

Импульс-предвестник и частотная модуляция квазирезонансных импульсов самоиндуцированной прозрачности при наличии процессов необратимой релаксации

А.Л.Вершинин, А.Е.Дмитриев, О.М.Паршков

Проведено численное моделирование квазирезонансного взаимодействия лазерного импульса с неоднородно уширенным квантовым переходом при условиях, соответствующих эксперименту по изучению явления самоиндуцированной прозрачности в парах рубидия. Показано, что наблюдаемое на опыте смещение спектра импульса обусловлено начальной стадией образования импульса-предвестника и влиянием процессов необратимой релаксации. Установлено, что импульс-предвестник более устойчив по отношению к разрушающему действию релаксации, чем 2π-импульс, и возникает даже в том случае, когда площадь входного импульса недостаточна для образования 2π-импульса.

Ключевые слова: самоиндуцированная прозрачность, квазирезонанс, частотная модуляция, релаксационные процессы.

1. Введение

Открытие явления самоиндуцированной прозрачности (СИП) [1] стимулировало теоретические и экспериментальные исследования резонансного когерентного взаимодействия света с ансамблем двухуровневых квантовых объектов [2–4]. Изучение СИП в квазирезонансном случае, когда центральная частота входного импульса отличается от центральной частоты неоднородно уширенного квантового перехода, потребовало учета возможности частотной модуляции светового сигнала. Теория, развитая в работах [5–10], показала, что если площадь входного импульса превышает π , то, как и при строгом резонансе, в пределах больших расстояний происходит формирование одного или нескольких оптических солитонов, называемых 2π-импульсами. Оптические солитоны лишены частотной модуляции, однако в процессе их образования имеет место сдвиг центральной частоты излучения от центральной частоты квантового перехода. Кроме того, численный эксперимент [8] показал, что в процессе формирования одиночного 2π-импульса из входного импульса с площадью, лежащей в интервале $\pi - 2\pi$, возникает дополнительный импульс, названный авторами [8] импульсом-предвестником. Предвестник распространяется быстрее 2π-импульса, обладает значительной частотной модуляцией и исчезает в пределе бесконечных расстояний. Предвестник наблюдался в эксперименте [11], но его частотная модуляция не измерялась.

В эксперименте [12], признанном наиболее адекватным подтверждением теории СИП, было проведено измерение описанного выше сдвига центральной частоты спектра импульса от центральной частоты квантового перехода. Цель настоящей работы – показать, что данный частотный сдвиг обусловлен, с одной стороны, об-

разованием частотно-модулированного импульса-предвестника, а с другой – разрушением СИП процессами необратимой релаксации.

2. Исходные уравнения

В эксперименте [12] излучение ртутного лазера воздействовало на пары ^{87}Rb , находящиеся в постоянном магнитном поле, вектор напряженности которого был направлен вдоль распространения светового импульса. Эффект Зеемана создавал резонансный лазерному излучению квантовый переход с невырожденными уровнями энергии. Нижний уровень этого перехода являлся основным и отвечал состоянию $5s^2 S_{1/2} (M_J = -1/2, M_I = 3/2)$, а верхний – состоянию $5p^2 P_{1/2} (M_J = 1/2, M_I = 3/2)$, где M_J и M_I – квантовые числа проекций полных электронного и ядерного угловых моментов на направление постоянного магнитного поля. Обозначим данные уровни цифрами 1 и 2 соответственно. Между этими уровнями располагался уровень $5s^2 S_{1/2} (M_J = 1/2, M_I = 3/2)$, обозначаемый далее цифрой 3. В условиях рассматриваемого эксперимента процессы необратимой релаксации проявлялись только в виде спонтанных излучательных переходов атомов с уровня 2 на лежащие ниже уровни 3 и 1.

Выберем правый ортонормированный базис \mathbf{ijk} лабораторной системы координат xuz так, чтобы вектор \mathbf{k} располагался вдоль направления распространения лазерного импульса. Введем следующие обозначения:

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{x12} - ip_{y12}),$$

где p_{x12} и p_{y12} – x - и y -компоненты вектора электродипольного момента перехода 1–2; ω_{21}^0 – центральная частота неоднородно уширенной линии этого перехода; T – характерное время, определяющее плотность распределения частот ω_{21} переходов 1–2 отдельных атомов согласно формуле

$$g(\omega_{21}) = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \exp[-T^2(\omega_{21} - \omega_{21}^0)^2];$$

А.Л.Вершинин, А.Е.Дмитриев, О.М.Паршков. Саратовский государственный технический университет, Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77

T_{21} и T_{23} – времена жизни уровня 2 относительно спонтанных переходов на уровни 1 и 3 соответственно; T'_{21} – время поперечной релаксации перехода 1–2.

