

# О стохастическом резонансе с точки зрения фильтрующих свойств бистабильной системы

С.А.Решетняк, В.А.Щеглов

*Представлена последовательная теория эффекта стохастического резонанса с учетом эффективного динамического времени релаксации. В приближении малых амплитуд сигнала показано, что только за счёт фильтрующих свойств бистабильной системы отношение сигнал-шум на её выходе может превышать аналогичное отношение на её входе.*

**Ключевые слова:** стохастический резонанс, бистабильные системы, нелинейные среды, фильтрация.

## 1. Введение и постановка задачи

При взаимодействии сигнала и шума в нелинейных бистабильных системах может возникнуть так называемый эффект стохастического резонанса. Его суть заключается в том, что отношение сигнал-шум на выходе системы с ростом интенсивности шума ведёт себя аномально (увеличивается, достигает максимума и затем падает). История вопроса и основные достижения в исследовании этого эффекта даны в обзорных работах [1, 2]. Стохастический резонанс обнаружен в различных областях физики, в том числе в квантовой электронике. Одна из первых экспериментальных работ, подтвердивших существование этого эффекта, была выполнена с помощью кольцевого лазера с акустооптическим модулятором [3]. Несмотря на большой объём уже проведённых исследований, в настоящее время существует ряд проблем, требующих своего решения. Одной из них является определение коэффициента передачи, показывающего, насколько отношение сигнал-шум на выходе бистабильной системы отличается от отношения сигнал-шум на её входе. Именно этой проблеме и посвящена данная работа.

Рассмотрим взаимодействие сигнала и шума в рамках модели передемпфированного нелинейного осциллятора с двумя положениями равновесия. При этом уравнение для параметра  $\eta$ , характеризующего состояние системы, имеет вид

$$\frac{d\eta}{dt} + U'(\eta) = A \cos(\omega_0 t) + \xi(t), \quad (1)$$

где  $U(\eta) = -a\eta^2/2 + b\eta^4/4$  – потенциал бистабильной системы, имеющий два устойчивых положения равновесия в точках  $\pm\eta_0$  ( $\eta_0 = (a/b)^{1/2}$ ) с потенциальным барьером  $U_0 = a^2/4b$  между ними;  $a$  и  $b$  – некоторые константы, описывающие систему. Здесь и далее штрихи при функциях обозначают производные по координате.

Слагаемые в правой части (1) характеризуют воздействие на систему сигнала и белого шума, определяемого средним значением и корреляционной функцией:

$$\langle \xi(t) \rangle = 0, \quad K_{in}(\tau) = \langle \xi(\tau)\xi(0) \rangle = 2D\delta(\tau).$$

Фурье-образ корреляционной функции определяет спектральную плотность шума  $N(\omega)$ :

$$N(\omega) = \frac{1}{\pi} \int K(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \\ K(\tau) = \frac{1}{2} \int N(\omega) \exp(i\omega\tau) d\omega.$$

Здесь и ниже, если пределы интегрирования не указываются, то оно проводится по всей числовой оси. В этих формулах коэффициенты выбраны так, чтобы

$$K(0) = \langle \xi^2 \rangle = \int_0^\infty N(\omega) d\omega.$$

Определим отношение сигнал-шум на входе как отношение квадрата амплитуды сигнала  $A$  к спектральной плотности интенсивности шума на частоте сигнала, т. е.

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{in} = \frac{A^2}{N_{in}(\omega_0)} = \frac{\pi A^2}{2D}. \quad (2)$$

Прежде чем найти отношение сигнал-шум на выходе системы, рассмотрим её реакцию на слабый сигнал в отсутствие шума. Периодическая внешняя сила приводит к вынужденным колебаниям параметра порядка  $\eta$  вблизи положения равновесия с амплитудой  $\Delta\eta = \eta - \eta_0$ . При  $\Delta\eta \ll \eta_0$  из анализа уравнения (1) следует, что установившееся со временем колебание в отсутствие шума имеет следующий вид:

$$\Delta\eta = \frac{A}{(\omega_0^2 + 4a^2)^{1/2}} \cos(\omega_0 t - \varphi), \quad (3)$$

где  $\tan \varphi = \omega_0/2a$ ;  $(2a)^{-1}$  – динамическое время релаксации.

