

# Концентрация световой энергии в конусе с металлическим покрытием

Т.И.Кузнецова, В.С.Лебедев

*Проведен теоретический анализ пространственной структуры световых волн электрического типа в конусе с идеально отражающими металлическими стенками. Представлены точные формулы и асимптотические выражения, определяющие зависимости плотностей энергии различных компонент поля внутри конуса от радиальной координаты. Особое внимание уделено изучению характера спада поля вблизи вершины конуса в зависимости от его угла раскрытия и длины волны. Изучены эффекты отражения волн на границе усеченного конуса и свободного пространства. Полученные результаты использованы с целью определения коэффициента пропускания усеченного конуса в оптическом диапазоне для широкого набора параметров, включая значения диаметра выходного отверстия порядка 0.05–0.1 длины волны. Дано теоретическое обоснование возможности получения высокого коэффициента пропускания света в металлизированном усеченном конусе.*

**Ключевые слова:** оптика ближнего поля, нанометровые масштабы, конический волновод, коэффициент пропускания, отражение на субволновой апертуре.

## 1. Введение

В основе сканирующего оптического микроскопа ближнего поля лежит возможность локализации света в области субволновых размеров. Создание источника света с требуемыми здесь характеристиками является чрезвычайно важным моментом, поскольку только сочетание высокой степени локализации и достаточной плотности энергии может обеспечить получение качественных изображений нанообъектов.

В литературе имеется целый ряд экспериментальных и теоретических работ, направленных на создание квазиточечного источника излучения для зондирования нанообъектов. В эксперименте для этих целей наиболее широко используются металлизированные волокна, сужающиеся на выходе до размеров порядка  $\lambda/20 - \lambda/10$  [1–5]. Среди первых теоретических работ, описывающих такие оптические устройства, можно назвать [6–9]. В [6] был предложен аналитический подход, применимый при малых углах наклона стенок волновода. В этих условиях величины коэффициента пропускания волновода оказываются весьма малыми. В серии работ [7–9] был использован метод множественных мультиполей [10, 11]. Этот метод был применен в [8] для расчета прохождения света через сужающийся волновод с металлизированными стенками и открытым торцом, в [9] – через волновод, на выходной торец которого нанесен тонкий слой металла. В работе [8] расчеты проводились для такой геометрии, которая давала малое пропускание поля, а в [9], благодаря действию плазмонного механизма в металлизированном торце, проявлялась тенденция к увеличению интенсивности света на выходе.

Идею, связанную с использованием поверхностных волн, распространяющихся по металлическим стенкам, развивали также авторы работ [12–14]. Они объединили этот подход с разработкой новой геометрии сужающегося волокна (так называемые двойной и тройной конус – наличие участков волокна с разными углами наклона стенок к оси). В результате ожидаемое значение коэффициента пропускания волокна повысилось от  $10^{-6} - 10^{-5}$  до  $10^{-2}$ . К тому же коэффициент пропускания, близкий к  $10^{-2}$ , был реально зарегистрирован в [14] для малых значений выходного диаметра (порядка 70 – 100 нм).

В работе [15] было дано приближенное аналитическое описание особенностей поведения волн в сужающихся волокнах и приведены численные оценки коэффициентов пропускания. В рамках адиабатического приближения (отвечающего медленному изменению поперечных размеров вдоль оси) в явном виде было учтено воздействие друг на друга встречных волн в волноводе, обусловленное наклоном стенок. Взаимодействие основных волн с волнами высших типов при этом не учитывалось, и были использованы приближенные граничные условия. Такой подход оправдан в условиях не слишком сильного наклона стенок (когда продольная компонента электрического поля составляет небольшой угол с поверхностью волновода). В работах [16–18] была получена точная система уравнений для поля в сужающемся металлизированном волноводе с субволновой апертурой, в которой рассматриваются волны со всеми поперечными индексами и их воздействие друг на друга. На основе этой системы было детально изучено поведение волн магнитного типа в волноводе, а также установлены и проанализированы зависимости коэффициента пропускания от геометрических параметров системы и длины волны излучения. При этом для волн электрического типа удалось получить лишь приближенные оценки.

В целом, однако, имеющиеся в литературе надежные численные расчеты охватывают сравнительно неболь-

Т.И.Кузнецова, В.С.Лебедев. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: tkuzn@mail.l.lebedev.ru, vlebedev@mail.l.lebedev.ru

шой набор значений геометрических параметров системы, что не позволяет дать определенного ответа на вопрос о достижении предельно высоких коэффициентов пропускания в металлизированных волокнах. Для получения более полной картины, касающейся поведения волн в сужающихся волокнах, представляется важным исследовать поля в конусе. Существующий математический аппарат позволяет в чистом виде выделять собственные волны, соответствующие конусу, т.е. задача не усложняется перекачкой выбранной волны в другие моды. При этом имеется возможность строго исследовать поля как магнитного, так и электрического типа.

В данной работе мы ограничимся рассмотрением конуса с идеально отражающими металлическими стенками, чтобы на примере достаточно простой системы, допускающей точное решение, получить строгую и детальную картину поведения полей в сужающихся оптических волокнах. Для определенности остановимся на исследовании основной волны электрического типа. Будет показано, что в рассматриваемом конусе можно достичь высоких плотностей энергии поля вблизи вершины. Значительная часть статьи посвящена исследованию усеченного конуса. Установлено, что в оптическом диапазоне при рассматриваемых геометрических параметрах наличие открытого конца волновода мало изменяет плотности энергии полей, рассчитанные для закрытого конуса. Это дает нам возможность утверждать, что простая коническая геометрия даже для достаточно малых значений выходной апертуры позволяет получать высокие коэффициенты пропускания.