Напряженность поляризованного по кругу электрического поля, используемого в эксперименте [11], представим в виде

$$E = \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j})a(z, t) \exp \left[i\omega \left(\frac{z}{c} - t \right) \right] + \text{компл. сопр.}, \quad (1)$$

где $\mu = \hbar/(2^{3/2}T|p|)$; $a(z, t)$ и ω – комплексная огибающая и несущая частота лазерного импульса соответственно. Ввиду некоторой произвольности выбора частоты ω мы для определенности полагаем ее равной несущей частоте входного лазерного излучения.

Введем безразмерные независимые переменные

$$s = \alpha Tz, \quad w = \frac{t}{T} - \frac{s}{\beta}, \quad (2)$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi\omega|p|^2N}{c\hbar}; \quad \beta = \alpha T^2c;$$

N – суммарная концентрация атомов на уровнях 1 и 2 до прихода лазерного импульса. Введем также величины σ_{ik} ($i, k = 1, 2$):

$$\sigma_{21} = \sigma_{12}^* = \frac{2p}{|p|} \rho_{21} \exp \left[i\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right], \quad \sigma_{ii} = \rho_{ii},$$

где ρ_{ik} – элементы матрицы плотности в представлении Шредингера для двухуровневой квантовой системы, моделирующей атом ^{87}Rb . Используя первое приближение процедуры усреднения уравнений матрицы плотности [13] и укороченные уравнения Максвелла в первом приближении [14] теории дисперсии, получаем систему уравнений, описывающих взаимодействие импульса со средой:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial s} &= \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{21} \exp[-(\varepsilon - \varepsilon_0)^2] d\varepsilon, \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial w} + i\varepsilon \sigma_{21} &= ia(\sigma_{11} - \sigma_{22}) - \gamma \sigma_{21}, \\ \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial w} &= -\frac{1}{2} \text{Im}(a\sigma_{21}^*) - \delta \sigma_{22}, \\ \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial w} &= \frac{1}{2} \text{Im}(a\sigma_{21}^*). \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= T(\omega_{21}^0 - \omega), \quad \varepsilon = T(\omega_{21} - \omega), \\ \gamma &= \frac{T}{T'_{21}}, \quad \delta = T(T_{23}^{-1} + T_{21}^{-1}), \end{aligned} \quad (4)$$

причем параметр ε_0 характеризует степень отклонения несущей частоты входного лазерного излучения от центральной частоты квантового перехода. Слагаемые $-\gamma\sigma_{21}$ и $-\delta\sigma_{22}$ во втором и третьем уравнениях системы (3) введены для учета спонтанных переходов атомов с уровня 2 на уровни 1 и 3. Присутствие этих слагаемых отличает систему (3) от системы уравнений, численное решение

которой предсказало возможность образования импульса-предвестника [8]. С другой стороны, теория, основанная на системе (3) и представлении поля в виде (1), в отличие от теории работы [12], дает возможность учесть наводимую средой частотную модуляцию лазерного импульса.

Система (3) дополнялась граничным ($s = 0$) условием

$$a(s = 0, w) = a_0(w) \quad (w \geq 0), \quad (5)$$

где $a_0(w)$ – огибающая входного лазерного импульса. В качестве начальных условий ($w = 0$) рассматривались соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_{12}(s, w = 0) &= 0, \quad \sigma_{11}(s, w = 0) = 1, \\ \sigma_{22}(s, w = 0) &= 0 \quad (s \geq 0), \end{aligned} \quad (6)$$

соответствующие невозбужденному состоянию среды до прихода импульса излучения.

Краевая задача (3), (5), (6) решалась численно с помощью программы, представленной в работе [15]. Результаты расчета по этой программе хорошо согласуются с аналитическими выводами теории СИП [1] и теории нестационарного двойного резонанса [16]. Рассматриваемая задача при $\gamma = \delta = 0$ эквивалентна хорошо изученной задаче, описывающей СИП. Сопровождая каждый расчет, в котором γ и δ отличны от нуля, расчетом при $\gamma = \delta = 0$, мы имеем возможность тестировать полученные результаты путем сравнения их с аналитическими результатами теории СИП.