## 2. Кинетическое уравнение и его анализ для низких и высоких частот сигнала

Учёт воздействия на систему шума проведём путём анализа эквивалентного уравнению (1) кинетического

уравнения Фоккера – Планка для функции распределения  $f(\eta, t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + A \cos(\omega_0 t) \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left( U' f + D \frac{\partial f}{\partial \eta} \right), \\ f|_{t=0} &= \delta(\eta - \eta_*), \\ \left\{ [U' - A \cos(\omega_0 t)] f + D \frac{\partial f}{\partial \eta} \right\} \Big|_{\eta \rightarrow \pm \infty} &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\eta_*$  – начальное значение параметра порядка  $\eta$ . Решение данного уравнения задаёт плотность  $f(\eta, t)$  вероятности перехода от  $\eta_*$  к значению  $\eta$  в момент времени  $t$ .

Некоторые частные результаты можно получить из простейшего анализа уравнения (4). Прежде всего отметим, что при учёте шума возникает ещё одно характерное время – кинетическое время релаксации системы к состоянию равновесия в отсутствие сигнала, когда функция распределения становится равновесной и принимает вид

$$\rho_0 = C \exp\left(-\frac{U}{D}\right), \quad (5)$$

где  $C$  – постоянная нормировки. Кинетическое время релаксации определяется средней частотой  $\mu_1$  переходов через потенциальный барьер в результате действия шума на систему. Эту частоту называют также частотой Крамерса.

Рассмотрим сначала квазистатические или адиабатические изменения во времени сигнала ( $\omega_0 \ll \mu_1$ ). В этом случае производной функции распределения по времени в (4) можно пренебречь и рассматривать уравнение

$$A \cos(\omega_0 t) f = U' f + D \frac{\partial f}{\partial \eta}. \quad (6)$$

Для слабых сигналов с амплитудами  $A \ll a\eta_0$  функцию распределения можно искать в виде

$$f = \rho + \tilde{\rho}. \quad (7)$$

В таком представлении  $\rho$  описывает реакцию системы на шум, а  $\tilde{\rho}$  – на сигнал ( $\tilde{\rho} \sim A$ ).

Подставляя (7) в (6) и учитывая, что для квазистатических частот сигнала  $\rho \simeq \rho_0$ , в первом приближении по малой амплитуде  $A$  имеем

$$D \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \eta} + U' \tilde{\rho} = A \cos(\omega_0 t) \rho_0.$$

Полагая  $\tilde{\rho} = \rho_0 \tilde{\varphi}$ , находим

$$\tilde{\varphi} = \frac{A}{D} \eta \cos(\omega_0 t), \quad \langle \tilde{\eta} \rangle = \int \eta \tilde{\rho} d\eta = \frac{A\eta_0^2}{D} \cos(\omega_0 t), \quad (8)$$

где интеграл был вычислен по методу перевала.

Сравнивая (8) с низкочастотным пределом выражения (3) и учитывая то, что динамическое время релаксации всегда меньше кинетического, в рамках адиабатической теории находим коэффициент  $k$  усиления сигнала на выходе бистабильной системы:

$$\langle \tilde{\eta} \rangle = k \frac{A}{2a} \cos(\omega_0 t), \quad k = \frac{2a\eta_0^2}{D} = \frac{8U_0}{D}. \quad (9)$$

Видно, что  $k$  может существенно превышать единицу за счёт перекачки энергии шума в энергию сигнала. Заметим, что формула (9) не обеспечивает корректности предельного перехода

$$k|_{D \rightarrow 0} = 1. \quad (10)$$

Это вполне понятно, т. к. при  $D \rightarrow 0$  кинетическое время релаксации  $\mu_1^{-1}$  стремится к бесконечности и квазистатическое (или адиабатическое) приближение нарушается. Более точные неадиабатические теории стохастического резонанса должны учитывать не только кинетическое, но и динамическое время релаксации. Именно такая теория представлена ниже.