## 2. Исходные уравнения

Рассмотрим круглый конус с углом при вершине  $\theta_0$ . Диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon$  внутри конуса постоянна и не равна единице. Будем считать, что на поверхность конуса нанесен слой идеального металла. Это приводит к условию равенства нулю тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности. Пусть  $r$  – расстояние от вершины конуса,  $\theta$  – полярный угол,  $\varphi$  – азимутальный угол. Рассмотрим монохроматическую зависимость полей от времени  $\exp(-i\omega t)$ , которую в дальнейшем для краткости будем опускать. Используя функцию Герца для электромагнитного поля, имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} U = 0. \quad (1)$$

Приведем выражения для компонент поля через функцию Герца [19]. Индексы у компонент поля  $E$  и  $H$  означают проекции на соответствующие оси сферической системы координат. Для волн электрического типа поля выражаются следующим образом:

$$E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} U, \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \varphi}, \quad (2)$$

$$H_r = 0, \quad H_\theta = -\frac{i\omega \varepsilon}{c} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad H_\varphi = \frac{i\omega \varepsilon}{c} \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}. \quad (3)$$

Граничное условие имеет вид  $U(\theta_0) = 0$ , а его выполнение обеспечивает равенство нулю тангенциальных компонент электрического поля:  $E_r(\theta_0) = 0$ ,  $E_\varphi(\theta_0) = 0$ . Напом-

ним, что  $\theta_0$  – полярный угол на поверхности конуса, т.е.  $2\theta_0$  – угол раскрытия конуса.

В случае волн магнитного типа функция Герца удовлетворяет прежнему уравнению (1). Связь полей (индекс  $m$ ) с функцией Герца можно получить из (2) и (3) с помощью следующей замены компонент поля:  $E_j \rightarrow H_j^{(m)}$  и  $H_j \rightarrow \varepsilon E_j^{(m)}$ . Граничное условие в случае волн магнитного типа имеет вид  $\partial U / \partial \theta |_{\theta=\theta_0} = 0$ , а его выполнение приводит к обращению в нуль тангенциальной компоненты электрического поля на поверхности конуса:  $E_\varphi^{(m)}(\theta_0) = 0$ .

Метод разделения переменных дает для уравнения (1) решения вида

$$U(r, \theta, \varphi) = \mathcal{R}(r) P_v^m(\cos \theta) \exp(im\varphi), \quad (4)$$

$$\mathcal{R}(r) = C \sqrt{r} J_{v+1/2} \left( \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} r \right),$$

где  $J_{v+1/2}$  – функция Бесселя порядка  $v + 1/2$ ;  $P_v^m$  – присоединенная функция Лежандра [20] первого рода степени  $v$  порядка  $m$  ( $m$  – целое число). Граничные условия для волн электрического и магнитного типов соответственно приобретают при этом следующий вид:

$$P_v^m(\cos \theta_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial P_v^m(\cos \theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} = 0. \quad (5)$$

Приведем результаты расчета низших собственных значений для  $E$ -волны с  $m = 0$  и для  $H$ -волн с  $m = 0$  и  $m = 1$  при разных углах раскрытия конуса. Эти волны просачиваются через сужающийся волновод более эффективно, чем волны высших порядков (по аналогии с тем, что известно для цилиндрического волновода). Результаты расчета приведены в табл.1. Видно, что увеличение угла раскрытия конуса  $2\theta_0$  приводит к резкому уменьшению наименьших собственных значений  $v_1$  для всех трех типов собственных волн в волноводе конической формы. Это означает, что при больших  $\theta_0$  волны будут более эффективно просачиваться через сужающийся волновод. В то же время при заданном значении угла обращают на себя внимание весьма существенные различия в значениях  $v_1$  для волн электрического и магнитного типов. Для получения меньшего пространственного затухания поля на выходе усеченного конуса наиболее предпочтительно использование волн электрического типа с азимутальным волновым числом  $m = 0$  и волн магнитного типа с  $m = 1$ . Дальнейшее рассмотрение будет проводиться только для волны электрического типа с  $m = 0$ .

Табл.1. Наименьшие собственные значения  $v_1$  для  $E$ - и для  $H$ -волн при различных значениях угла  $\theta_0$  ( $2\theta_0$  – угол раскрытия конуса).

Тип волны	$m$	$\theta_0$ (рад)					
		$\pi/24$	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$E$	0	17.869	8.681	4.083	2.548	1.777	1
$H$	0	28.776	14.147	6.835	4.405	3.196	2
$H$	1	13.591	6.584	3.120	2.000	1.468	1

## 3. Радиальные зависимости плотности электромагнитной энергии в конусе

В случае волны электрического типа с  $m = 0$  отличными от нуля будут три компоненты поля (см. (2)–(4)):

$$E_r = \frac{v(v+1)}{r^2} \mathcal{R}(r) P_v(\cos \theta), \quad E_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{R}(r)}{\partial r} \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta}, \quad \times \left[ \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]^2, \quad (13)$$

$$H_\phi = \frac{i\omega\varepsilon}{c} \frac{\mathcal{R}(r)}{r} \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta}. \quad (6)$$

$$|H_\phi(r \rightarrow 0)|^2 = 4\varepsilon C^2 \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2c} r \right)^{2v} \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2c} \right)^3 \frac{1}{\Gamma^2(v+3/2)} \times \left[ \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]^2. \quad (14)$$

Рассмотрим зависимость квадратов указанных компонент от радиальной координаты  $r$ . Для каждой из компонент введем величину, соответствующую плотности электромагнитной энергии, усредненной по времени:

$$w_r = \frac{\varepsilon}{8\pi} \langle [\text{Re}\{E_r \exp(-i\omega t)\}]^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} |E_r|^2, \quad w_\theta = \frac{\varepsilon}{8\pi} \langle [\text{Re}\{E_\theta \exp(-i\omega t)\}]^2 \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} |E_\theta|^2, \quad (7)$$

$$w_\phi = \frac{1}{8\pi} \langle [\text{Re}\{H_\phi \exp(-i\omega t)\}]^2 \rangle = \frac{1}{16\pi} |H_\phi|^2.$$