3. Параметры среды и характеристики входного импульса

Используя данные, приведенные в работе [12], мы выбрали для расчетов следующие значения параметров резонансного квантового перехода: $|p| = 6.16$ ед. СГСЭ, $\omega_{21}^0 = 2.37 \times 10^{15} \text{ c}^{-1}$, $T_{21} = 42 \text{ нс}$, $T_{23} = 84 \text{ нс}$, $T'_{21} = 56 \text{ нс}$. Ширина по полувысоте доплеровского контура перехода 1–2, равная 550 МГц, дает $T = 0.48 \text{ нс}$. С помощью (4) находим, что $\gamma = 8.6 \times 10^{-3}$, $\delta = 1.7 \times 10^{-2}$.

Для граничных условий (5) полагаем

$$a_0(w) = h \left[\exp\left(\frac{w - w_0}{\tau}\right) + \exp\left(-3 \frac{w - w_0}{\tau}\right) \right]^{-1}. \quad (7)$$

Безразмерные параметры h , τ и w_0 в (7) определяют высоту, длительность и положение на оси w входного лазерного импульса. Импульс (7) имеет несимметричную форму (близкую к форме импульсов, полученных в эксперименте [12]) с большей крутизной переднего фронта, чем заднего. Подбор параметра h позволяет обеспечить нужное значение площади входного импульса. При изменении параметра τ от 10 до 20 ширина по полувысоте функции $|a_0(w = t/T)|^2$, описывающей интенсивность лазерного импульса, лежит в пределах 5–10 нс. Входные импульсы такой длительности использовались в эксперименте [12].

Значения ряда параметров выбирались из разд. IV.8.2 работы [12], где приводятся результаты эксперимента в квазирезонансном случае. Например, при $(\omega - \omega_{21}^0)/2\pi = 0.7 \text{ ГГц}$ из (4) получаем $\varepsilon_0 = -2.1$. Согласно данным этого раздела, оценка величины $\alpha'L$ (где α' – коэффициент линейного поглощения на лазерной частоте, L – длина

кюветы с парами рубидия) оказалась порядка 7. В то же время максимальная концентрация атомов ^{87}Rb составляла примерно 10^{13} см^{-3} , тогда как максимальное L равнялось 10 мм. Используя первую из формул (2), можно сделать вывод, что соответствующее эксперименту безразмерное расстояние s приблизительно равно 100.

4. Способ представления результатов расчета

Результаты расчета приводятся в виде функций $A_s(w)$, $\varphi_s(w)$, $w_m(s)$ и $\Theta(s)$, где

$$A_s(w) = |a(w, s = \text{const})|, \quad \varphi_s(w) = \arg a(w, s = \text{const})$$

– действительная огибающая импульса и фазовая добавка к нему при фиксированном значении s ; $w_m(s)$ – зависимость от s значения w , при котором огибающая $A_s(w)$ достигает максимального значения A_{sm} ;

$$\Theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(w) dw$$

– зависимость от s площади под действительной огибающей. При этом величина $\Theta(0)$ является площадью под действительной огибающей входного лазерного импульса. Длительности импульсов характеризуются безразмерными величинами τ_1 и τ_2 , определяемыми как расстояния по оси w между точками, в которых функция $A_s(w) = 0.5A_{sm}$ и $\text{sech}(1)A_{sm}$ соответственно. В случае, когда деформация импульса при распространении незначительна, вводится в рассмотрение его скорость v в системе координат ws , задаваемая формулой $v = (dw_m/ds)^{-1}$. Для 2π -импульса величины τ_2 , A_{sm} и v связаны соотношениями

$$A_{sm} = \frac{4}{\tau_2}, \quad v = \sqrt{\pi} \left\{ \tau_2^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\varepsilon - \varepsilon_0)^2]}{4 + \tau_2^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \right\}^{-1}. \quad (8)$$

Эти соотношения применяются далее для обнаружения 2π -импульса в результатах численного эксперимента. Символ Δt обозначает ниже размерную длительность импульса, используемую в работе [12] и определяемую как промежуток времени между точками, в которых функция $A_s^2(w = t/T)$ достигает половины своего максимального значения.

