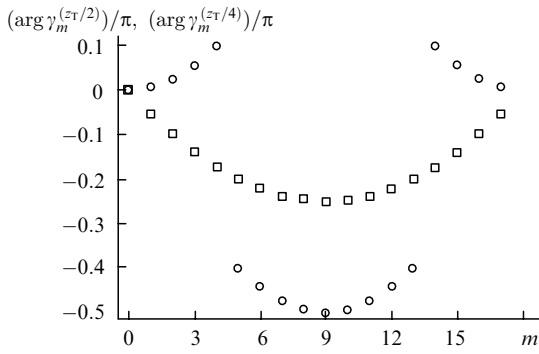


Рис.3. Фазы собственных чисел  $\gamma_m^{(z_T/2)}$  (○, синфазная мода) и  $\gamma_m^{(z_T/4)}$  (□, антифазная мода).

= 45.7 мкм. Поскольку расстояние между МВ заметно больше диаметра пучков, пространственный фильтр в форме КВ эффективно дискриминирует дробные моды для  $L = z_T/2$ . Однако две моды (синфазная,  $m = 0$  и антифазная,  $m = 9$ ) не имеют потерь и возбуждаются одинаково. Для КВ с  $L = z_T/4$  только одна антифазная мода не имеет потерь, однако дискриминация ближайших мод в этом случае не столь велика. Чтобы осуществить фазовую синхронизацию с указанными параметрами, необходимо длину КВ выбрать равной  $z_T/4$ , поэтому для проверки аналитических выражений численные расчёты выполнялись именно при этой длине КВ.

При проведении численных расчётов возникает проблема удачного выбора ширины КВ. Когда его ширина совпадает с размером МВ, конструкция, очевидно, будет слишком чувствительна к смещению МВ в радиальном направлении. КВ с большой толщиной будет поддерживать несколько радиальных мод, что приведёт к разрушению эффекта Тальбо. Нами был выбран компромиссный вариант: толщина КВ взята равной 12 мкм (числовая апертура равна 0.16). При этом нет полного совпадения радиальных структур мод МВ и моды КВ. Однако расчёт показывает, что степень воспроизведения структуры антифазной моды после двойного прохода по КВ довольно высока: модуль собственного числа равен 0.936.

В аналитических расчётах радиальная структура поля игнорировалась и рассматривалась дифракция в азимутальном направлении. Чтобы учесть расхождение в аналитическом и численном подходах, результаты анализа сравнивались с полученными численно модулями собственных чисел, нормированными на 0.936. Ниже в виде таблиц приводятся результаты такого сопоставления.

4.1. Параллельный сдвиг

Табл.1.

$S$ (мкм)	$ \gamma $	$ \gamma_{norm} $	$ \gamma_{anal} ^2$
0	0.936	1	1
0.5	0.907	0.97	0.97
1	0.81	0.86	0.89
1.5	0.72	0.77	0.766

Сравнение аналитических результатов с численными демонстрирует хорошее согласие между ними, что подтверждает сделанное предположение о независимом вкладе радиального и углового смещений в увеличение потерь моды.

4.2. Угловая разбьюстировка

Табл.2.

$\psi$ (мрад)	$\varphi$	$ \gamma_{norm} $	$ \gamma_{anal} $	$K$	$K_{anal}$
0.2	0.157	0.954	0.91	1.57	1.75
0.3	0.235	0.915	0.9	2.46	2.79
0.4	0.314	0.894	0.89	3.75	3.48

Для условий численного моделирования  $\varphi_c = 0.13$ , так что все расчеты сделаны для  $\varphi > \varphi_c$ . Интересно отметить, что, хотя изменение собственного числа невелико, теория возмущений здесь неприменима. Сильное перемешивание мод приводит к заметно неоднородному распределению поля по МВ, что характеризуется контрастом  $K$ . Используемое приближение, при котором возмущающее действие моды, следующей за ближайшей модой, учтено по теории возмущений, оказывается адекватным реальной ситуации. Аналитическая оценка дает неплохое согласие с численным расчетом как по модулю собственного числа, так и по контрасту распределения поля по МВ.

4.3. Случайный сдвиг МВ

Табл.3.