Введем далее интегралы от величин  $w_r$ ,  $w_\theta$ ,  $w_\phi$  по участку поверхности сферы радиусом  $r$ , заключенному внутри конуса

$$W_r = 2\pi r^2 \int_0^{\theta_0} w_r(r, \theta) \sin \theta d\theta, \quad W_\theta = 2\pi r^2 \int_0^{\theta_0} w_\theta(r, \theta) \sin \theta d\theta, \quad (8)$$

$$W_\phi = 2\pi r^2 \int_0^{\theta_0} w_\phi(r, \theta) \sin \theta d\theta.$$

Эти величины позволяют проследить за изменением усредненных по углу плотностей энергии различных компонент поля в зависимости от координаты  $r$ . При  $r \rightarrow \infty$  и  $r \rightarrow 0$  для полей можно воспользоваться асимптотическими разложениями функций Бесселя, что сразу даст представление о радиальной зависимости квадратичных по полю величин. При  $r \rightarrow \infty$  имеем

$$|E_r(r \rightarrow \infty)|^2 = \frac{2C^2}{\pi} \frac{c}{\omega\sqrt{\varepsilon}} \frac{[v(v+1)]^2}{r^4} \sin^2 \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{c} r - \frac{\pi}{2} v \right) \times [P_v(\cos \theta)]^2, \quad (9)$$

$$|E_\theta(r \rightarrow \infty)|^2 = \frac{2C^2}{\pi} \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{c} \frac{1}{r^2} \cos^2 \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{c} r - \frac{\pi}{2} v \right) \times \left[ \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]^2, \quad (10)$$

$$|H_\phi(r \rightarrow \infty)|^2 = \frac{2C^2}{\pi} \frac{\omega\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{c} \frac{1}{r^2} \sin^2 \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{c} r - \frac{\pi}{2} v \right) \times \left[ \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]^2. \quad (11)$$

Характер спада полей вблизи вершины конуса ( $r \rightarrow 0$ ) определяется выражениями

$$|E_r(r \rightarrow 0)|^2 = C^2 \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2c} r \right)^{2v-2} \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2c} \right)^3 \left[ \frac{v(v+1)}{\Gamma(v+3/2)} \right]^2 \times [P_v(\cos \theta)]^2, \quad (12)$$

$$|E_\theta(r \rightarrow 0)|^2 = C^2 \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2c} r \right)^{2v-2} \left( \frac{\omega\sqrt{\varepsilon}}{2c} \right)^3 \left[ \frac{v+1}{\Gamma(v+3/2)} \right]^2$$

Из формул (12)–(14) следует, что наименее интенсивной при малых  $r$  является компонента  $H_\phi$ . При больших расстояниях от вершины конуса имеет место быстрое убывание компоненты  $E_r$  с ростом  $r$  (см. (9)–(11)). Поэтому если ввести интегральную плотность энергии  $W_{\text{tot}}$ , просуммированную по всем компонентам поля,

$$W_{\text{tot}}(r) = W_r(r) + W_\theta(r) + W_\phi(r), \quad (15)$$

то при  $r \rightarrow \infty$  будем иметь  $W_{\text{tot}}(\infty) = W_\theta(\infty) + W_\phi(\infty)$ . С помощью (10) и (11) получаем

$$W_{\text{tot}}(\infty) = \frac{C^2}{4\pi} \frac{\omega\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{c} \int_0^{\theta_0} \left[ \frac{\partial P_v(\cos \theta)}{\partial \theta} \right]^2 \sin \theta d\theta. \quad (16)$$

На величину, полученную из (16), удобно нормировать все рассматриваемые интегральные плотности энергии, т. е. функции  $W_r$ ,  $W_\theta$  и  $W_\phi$ . Будем также рассматривать по отдельности интегральные плотности энергии электрической и магнитной компонент поля. Соответствующие нормированные величины имеют следующий вид:

$$P_r(r) = \frac{W_r(r)}{W_{\text{tot}}(\infty)}, \quad P_\theta(r) = \frac{W_\theta(r)}{W_{\text{tot}}(\infty)}, \quad (17)$$

$$P_{\text{el}}(r) = P_r(r) + P_\theta(r),$$

$$P_{\text{m}}(r) \equiv P_\phi(r) = \frac{W_\phi(r)}{W_{\text{tot}}(\infty)}, \quad P_{\text{tot}}(r) = P_{\text{el}}(r) + P_{\text{m}}(r). \quad (18)$$

На рис. 1 приведены усредненные по углу интегральные плотности энергии радиальной ( $P_r$ ) и полярной ( $P_\theta$ ) компонент электрического поля в конусе в зависимости

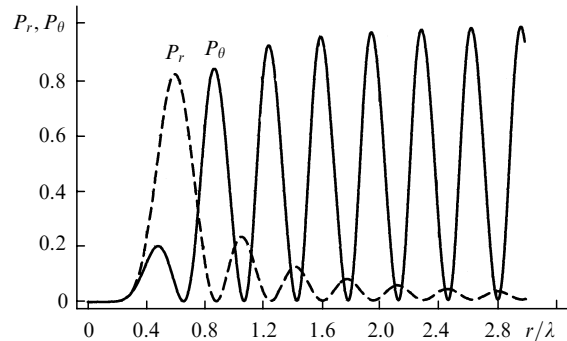


Рис. 1. Проинтегрированные по сферической поверхности нормированные плотности энергии радиальной ( $P_r$ ) и полярной ( $P_\theta$ ) компонент электрического поля в конусе в зависимости от координаты  $r$ , отсчитанной от его вершины;  $P_r = W_r/W_{\text{tot}}(\infty)$  и  $P_\theta = W_\theta/W_{\text{tot}}(\infty)$  – отношения компонент  $W_r$  и  $W_\theta$  к интегральной плотности полной энергии  $W_{\text{tot}}$  на входе в волновод ( $r \rightarrow \infty$ ) для наименьшей волны ( $\lambda = 500$  нм) электрического типа с  $m = 0$  в конусе ( $\varepsilon = 2.25$ ) с углом раскрытия  $2\theta_0$  ( $\theta_0 = \pi/6$ ,  $v_1 = 4.084$ ).