Зависящий от s сдвиг $\Delta\nu$ центра спектра импульса относительно несущей частоты $\nu = \omega/2\pi$ входного излучения определяется формулой

$$\Delta\nu = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta F_s(\Delta) d\Delta \Big/ \int_{-\infty}^{\infty} F_s(\Delta) d\Delta. \quad (9)$$

Здесь $F_s(\Delta)$ – квадрат модуля фурье-образа функции $E/(\mu T)$ в точке $\omega - \Delta/T$ при фиксированном s . Если $\varepsilon_0 \Delta\nu > 0$ ($\varepsilon_0 \Delta\nu < 0$), то центральная частота спектра импульса смещена в направлении от резонанса (к резонансу) относительно несущей частоты входного лазерного импульса.

5. Результаты расчетов

Положим в (7) параметры $h = 0.223$, $\tau = 14$, $w_0 = 40$, что соответствует входному импульсу с $\Theta(0) = 1.1\pi$ и $\Delta t = 7$ нс. Выбор $\Theta(0)$ близким к π диктуется условиями эксперимента. На рис. 1, а–в представлены функции $A_s(w)$ и $\varphi_s(w)$ для $s = 100, 240, 360$. Значение $s = 100$ (см. рис. 1, а), как отмечалось ранее, соответствует условиям эксперимента. При $s = 100$ расчет дает $\Delta t = 19.3$ нс, что почти втрое превышает длительность входного импульса, тогда как $\Delta\nu = -12$ МГц (отрицательность $\Delta\nu$ означает отталкивание центра спектра импульса от резонанса). Эти результаты находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными разд. IV.8.2 работы [12]. На рис. 1, б, в приведены результаты расчетов на расстояниях, значительно превышающих экспериментальные.

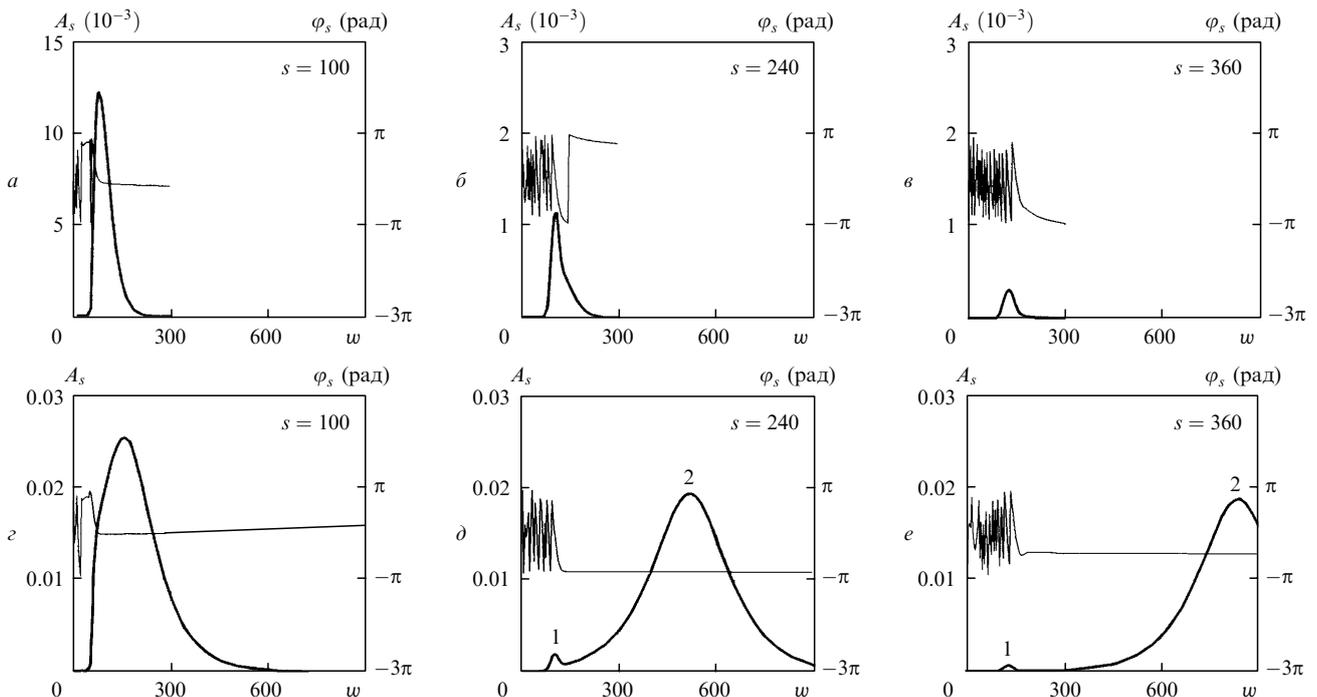


Рис. 1. Действительные огибающие A_s (толстые кривые) и фазовые добавки φ_s (тонкие кривые) для различных расстояний s при площади входного импульса 1.1π в присутствии (а–в) и в отсутствие (з–е) релаксационных процессов.