При высоких частотах сигнала ( $\omega_0 \gg a$ ) диффузия параметра  $\eta$  и его регулярное движение в поле  $U(\eta)$  являются медленными процессами по сравнению с изменением сигнала во времени. В этом случае, пренебрегая правой частью уравнения (4), получаем

$$\rho = -\frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \frac{\partial \rho}{\partial \eta}.$$

Решение данного уравнения можно представить в виде

$$\langle \eta \rangle = -\frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) \int \eta \frac{\partial \rho}{\partial \eta} d\eta = \frac{A}{\omega_0} \sin(\omega_0 t),$$

совпадающем с высокочастотным пределом выражения (3). Это свидетельствует о том, что взаимодействие сигнала и шума в области высоких частот отсутствует.

### 3. Решение кинетического уравнения в первом порядке теории возмущений по амплитуде сигнала

Более точные выражения для  $\rho$  и  $\tilde{\rho}$  находятся в рамках нестационарной теории возмущений по малой амплитуде сигнала  $A$ . В результате подстановки (7) в (4) и приравнивания членов одинаковой степени малости по  $A$  получаем следующие уравнения для  $\rho$  и  $\tilde{\rho}$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left( U' \rho + D \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right), \quad (11)$$

$$\left( U' \rho + D \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad \rho|_{t=0} = \delta(\eta - \eta_*),$$

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + A \cos(\omega_0 t) \frac{\partial \rho}{\partial \eta} \left( U' \tilde{\rho} + D \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \eta} \right), \quad (12)$$

$$\left( U' \tilde{\rho} + D \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial \eta} \right) \Big|_{\eta \rightarrow \pm \infty} = 0, \quad \tilde{\rho}|_{t=0} = 0, \quad \int \tilde{\rho} d\eta = 0.$$

Решение уравнения (11) имеет вид

$$\rho = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta) \varphi_n(\eta_*) \exp(-\mu_n t). \quad (13)$$

Здесь  $\mu_n$  и  $\varphi_n(\eta)$  – собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$D \frac{d}{d\eta} \left( \rho_0 \frac{d\varphi_n}{d\eta} \right) = -\mu_n \rho_0 \varphi_n, \quad \rho_0 \frac{d\varphi_n}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \pm \infty} = 0. \quad (14)$$

Собственные значения  $\mu_n$  – положительны и пронумерованы в порядке их возрастания.

Используя разработанный в [4] метод итераций, приведём в первом приближении выражения для собственных значений и собственных функций:

$$\mu_1 \simeq \frac{\sqrt{2}a}{\pi} \exp\left(-\frac{U_0}{D}\right), \quad \mu_2 \approx a,$$

$$\varphi_1(\eta) \simeq \operatorname{erf}\left[\left(\frac{a}{2D}\right)^{1/2} \eta\right] \quad \left(\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-t^2) dt\right).$$

Поскольку уравнение (11) имеет стационарное решение (5), нормированное на единицу, то ему соответствует  $\mu_0 = 0$ ,  $\varphi_0 \equiv 1$ . Отметим, что для симметричных потенциалов  $\varphi_{2n}$  являются чётными функциями переменной  $\eta$ , а  $\varphi_{2n+1}$  – нечётными.

Функция распределения  $\tilde{\rho}$  удовлетворяет тем же граничным условиям, что и функция  $\rho$ , поэтому решение (12) можно искать в виде ряда по базисным функциям:

$$\tilde{\rho} = \rho_0 \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) \varphi_n(\eta). \quad (15)$$

Так как интегралы с симметричными пределами от нечётных функций обращаются в нуль, то отклик бистабильной системы на сигнал определяется только нечётными коэффициентами разложения (15):

$$\langle \tilde{\eta} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n+1} M_{2n+1}, \quad M_n = \int \eta \rho_0 \varphi_n d\eta, \quad M_{2n} = 0. \quad (16)$$