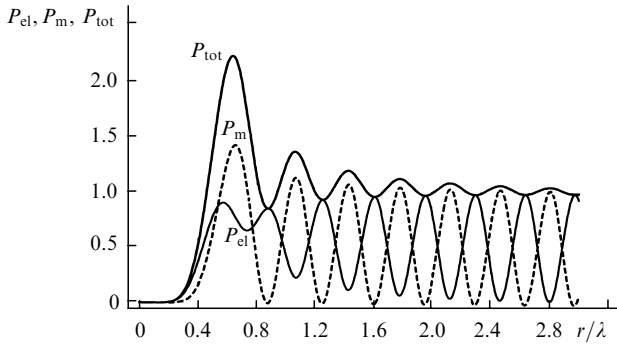


Рис.2. То же, что и на рис.1, для интегральных плотностей электрической ( $P_{el} = P_r + P_\theta$ , сплошная кривая) и магнитной ( $P_m(r) \equiv P_\phi(r)$ , штриховая кривая) энергий. Верхняя кривая – зависимость интегральной плотности  $P_{tot} = P_{el} + P_m$  от координаты  $r$  с учетом вкладов электрического и магнитного полей.

от координаты  $r$ . Обращают на себя внимание малые значения интегральной плотности энергии радиальной компоненты поля  $P_r$  при удалении от вершины конуса на расстояния  $r$ , превышающие длину волны. Это находится в соответствии с асимптотическими выражениями (9)–(11). Зависимости интегральной плотности энергии электрического поля  $P_{el} = P_r + P_\theta$ , а также магнитного поля  $P_m = P_\phi$  от координаты  $r$  представлены на рис.2. Видно, что кривые, соответствующие магнитной и электрической энергиям, находятся в противофазе и что при малых  $r$  спад интегральной плотности энергии электрического поля происходит значительно медленнее, чем магнитного. На рис.2 показана также зависимость интегральной плотности полной энергии электрического и магнитного полей  $P_{tot} = P_{el} + P_m$  в конусе от координаты  $r$ . В соответствии с выбранной нормировкой безразмерная величина  $P_{tot}$  достаточно быстро достигает единицы (при  $r > \lambda$ ). Отметим, что с приближением к вершине конуса, прежде чем начнется резкое затухание, наблюдается характерный пик  $P_{tot}$  от  $r$ . Расчеты показывают, что величина этого пика существенно зависит от угла раскрытия конуса, возрастаая при малых углах.

#### 4. Эффекты отражения на границе усеченного конуса и свободного пространства

Выше были рассмотрены свойства электромагнитных волн в невозмущенном конусе. В реальных условиях конус должен быть усеченным, т. е. участок вблизи вершины должен быть удален. При расчете плотностей энергии полей на выходной апертуре субволнового диаметра в нулевом приближении можно считать, что в этом случае структура полей не изменяется. В действительности же поля не остаются неизменными, и в данном разделе будет оценен масштаб возникающих возмущений.

Будем считать, что часть объема конуса отсечена плоскостью, перпендикулярной оптической оси. Введем здесь цилиндрическую систему координат  $(\rho, \phi, z)$ , причем так, чтобы точка  $(\rho = 0, z = 0)$  совпадала с центром сферической системы  $(r = 0)$ . Пусть плоскость, отсекающая вершину конуса, задается уравнением  $z = z_0$ . При этом выходная апертура имеет радиус  $a = z_0 \tan \theta_0$ . Допустим, что при  $\rho > a, z = z_0$  находится идеально проводящая поверхность (конус переходит во фланец, уходящий на бесконечность). Задача состоит в том, чтобы скрыть на апертуре поля в конусе с полями свободного

полупространства. Для строгого решения задачи требуется в качестве поля в конусе взять бесконечную суперпозицию различных собственных волн, а в пустом пространстве – непрерывный набор цилиндрически симметричных волн. Возьмем функцию Герца в конусе в виде

$$U^{(c)} = C\sqrt{r}J_{v+1/2}\left(\frac{\omega\sqrt{\epsilon}r}{c}\right)P_v(\cos\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sqrt{r}H_{v_n+1/2}^{(1)}\left(\frac{\omega\sqrt{\epsilon}r}{c}\right)P_{v_n}(\cos\theta). \quad (19)$$

В выражении (19) входят волны со всеми возможными собственными числами ( $v_1$  совпадает с  $v$ ), причем для всех  $v_n \neq v$  берутся только волны, уходящие от центра, поскольку на конус падает лишь волна с  $v_n = v$ . Все компоненты полей в конусе теперь выражаются через новую функцию Герца (19) с помощью прежних формул (см. (6)), в которых нужно заменить  $E_r, E_\theta, H_\phi$  и  $U$  на  $E_r^{(c)}, E_\theta^{(c)}, H_\phi^{(c)}$  и  $U^{(c)}$ . От полей  $E_r^{(c)}$  и  $E_\theta^{(c)}$  нужно перейти к компонентам  $E_\rho^{(c)}$  и  $E_z^{(c)}$  с помощью соотношений

$$E_\rho^{(c)} = E_r^{(c)} \sin \theta + E_\theta^{(c)} \cos \theta, E_z^{(c)} = E_r^{(c)} \cos \theta - E_\theta^{(c)} \sin \theta. \quad (20)$$

Для значений этих полей на выходном отверстии введем специальные обозначения:

$$\phi(\rho) = E_\rho^{(c)}\left(r = (\rho^2 + z_0^2)^{1/2}, \cos \theta = \frac{z_0}{(\rho^2 + z_0^2)^{1/2}}\right), \quad (21)$$

$$\psi(\rho) = E_z^{(c)}\left(r = (\rho^2 + z_0^2)^{1/2}, \cos \theta = \frac{z_0}{(\rho^2 + z_0^2)^{1/2}}\right). \quad (22)$$

Компоненты поля в свободном пространстве обозначим через  $E_\rho^{(0)}$  и  $E_z^{(0)}$ .