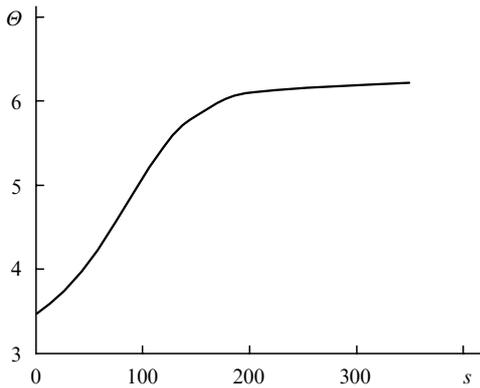


Рис.2. Зависимость площади Θ под действительной огибающей от расстояния s при площади входного импульса 1.1 π .

На рис.1,а–е приведены функции $A_s(w)$ и $\varphi_s(w)$ для тех же значений s , что и выше, но рассчитанные без учета релаксации ($\gamma = \delta = 0$). Видно, что по мере распространения импульс распадается на два отдельных импульса, обозначенных в порядке следования во времени цифрами 1 и 2. Первый импульс значительно меньше второго и распространяется с большей скоростью. Зависимости $\varphi_s(w)$ показывают, что в спектре первого импульса имеется частотная модуляция ($d\varphi_s/dw \neq 0$), тогда как спектр второго ее не содержит. С ростом s форма и высота второго импульса практически не меняются. При $s = 360$ для второго импульса $\tau_2 = 212$, $A_{sm} = 0.0187$. На рис.2 и 3 представлены зависимости $\Theta(s)$ и $w_m(s)$. Видно, что при больших s площадь $\Theta(s)$ приближается к 2π . Прямолинейность зависимости $w_m(s)$ при $s > 100$ означает постоянство скорости второго импульса, причем, судя по этой зависимости, $v = 0.382$. При подстановке приведенных выше значений τ_2 , A_{sm} и v в (8) получаем приближенные равенства, выполняющиеся с относительной погрешностью 1%. Все это позволяет заключить, что второй импульс является 2π -импульсом. Тогда согласно [8] первый импульс представляет собой импульс-предвестник. Для предвестника, как показал расчет, $\Delta\nu \simeq -100$ МГц, но ввиду наличия немодулированного по частоте 2π -импульса пук двух импульсов имеет значительно меньший по модулю частотный сдвиг ($\Delta\nu \simeq -90$ кГц для $s = 240$). Предвестник, как и 2π -импульс, имеет огибающую в форме симметричного колокола, но в отличие от 2π -импульса он затухает по мере распространения даже в отсутствие релаксационных процессов.

Сравнивая рис.1,б,в с рис.1,д,е нетрудно заметить, что при учете релаксации для каждого фиксированного зна-

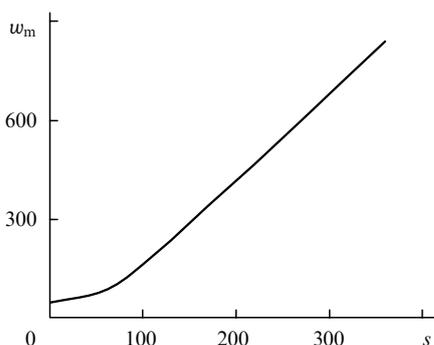


Рис.3. Зависимость временного положения w_m максимума действительной огибающей от расстояния s при площади входного импульса 1.1 π .

чения s импульс располагается на оси w в том же самом месте, где для данного s находится импульс-предвестник в отсутствие релаксации. Например, при $s = 360$ (рис.1,в и е) с погрешностью менее 2% абсциссы вершин этих импульсов и длительности τ_1 равны 130 и 40 соответственно. Для обоих импульсов $\Delta\nu \simeq -100$ МГц. Все это позволяет сделать вывод о том, что на больших расстояниях процессы релаксации подавляют тенденцию формирования 2π -импульса, но допускают образование импульса-предвестника.