$\sigma$ (мкм)	$ \gamma_{norm} $	$ \gamma_{anal} $	$\sigma^{2d}$ (мкм)	$ \gamma_{norm} ^{2d}$
1	0.94	-	-	-
	0.906	0.95	-	-
	0.93	-	-	-
$\sqrt{2}$	0.906	-	-	0.872
	0.87	0.9	1	0.888
2	0.823	-	-	0.860
	0.855	-	-	-
	0.839	0.83	-	-
	0.682	-	-	-
$2\sqrt{2}$	0.694	-	-	-
	0.74	-	-	0.684
	0.737	0.73	2	0.708
	0.662	-	-	0.715

Эффект от случайных смещений МВ моделировался численно в двух постановках расчётов. В одной из постановок брались случайные смещения МВ только по углу, что полностью соответствует аналитической теории. Для каждого среднего смещения собственное число находилось в нескольких конкретных реализациях. Сравнение второго и третьего столбцов табл.3 демонстрирует, что  $|\gamma_{anal}|$ , полученное усреднением по многим реализациям, попадает внутрь интервала разброса  $|\gamma_{norm}|$  во всех расчетах. Кроме того, численно определялось собственное число в том случае, когда с равной дисперсией допускались случайные смещения в разных направлениях на плоскости. Ожидалось, что для таких возмущений (соответствующие величины в последних столбцах табл.3 имеют верхний индекс 2d)  $\langle |\gamma|^{2d} \rangle \simeq \langle |\gamma| \rangle^2$  или, иначе говоря,  $\langle |\gamma|^{2d} \rangle|_{\sigma} \simeq \langle |\gamma| \rangle|_{\sigma\sqrt{2}}$ . Сравнение второго, третьего и пятого столбцов показывает, что эти соотношения действительно выполняются в пределах случайного разброса.

#### 4.4. Случайный набег фаз

Табл.4.

$\sigma$ (рад)	$ \gamma_{\text{norm}} $	$ \gamma_{\text{anal}} $
0.2	0.982	0.96
	0.978	
	0.984	
0.4	0.929	0.84
	0.855	
	0.855	

При заданной дисперсии разброса набег фаз проводились расчёты собственных чисел для трёх конкретных реализаций случайных величин. В пределах выбранных дисперсий вариации модуля собственного числа в зависимости от выборки не очень велики и разумно согласуются с аналитическими значениями.

#### 5. Заключение

Выполненный детальный анализ коллективных мод одномерного кольцевого набора идентичных излучателей позволил в явном виде получить выражения для собственных чисел резонаторов Тальбо длиной  $z_T/2$  и  $z_T/4$  при использовании гауссовой аппроксимации полей отдельных излучателей. В рамках теории малых возмущений рассмотрено влияние регулярных и случайных смещений положений излучателей, а также угловой разъюстировки МКВ относительно КВ, играющего роль пространственного фильтра, выделяющего желаемую коллективную моду. По теории возмущений рассчитано

также изменение потерь мод, вызванное случайным набегом фаз в МКВ. Выведенные явные выражения для возмущенных собственных чисел сопоставляются с результатами численного моделирования конструкции лазера на основе МКВ и КВ длиной  $z_T/4$ . Для этого лазера экспериментально был обнаружен режим генерации антифазной моды [5]. Сравнение результатов позволяет рекомендовать выведенные формулы для оценок собственных чисел резонаторов Тальбо с возмущенными параметрами набора лазеров.

Авторы выражают благодарность за инициирование и поддержку настоящей работы П.Гласу (P.Glas) и М. Вrage (M.Wrage) (Институт Макса Борна, Берлин). Работа частично финансировалась РФФИ (гранты № 99-02-17469 и 01-02-16560).

1. Glas P., Naumann M., Schirrmacher A., Pertsch Th. *Opt. Commun.*, **151**, 187 (1998).
2. Wrage M., Glas P., Leitner M., Sandrock T., Elkin N.N., Napartovich A.P., Sukharev A.G. *Opt. Commun.*, **175**, 97 (2000).
3. Wrage M., Glas P., Fischer D., Leitner M., Napartovich A.P., Vysotsky D.V. *Opt. Lett.*, **25**, 1436 (2000).
4. Wrage M., Glas P., Fischer D., Leitner M., Napartovich A.P., Vysotsky D.V. *Opt. Commun.*, **191**, 149 (2001).
5. Wrage M., Glas P., Fischer D., Leitner M., Elkin N.N., Vysotsky D.V., Napartovich A.P., Troshieva V.N. *Opt. Commun.* (to be published).
6. Лиханский В.В., Напартович А.П. *УФН*, **160**, 101 (1990).
7. Снайдер А., Лав Дж. *Теория оптических волноводов* (М.: Радио и связь, 1987).
8. Napartovich A.P., Elkin N.N., Sukharev A.G., Troshieva V.N., Vysotsky D.V. *Opt. Commun.*, **177**, 207 (2000).
9. Голубенцев А.А., Лиханский В.В., Напартович А.П. *ЖЭТФ*, **93**, 1199 (1987).
10. Голубенцев А.А., Лиханский В.В. *Квантовая электроника*, **17**, 592 (1990).