На границе усеченного конуса со свободным пространством должны выполняться условия непрерывности тангенциальной компоненты электрического поля и нормального компоненты электрической индукции

$$E_\rho^{(0)} = E_\rho^{(c)}, \quad E_z^{(0)} = \epsilon E_z^{(c)} \quad (z = z_0, 0 \leq \rho < a). \quad (23)$$

Кроме того, вследствие идеальной проводимости фланца должно выполняться условие

$$E_\rho^{(0)} = 0 \quad (z = z_0, \rho > a). \quad (24)$$

Представим поле  $E_z^{(0)}$  в виде интеграла Фурье–Бесселя с коэффициентами разложения  $A(\kappa)$ :

$$E_z^{(0)}(\rho, z) = \int_0^\infty A(\kappa)J_0(\kappa\rho) \times \exp\left[-i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2}(z - z_0)\right] \kappa d\kappa, \quad (25)$$

где  $\kappa$  – непрерывная переменная. Приведенная зависимость от  $z$  следует из уравнения Гельмгольца, которому должна подчиняться компонента  $E_z^{(0)}$ . Отметим, что при  $\kappa^2 > \omega^2/c^2$  фактор  $-i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2}$  в (25) и во всех аналогичных формулах должен быть заменен на  $(\kappa^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}$ . Такой выбор знака радикала определяется требованием, чтобы каждая составляющая поля  $E_z^{(0)}$  либо представляла собой уходящую на  $-\infty$  (т.е. от конуса) волну, либо затухала на  $-\infty$ .

Расчет производной  $\partial E_z^{(0)}/\partial z$  с помощью (25) и использование условия  $\text{div } \mathbf{E}^{(0)} = 0$  дает

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho^{(0)}) = \frac{\partial E_z^{(0)}}{\partial z} = \int_0^\infty \left[ -i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2} \right] \times A(\kappa) J_0(\kappa \rho) \exp \left[ -i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2} (z - z_0) \right] \kappa d\kappa. \quad (26)$$

Кроме того, из соотношений (21), (23) и (24) имеем

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho^{(0)}) \Big|_{z=z_0} = \begin{cases} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} [\rho \phi(\rho)] & (0 \leq \rho < a), \\ 0 & (\rho > a). \end{cases} \quad (27)$$

Отсюда находим выражение для коэффициента разложения Фурье – Бесселя

$$A(\kappa) = \frac{-1}{-i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2}} \int_0^a \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' \phi(\rho')] J_0(\kappa \rho') d\rho'. \quad (28)$$

После этого из разложения (25) находим

$$E_z^{(0)}(\rho, z) = - \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa \rho)}{-i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2}} \exp \left[ -i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2} (z - z_0) \right] \kappa d\kappa \times \int_0^a \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' \phi(\rho')] J_0(\kappa \rho') d\rho'. \quad (29)$$

Полагая далее  $z = z_0$  и меняя в (29) порядок интегрирования, получаем

$$E_z^{(0)}(\rho) \Big|_{z=z_0} = - \int_0^a \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' \phi(\rho')] d\rho' \times \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa \rho) J_0(\kappa \rho') \kappa d\kappa}{-i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2}}. \quad (30)$$

Пользуясь рекуррентными соотношениями для цилиндрических функций, делаем замену  $\kappa \rho' J_0(\kappa \rho') = \partial [\rho' J_1(\kappa \rho')]/\partial \rho'$  в подынтегральном выражении и приводим (30) к виду

$$E_z^{(0)}(\rho) \Big|_{z=z_0} = - \int_0^a \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' \phi(\rho')] \right\} \times \left\{ \frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' L(\rho, \rho')] \right\} d\rho', \quad (31)$$

$$L(\rho, \rho') = \int_0^\infty \frac{J_0(\kappa \rho) J_1(\kappa \rho') d\kappa}{-i(\omega^2/c^2 - \kappa^2)^{1/2}}. \quad (32)$$

Используя далее интегрирование по частям, получаем из (31)

$$E_z^{(0)}(\rho) \Big|_{z=z_0} = - \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' \phi(\rho')] L(\rho, \rho') \right\} \Big|_{\rho'=a} + \int_0^a \frac{\partial}{\partial \rho'} \left\{ \frac{1}{\rho'} \frac{\partial}{\partial \rho'} [\rho' \phi(\rho')] \right\} L(\rho, \rho') \rho' d\rho'. \quad (33)$$

Перепишем (33) в виде  $E_z^{(0)} \Big|_{z=z_0} = \hat{L} \phi(\rho)$ , где оператор  $\hat{L}$  определяется формулами (32), (33). Это выражение следует подставить в левую часть второго граничного усло-

вия в (23), а в его правую часть – поле  $E_z^{(c)} \Big|_{z=z_0}$ , вычисленное непосредственно по значениям полей  $E_r^{(c)}$  и  $E_\theta^{(c)}$  в конусе. При этом получим

$$\chi(\rho) \equiv \hat{L} \phi(\rho) \equiv \varepsilon \psi(\rho). \quad (34)$$

Это уравнение содержит коэффициенты  $C$  и  $C_n$  ( $n = 1, 2, \dots, \infty$ ), которые подлежат определению и для которых можно получить из (33) линейную систему уравнений. Предположим, что из всех коэффициентов  $C_n$  наибольшим является  $C_1$ , а остальные отбросим. Используя такое упрощение, представим функцию Герца в виде

$$U^{(c)} = C \sqrt{r} \left[ (1 + \beta) J_{v+1/2} \left( \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} r \right) + i \beta Y_{v+1/2} \left( \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} r \right) \right] \times P_v(\cos \theta) \equiv C \sqrt{r} \left[ \frac{1}{2} H_{v+1/2}^{(2)} \left( \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} r \right) + \frac{1 + 2\beta}{2} H_{v+1/2}^{(1)} \left( \frac{\omega \sqrt{\varepsilon}}{c} r \right) \right] P_v(\cos \theta). \quad (35)$$

Здесь  $Y_{v+1/2}(x)$  – функция Неймана;  $H_{v+1/2}^{(1)}(x)$  и  $H_{v+1/2}^{(2)}(x)$  – функции Ханкеля первого и второго рода. В это выражение кроме общей произвольной постоянной  $C$  входит одна подлежащая определению константа  $-\beta$ . При  $\beta = 0$  функция (35) переходит в прежнюю функцию Герца усеченного конуса (1). Если константа  $\beta$  отлична от нуля, то она дает различие амплитуд волн, идущих к центру и от центра. Отношение амплитуд при функциях  $H_{v+1/2}^{(1)}(x)$  и  $H_{v+1/2}^{(2)}(x)$  естественно назвать коэффициентом отражения  $R$ . Величиной  $2\beta$  определяется отличие коэффициента отражения усеченного конуса от единицы, т. е.

$$R = 1 + 2\beta. \quad (36)$$

Важным обстоятельством является то, что амплитуда приходящей из  $+\infty$  волны является неизменной при различных значениях  $\beta$ . Процедура нахождения константы  $\beta$  состоит в вычислении полей в конусе и в свободном пространстве,  $E_\rho^{(c)}$ ,  $E_z^{(c)}$  и  $E_z^{(0)}$ , и в минимизации разности  $(E_z^{(c)} - (1/\varepsilon) E_z^{(0)}) \Big|_{z=z_0}$  (см. второе граничное условие в (23)).