Поскольку собственные функции обладают свойствами ортогональности и полноты:

$$\int \rho_0 \varphi_n \varphi_k d\eta = \delta_{nk}, \quad \rho_0 \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\eta) \varphi_k(\eta_*) = \delta(\eta - \eta_*),$$

то, подставив (15) в (12), получим уравнения для коэффициентов разложения  $C_n$ :

$$\frac{dC_n}{dt} + \mu_n C_n = A \cos(\omega_0 t) \int \varphi_n' \rho d\eta, \quad C_n(0) = 0. \quad (17)$$

Решение (17) имеет вид

$$C_n(t) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k(\eta_*) \int \rho_0 \varphi_n' \varphi_k d\eta}{(\mu_n - \mu_k)^2 + \omega_0^2} \{(\mu_n - \mu_k)$$

$$\times [\cos(\omega_0 t) \exp(-\mu_k t) - \exp(-\mu_n t)] + \omega_0 \sin(\omega_0 t) \exp(-\mu_k t)\}.$$

Из последнего выражения находим установившиеся со временем значения нечётных коэффициентов

$$C_{2n+1}(t) = \frac{A \int \rho_0 \varphi_{2n+1}' d\eta}{\mu_{2n+1}^2 + \omega_0^2} [\mu_{2n+1} \cos(\omega_0 t) + \omega_0 \sin(\omega_0 t)]. \quad (18)$$

Используя уравнение (14), можно показать, что

$$\int \rho_0 \varphi_{2n+1}' d\eta = \frac{2\mu_{2n+1}}{D} \int_0^{\infty} d\eta \int_{\eta}^{\infty} \rho_0 \varphi_{2n+1} d\xi = \frac{\mu_{2n+1}}{D} M_{2n+1}.$$

После подстановки (18) в (16) отклик системы на сигнал принимает вид

$$\langle \tilde{\eta} \rangle = \frac{A}{D} [a_s \cos(\omega_0 t) + b_s \sin(\omega_0 t)],$$

$$a_s = \frac{\mu_1^2 M_1^2}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + S_1(\omega_0), \quad b_s = \frac{\omega_0 \mu_1 M_1^2}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + S_2(\omega_0), \quad (19)$$

$$S_1(\omega_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}^2}{\mu_{2n+1}^2 + \omega_0^2} M_{2n+1}^2,$$

$$S_2(\omega_0) = \omega_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{\mu_{2n+1}^2 + \omega_0^2} M_{2n+1}^2.$$

#### 4. Отклик системы на сигнал с учётом эффективного динамического времени релаксации

В формуле (19) специально выделен первый член ряда, т. к. он определяется частотой Крамерса и, следовательно, кинетическим временем релаксации. Суммы, содержащие высшие собственные значения, можно достаточно хорошо аппроксимировать лоренцевскими линиями путём введения эффективного высшего собственного значения.

Проанализируем сначала выражение для  $S_1(\omega_0)$ , предварительно заметив, что весовые множители  $M_{2n+1}^2$  удовлетворяют следующему равенству:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} M_n^2 = \int \rho_0 \xi d\xi \int \rho_0 \eta \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta) \varphi_n(\xi) d\eta \\ &= \int \xi^2 \rho_0(\xi) d\xi = \eta_0^2 + \frac{D}{2a}, \end{aligned}$$

которое может быть получено, если учесть свойство полноты собственных функций, а последний интеграл вычислить по методу перевала. Следовательно,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2 - M_1^2 = \frac{D}{2a}, \quad (20)$$

где учтено, что «перевальное» значение  $M_1 = \eta_0$ .

Можно также показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n+1}^2 M_{2n+1}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n^2 M_n^2 = D^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int \rho_0 \varphi_n' d\eta \right)^2 \\ &= D^2 \int \rho_0' d\xi \int \rho_0' \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\eta) \varphi_n(\xi) d\eta \\ &= D^2 \int \frac{U'}{D} \rho_0 d\xi = D \int U'' \rho_0 d\eta = 2aD, \quad (21) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n+1} M_{2n+1}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu_n M_n^2 = -D \sum_{n=0}^{\infty} \int \eta \rho_0 \varphi_n d\eta \int \rho_0' \varphi_n d\xi \\ &= -D \int \rho_0' d\xi \int \eta \delta(\eta - \xi) d\eta = -D \int \xi \rho_0' d\xi = D. \quad (22) \end{aligned}$$

Формула (21) позволяет сделать вывод о резком убывании весовых множителей  $M_{2n+1}^2$  с ростом индекса  $n$ , по крайней мере, как  $(2n + 1)^{-3}$ . Это означает, что основной вклад в суммы  $S_1$  и  $S_2$  дают первые несколько членов.