На расстоянии $s \simeq 100$, соответствующем условию эксперимента [12], процесс превращения лазерного импульса в импульс-предвестник находится еще в начальной стадии. Об этом свидетельствует малый ($|\Delta\nu| = 12$ МГц) сдвиг центральной частоты спектра импульса по сравнению с аналогичным сдвигом ($|\Delta\nu| \simeq 100$ МГц) для предвестника. Сравнение показывает, что для фиксированного s импульс в присутствии релаксации примерно в два раза меньше импульса-предвестника в ее отсутствие. Это означает, что релаксационные процессы приводят к увеличению скорости затухания предвестника по мере его распространения.

Приведем результаты расчета в случае, когда в (7) параметры $h = 0.181$, $\tau = 14$, $w_0 = 40$, что соответствует $\Theta(0) = 0.9\pi$ и $\Delta t = 7$ нс. При таком $\Theta(0)$, как известно [1, 8], 2π -импульс не образуется даже в отсутствие релаксации. Расчет при наличии релаксации и $s = 100$ дал $\Delta\nu = -17$ МГц, что находится в области экспериментально наблюдаемых значений [12]. На рис.4 представлены функции $A_s(w)$ для $s = 360$ при наличии и в отсутствие релаксации. Значения $w_m(s)$, Δt и $\Delta\nu$ для обоих импульсов практически одинаковы, причем $\Delta\nu \simeq -100$ МГц. Положение данных импульсов на оси w такое же, как и у импульса-предвестника на рис.1,е. Отсюда следует, что импульс-предвестник возникает и при $\Theta(0) < \pi$ и именно его образование ответственно за наблюдаемый на опыте частотный сдвиг. Отметим, что в работе [8] предвестник был обнаружен в расчете только при выполнении условия $\pi < \Theta(0) < 2\pi$.

Расчеты показали, что при уменьшении длительности Δt входного импульса его дальнейшая эволюция сохраняет описанные выше качественные особенности. Однако частотный сдвиг по абсолютной величине возрастает. Так, при $\Theta(0) = 1.1\pi$ и $\Delta t = 5$ нс на расстоянии $s = 100$ имеем $\Delta\nu = -20$ МГц. Увеличение площади входного импульса приводит к уменьшению $|\Delta\nu|$. Например, при $\Theta(0) = 1.4\pi$ и $\Delta t = 5$ нс для $s = 100$ расчет дает $\Delta\nu = -5.5$ МГц. Качественно уменьшение $|\Delta\nu|$ объясняется тем, что

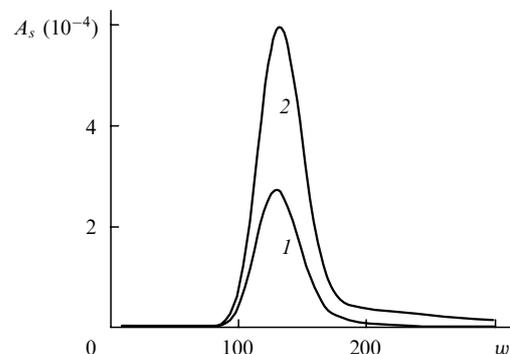


Рис.4. Зависимости от w действительной огибающей A_s на расстоянии $s = 360$ при площади входного импульса 0.9π в присутствии (1) и в отсутствие (2) релаксационных процессов.

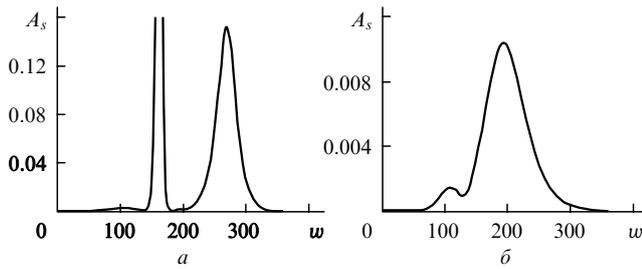


Рис.5. Зависимости от w действительной огибающей A_s на расстоянии $s = 360$ при площади входного импульса 3.5π в отсутствие (а) и в присутствии (б) релаксационных процессов.

с ростом $\Theta(0)$ самоиндуцированная прозрачность не столь эффективно подавляется релаксационными процессами.