Из выражения (35) для функции Герца, используя формулы (6), (20) для полей в конусе и первое соотношение в (23), получаем

$$\phi(\rho) = (1 + \beta) \phi_B(\rho) + i \beta \phi_N(\rho). \quad (37)$$

В этом выражении явно выделены вклады в  $\phi(\rho)$  от цилиндрической функции Бесселя,  $\phi_B(\rho)$ , и цилиндрической функции Неймана,  $\phi_N(\rho)$ . Вычисления по формуле (33) дают соответствующую комбинацию вкладов функций Бесселя и Неймана в поле  $E_z^{(0)} \Big|_{z=z_0}$ , которую мы обозначим  $\chi(\rho) = E_z^{(0)} \Big|_{z=z_0}$  и запишем в виде

$$\chi(\rho) \equiv (1 + \beta) \chi_B(\rho) + i \beta \chi_N(\rho), \quad \chi_{B,N}(\rho) = \hat{L} \phi_{B,N}(\rho). \quad (38)$$

Вычисление поля  $E_z^{(c)}$  внутри конуса также приводит к линейной комбинации вкладов функций Бесселя и Неймана. Поэтому значение  $E_z^{(c)}$  на выходной апертуре (см. второе соотношение в (20)) будет иметь вид

$$\psi(\rho) = (1 + \beta) \psi_B(\rho) + i \beta \psi_N(\rho). \quad (39)$$

Условие сопряжения  $z$ -компонент электрических полей внутри и снаружи конуса (см. второе соотношение в (23)) не будет выполняться точно, т. к. мы отбросили в выражении (19) все высшие волны с  $v_n \neq v$ . Задача состоит в минимизации разности  $\psi(\rho) - (1/\varepsilon)\chi(\rho)$ . Потребуем, чтобы интеграл

$$I = \int_0^a \left| \psi(\rho) - \frac{1}{\varepsilon} \chi(\rho) \right|^2 \rho d\rho \tag{40}$$

достигал минимума, и из этого требования определим коэффициент  $\beta$ , а затем и  $R$  (см. (36)).

Подставим (38) и (39) в (40). В результате получим

$$I = (1 + \beta)(1 + \beta^*)I_B + \beta\beta^*I_N - i\beta^*(1 + \beta)I_{BN} + i\beta(1 + \beta^*)I_{BN}^* \tag{41}$$

$$I_B = \int_0^a \left| \psi_B(\rho) - \frac{1}{\varepsilon} \chi_B(\rho) \right|^2 \rho d\rho,$$

$$I_N = \int_0^a \left| \psi_N(\rho) - \frac{1}{\varepsilon} \chi_N(\rho) \right|^2 \rho d\rho, \tag{42}$$

$$I_{BN} = \int_0^a \left[ \psi_B(\rho) - \frac{1}{\varepsilon} \chi_B(\rho) \right] \left[ \psi_N^*(\rho) - \frac{1}{\varepsilon} \chi_N^*(\rho) \right] \rho d\rho.$$

Дифференцируя (41) по  $\beta^*$ , находим условие минимума величины  $I$  в виде

$$\beta = - \frac{I_B - iI_{BN}}{I_B + I_N + i(I_{BN}^* - I_{BN})}. \tag{43}$$

В результате численных расчетов в работе были определены значения  $\beta$  и по формуле (36) – соответствующие коэффициенты отражения  $R$  (см. табл.2) для ряда значений выходного радиуса  $a$  и угла раскрытия конуса  $2\theta_0$ . Расчеты выполнены для длины волны  $\lambda = 500$  нм при  $\varepsilon = 2.25$ . Видно, что во всех рассмотренных случаях коэффициенты отражения мало отличаются от единицы. Это означает, что решение в виде функции Бесселя (стоячая волна в радиальной зависимости), рассмотренное в разд.2, является хорошим приближением для поля в усеченном конусе. Отметим, что заранее не было ясно, какое соотношение между амплитудами входящей и уходящей волн (функции  $H_{v+1/2}^{(2)}$  и  $H_{v+1/2}^{(1)}$ ) адекватно свойствам открытого (т. е. усеченного) конуса.

На основе представленных расчетов можно сделать вывод, что амплитуды входящей и уходящей волн практически одинаковы для выходных радиусов, лежащих в диапазоне от нуля до  $\lambda/10$ . Нами были проведены расчеты не только для приведенных в табл.2, но и для больших значений выходной апертуры. Было установлено, что при  $\lambda = 500$  нм,  $\theta_0 = \pi/3$  и  $a \sim \lambda/2$  действительная часть амплитудного коэффициента отражения уже значительно отличается от единицы, следовательно, при  $a > \lambda/2$  можно ожидать, что поля в закрытом и усеченном конусах будут иметь существенно различный вид.

Другой вопрос, относящийся к виду поля в усеченном конусе, связан со вкладом в решение высших волн. Чтобы оценить погрешность решения, не учитывающего высшие моды, мы оценили разность  $E_z^{(c)}$  и  $(1/\varepsilon)E_z^{(0)}$  на

Табл.2. Амплитудный коэффициент отражения  $R$  световых волн ( $\lambda = 500$  нм) на границе усеченного конуса ( $\varepsilon = 2.25$ ) со свободным пространством и относительная погрешность  $\delta$  (см. (44)) при разных значениях угла  $\theta_0$  и радиуса  $a$  выходного отверстия.

$a$ (нм)	$\theta_0$ (рад)	$1 - \text{Re}\{R\}$	$\text{Im}\{R\}$	$\delta$
12.5	$\pi/12$	$2.82 \times 10^{-18}$	$-7.80 \times 10^{-18}$	0.059
	$\pi/6$	$2.58 \times 10^{-10}$	$-8.94 \times 10^{-10}$	0.044
	$\pi/4$	$7.02 \times 10^{-8}$	$-3.35 \times 10^{-7}$	0.118
	$\pi/3$	$4.81 \times 10^{-7}$	$-3.45 \times 10^{-6}$	0.310
25	$\pi/12$	$1.65 \times 10^{-12}$	$-2.52 \times 10^{-12}$	0.081
	$\pi/6$	$2.76 \times 10^{-7}$	$-5.20 \times 10^{-7}$	0.069
	$\pi/4$	$9.17 \times 10^{-6}$	$-2.36 \times 10^{-5}$	0.143
	$\pi/3$	$2.22 \times 10^{-5}$	$-8.61 \times 10^{-5}$	0.329
35	$\pi/12$	$9.33 \times 10^{-10}$	$-1.14 \times 10^{-9}$	0.108
	$\pi/6$	$7.66 \times 10^{-6}$	$-1.14 \times 10^{-5}$	0.101
	$\pi/4$	$9.40 \times 10^{-5}$	$-1.90 \times 10^{-4}$	0.173
	$\pi/3$	$1.42 \times 10^{-4}$	$-4.29 \times 10^{-4}$	0.353
50	$\pi/12$	$6.30 \times 10^{-7}$	$-6.76 \times 10^{-7}$	0.165
	$\pi/6$	$2.34 \times 10^{-4}$	$-2.99 \times 10^{-4}$	0.165
	$\pi/4$	$1.04 \times 10^{-3}$	$-1.76 \times 10^{-3}$	0.235
	$\pi/3$	$1.00 \times 10^{-3}$	$-2.47 \times 10^{-3}$	0.402

апертуре. При этом для грубой, заведомо завышенной оценки были взяты поля нулевого приближения (не содержащие вклада от функции Неймана). Средний квадрат этой разности, отнесенный к среднему по апертуре квадрату поля, рассчитанного для конуса, мы и будем считать относительной погрешностью  $\delta$  вычисленных в разд.2 величин:

$$\delta = \frac{1}{N_B} \int_0^a \left| \psi_B(\rho) - \frac{1}{\varepsilon} \chi_B(\rho) \right|^2 \rho d\rho, \quad N_B = \int_0^a |\psi_B(\rho)|^2 \rho d\rho. \tag{44}$$

Из табл.2 видно, что погрешность мала для малых углов раскрытия конуса  $2\theta_0$ . По мере увеличения угла  $\theta_0$  она возрастает и при  $\theta_0 = \pi/3$  достигает 0.3–0.4. В такой ситуации для более точного расчета отражения следует учитывать вклад высших мод в соответствии с намеченной в начале данного раздела общей схемой вычислений (см. формулы (19)–(34)).

### 5. Коэффициент пропускания усеченного конуса с апертурой субволнового размера

Особый интерес для приложений представляет коэффициент пропускания  $T$  сужающегося оптического волновода. Мы определяем его как отношение полной плотности энергии поля на выходе усеченного конуса  $P_{\text{tot}}^{\text{out}} = P_{\text{tot}}(r_{\text{out}})$ , проинтегрированной по сферической поверхности  $r = r_{\text{out}}$ ,  $0 \leq \theta \leq \theta_0$ , к половине интегральной плотности полной энергии на входе конуса  $P_{\text{tot}}^{\text{in}} = (1/2)P_{\text{tot}}(\infty)$ . Фактор 1/2 введен для того, чтобы учесть вклад, связанный только со входным потоком, и исключить из полного потока отраженную волну. Наши расчеты выполнены для набора значений выходного радиуса  $a$  и угла  $\theta_0$ , причем для каждого варианта  $r_{\text{out}} = a/\sin \theta_0$ .

На рис.3 приведены зависимости коэффициента пропускания  $T$  усеченного конуса с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 2.25$  от длины световой волны  $\lambda$  для угла  $\theta_0 = \pi/6$  и  $a = 12.5, 25, 35, 50$  нм. Видно, что для заданных значений  $a$  и  $\theta_0$  коэффициент пропускания сильно уменьшается с ростом  $\lambda$  (очевидно, что короткие волны предпочтительнее). Уменьшение выходного радиуса  $a$  приво-

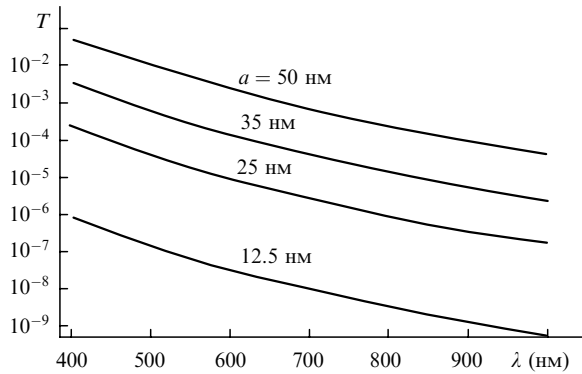


Рис.3. Зависимости коэффициента пропускания конического волновода  $T$  от длины волны  $\lambda$  для разных значений выходного радиуса  $a$  при  $\theta_0 = \pi/6$  ( $v_1 = 4.084$ ).

дит к резкому уменьшению коэффициента пропускания волокна. Из рассмотренных примеров наибольшие значения коэффициента пропускания реализуются при выходном радиусе  $a = 50$  нм и составляют 0.047 и 0.0092 при  $\lambda = 400$  и 500 нм соответственно. С уменьшением радиуса в два раза ( $a = 25$  нм) коэффициенты пропускания существенно падают и при этих же длинах волн оказываются равными  $2.4 \times 10^{-4}$  и  $4.1 \times 10^{-5}$ .