Отметим, что предвестник возникает в довольно широком диапазоне изменения $\Theta(0)$. На рис.5 приведены зависимости $A_s(w)$ при $s = 360$ для входного импульса с $\Theta(0) = 3.5\pi$ и $\Delta t = 5$ нс ($h = 1.0$, $\tau = 10$), полученные в расчетах без учета и с учетом релаксации. Первый от начала координат импульс на рис.5,а,б является импульсом-предвестником, для которого $\Delta\nu \simeq -100$ МГц. Второй и третий импульсы на рис.5,а представляют собой 2π -импульсы, причем вершина второго импульса лежит вне пределов изображения. Второй импульс на рис.5,б солитоном не является и затухает с ростом расстояния быстрее, чем импульс-предвестник.

6. Заключение

Результаты расчета показывают, что при квазирезонансном взаимодействии излучения с неоднородно уширенным квантовым переходом импульс-предвестник возникает при площади $\Theta(0)$ входного лазерного импульса как большей, так и меньшей π . Отличительной чертой предвестника является значительная частотная модуляция, проявляющаяся как отталкивание центральной частоты его спектра от резонанса ($\Delta\nu \simeq -100$ МГц). В отсутствие релаксации предвестник затухает из-за доплеровского разброса резонансных частот. При $\Theta(0) < \pi$ на больших расстояниях предвестник содержит практически всю энергию излучения.

При $\Theta(0) > \pi$ предвестник сопровождается одним или несколькими 2π -импульсами. Поскольку 2π -импульс в нашем случае намного больше предвестника и не модулирован по частоте, то $|\Delta\nu|$ для цуга импульсов значительно

меньше, чем для предвестника. Наличие даже слабого влияния релаксационных процессов ($\delta, \gamma \ll 1$) приводит в первую очередь к подавлению СИП. Предвестник, затухание которого хотя и несколько увеличивается, на больших расстояниях сосредотачивает в себе всю энергию излучения. На расстоянии, соответствующем эксперименту, описанному в разд. IV.8.2 работы [12], процесс превращения импульса в импульс-предвестник находится в начальной стадии. Поэтому $\Delta\nu$ изменяется от -20 до -10 МГц, если $\Theta(0)$ близко к π . При увеличении $\Theta(0)$ величина $|\Delta\nu|$ уменьшается из-за роста расстояния, на котором релаксация способна подавить СИП. Отметим, что полученные в наших расчетах импульсы-предвестники имеют симметричную колоколообразную форму, подобную наблюдаемой в эксперименте [11], тогда как в работе [8] расчет дал сложную многопиковую и несимметричную структуру огибающей предвестника.

Представленные результаты численных экспериментов ограничены единственным набором числовых значений параметров резонансной среды и малым разнообразием параметров входного лазерного импульса. В связи с этим представляет интерес зависимость эволюции лазерного импульса от степени нерезонансности входного излучения и его возможной частотной модуляции. Исследования в этом направлении будут продолжены в дальнейшем.

1. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 908 (1967); *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969).
2. Крюков П.Г., Летохов В.С. *УФН*, **99**, 169 (1969).
3. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
4. Lamb G.L. Jr. *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 99 (1971).
5. Diels J.C. *Phys. Lett. A*, **31**, 111 (1970).
6. Matulic L. *Opt. Commun.*, **2**, 249 (1970).
7. Matulic L., Eberly J.H. *Phys. Rev. A*, **6**, 322 (1972).
8. Diels J.C., Hahn E.L. *Phys. Rev. A*, **8**, 1084 (1973).
9. Deck R.T., Lamb G.L. Jr. *Phys. Rev. A*, **12**, 1503 (1975).
10. Каур D.J. *Phys. Rev. A*, **16**, 704 (1976).
11. Diels J.C., Hahn E.L. *Phys. Rev. A*, **10**, 2501 (1973).
12. Slusher R.E., Gibbs H.M. *Phys. Rev. A*, **5**, 1634 (1971).
13. Бутылкин В.С., Каплан А.Е., Хронопуло Ю.Г., Якубович Е.И. *Резонансные взаимодействия света с веществом* (М.: Наука, 1977, с. 22).
14. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики. 1961–1963* (М.: Изд-во АН СССР, 1965).
15. Дмитриев А.Е., Вершинин А.Л., Паршков О.М., Писной А.Л. *Квантовая электроника*, **32**, 33 (2002).
16. Дмитриев А.Е., Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **20**, 447 (1993).