Результаты аналогичных расчетов зависимости коэффициента пропускания  $T$  от  $\lambda$  приведены на рис.4 для угла  $\theta_0 = \pi/3$ . Из сравнения рис.3 и 4 следует, что при одних и тех же значениях выходной апертуры и длины волны величины  $T$  резко возрастают при переходе к более тупым углам. В частности, при  $a = 50$  нм и  $\lambda = 400$  и 500 нм имеем соответственно  $T = 0.56$  и 0.28. В случае  $a = 25$  нм получаем  $T = 0.059$  и 0.027 при тех же  $\lambda$ . Таким образом, при одних и тех же значениях радиуса выходного отверстия происходит резкое увеличение пропускания конического волновода по сравнению со случаем  $\theta_0 = \pi/6$ . Следует подчеркнуть, что тенденция к уменьшению коэффициента пропускания с уменьшением выходной апертуры и угла наклона стенок волновода отмечалась ранее в литературе [9, 15]. Однако эти закономерности были надежно установлены лишь для таких условий, при которых пропускание волновода было весьма невысоким. Проведенное здесь исследование, основанное на модели, допускающей точное решение, позволило продвинуться в область более высоких коэффициентов пропускания и установить характер поведения величины  $T$  для широкой области геометрических параметров и во всем оптическом диапазоне длин волн.

## 6. Заключение

Таким образом, в настоящей работе проанализированы характеристики световых полей в металлизированном конусе. Построены зависимости выходной интенсивности излучения от геометрических параметров системы для целого набора вариантов, при которых выходная апертура имеет субволновые размеры. Впервые рассмотрены эффекты отражения света на субволновой апертуре усеченного конуса. Проведены расчеты коэффициентов пропускания рассматриваемой системы в оптическом диапазоне длин волн. Расчеты показывают, что при  $\lambda = 400$  нм коэффициенты пропускания  $T$  могут до-

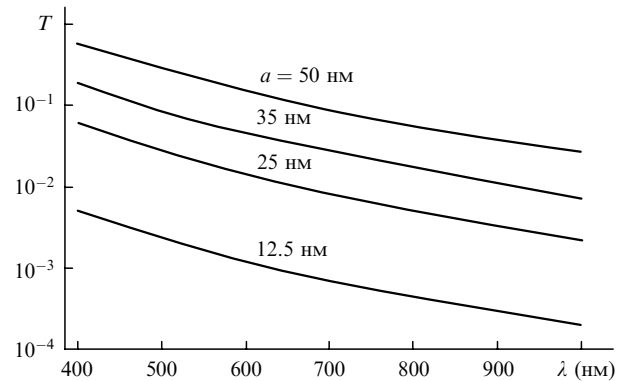


Рис.4. То же, что и на рис.3, при  $\theta_0 = \pi/3$  ( $v_1 = 1.777$ ).

стигать  $\sim 0.05 - 0.5$  при выходных апертурах  $2a \approx 50 - 100$  нм и больших углах раскрытия конуса ( $2\theta_0 = 2\pi/3$ ).

Из предварительного анализа следует, что в практических условиях для повышения выходных интенсивностей требуется улучшение входных характеристик поля (обеспечение сходящегося первоначально волнового фронта и симметричной поперечной структуры), а также уменьшение отражения на выходе за счет просветления или иного согласования выходного участка с характеристиками свободного пространства за выходной апертурой.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 00-02-17245) и программы «Оптическая спектроскопия и стандарты частоты» Отделения физических наук РАН.

1. Pohl D.W. *Thin Sol. Films*, **264**, 250 (1995).
2. Heinzelmann H., Lacoste Th., Huser Th., Güntherodt H.J., Hecht B., Pohl D.W. *Thin Sol. Films*, **273**, 149 (1996).
3. Islam M.N., Zhao X.K., Said A.A., Mickel S.S., Vail C.F. *Appl. Phys. Lett.*, **71**, 2886 (1997).
4. Eckert R., Freyland J.M., Gersen H., Heinzelmann H., Schürmann G., Noell W., Staufer U., de Rooij N.F. *Appl. Phys. Lett.*, **77**, 3695 (2000).
5. Palanker D.V., Simanovskii D.M., Huie P., Smith T.I. *J. Appl. Phys.*, **88**, 6808 (2000).
6. Roberts A. *J. Appl. Phys.*, **70**, 4045 (1991).
7. Novotny L., Pohl D.W., Regli P. *J. Opt. Soc. Am. A*, **11**, 1768 (1994).
8. Novotny L., Pohl D.W. In: *Photons and Local Probes*. Eds. O.Marti, R.Möller (Dordrecht: Kluwer, 1995, p. 21).
9. Novotny L., Pohl D.W., Hecht B. *Opt. Lett.*, **20**, 970 (1995).
10. Hafner Ch. *The Generalized Multiple Multipole Technique for Computational Electromagnetics* (Boston, MS: Artech, 1990).
11. Novotny L., Hafner C. *Phys. Rev. E*, **50**, 4094 (1994).
12. Yatsui T., Kouroggi M., Ohtsu M. *Appl. Phys. Lett.*, **71**, 1756 (1997).
13. Yatsui T., Kouroggi M., Ohtsu M. *Appl. Phys. Lett.*, **73**, 2090 (1998).
14. Yatsui T., Isumi K., Kouroggi M., Ohtsu M. *Appl. Phys. Lett.*, **80**, 2257 (2002).
15. Knoll B., Keilmann F. *Opt. Comm.*, **162**, 177 (1999).
16. Kuznetsova T.I., Lebedev V.S. *J. Russian Laser Research*, **22**, 123 (2001).
17. Kuznetsova T.I., Lebedev V.S. *J. Russian Laser Research*, **23**, 211 (2002).
18. Кузнецова Т.И., Лебедев В.С. *Квантовая электроника*, **32**, 727 (2002).
19. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1988).
20. Абрамовиц М., Стиган И. *Справочник по специальным функциям* (М.: Наука, 1979).