Определим эффективное высшее собственное значение  $\mu_e$  следующим образом:

$$\mu_e = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n+1} M_{2n+1}^2}{\sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2}.$$

С учётом (22) и (20) находим  $\mu_e = 2a$ , что в точности совпадает с обратным динамическим временем релаксации. Найденное значение  $\mu_e$  позволяет построить аппроксимирующие формулы для сумм  $S_1$  и  $S_2$ :

$$S_{1e}(\omega_0) = \frac{D\mu_e^2}{2a(\mu_e^2 + \omega_0^2)} = \frac{2aD}{4a^2 + \omega_0^2}, \quad (23)$$

$$S_{2e}(\omega_0) = \frac{D\omega_0\mu_e}{2a(\mu_e^2 + \omega_0^2)} = \frac{D\omega_0}{4a^2 + \omega_0^2}.$$

Используя приведённые выше формулы, убеждаемся в том, что асимптотики  $S_{1e}$  и  $S_{2e}$  совпадают с точными значениями сумм. Например, для  $S_{1e}$  имеем

$$S_{1e}(\omega_0)|_{\omega_0 \rightarrow \infty} = S_1(\omega_0)|_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n+1}^2 M_{2n+1}^2 = \frac{2aD}{\omega_0^2},$$

$$S_{1e}(\omega_0)|_{\omega_0 \rightarrow 0} = S_1(\omega_0)|_{\omega_0 \rightarrow 0} = \sum_{n=1}^{\infty} M_{2n+1}^2 = \frac{D}{2a}.$$

Кроме того, площади, ограниченные лоренцевскими кривыми  $S_{1e}(\omega_0)$  и  $S_{2e}(\omega_0)$ , также совпадают с точными значениями сумм. Например, для  $S_{1e}$  получаем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} S_{1e}(\omega_0) d\omega_0 &= \int_0^{\infty} S_1(\omega_0) d\omega_0 \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{2n+1}^2 M_{2n+1}^2 = \frac{\pi}{2} D. \end{aligned}$$

Аналогичные формулы можно получить и для  $S_{2e}(\omega_0)$ . Отсюда можно сделать вывод, что формулы (23) достаточно хорошо аппроксимируют вышеуказанные суммы во всей области изменения частот  $\omega_0$  сигнала.

С учётом формул (23) отклик бистабильной системы на сигнал принимает вид

$$\langle \tilde{\eta} \rangle = \frac{A}{2a} (\alpha_s^2 + \beta_s^2)^{1/2} \cos(\omega_0 t - \phi_s), \quad (24)$$

где

$$\phi_s = \arctan\left(\frac{\beta_s}{\alpha_s}\right); \quad \alpha_s = \frac{k\mu_1^2}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + \frac{\mu_e^2}{\mu_e^2 + \omega_0^2};$$

$$\beta_s = \frac{k\omega_0\mu_1}{\mu_1^2 + \omega_0^2} + \frac{\mu_e\omega_0}{\mu_e^2 + \omega_0^2}.$$

Из (24) следует, что при воздействии шума выходной сигнал изменяет свои амплитуду и фазу. В отсутствие шума выражение (24) совпадает с откликом системы (3), т. е. содержит правильный предельный переход при  $D \rightarrow 0$ . Для квазистатических частот сигнала ( $\omega_0 \ll \mu_1$ ) формула (24) совпадает с выражением (9), полученным в адиабатическом приближении. Коэффициент усиления амплитуды сигнала для  $\omega_0 \ll \mu_e$  в рамках нестационарной теории имеет вид

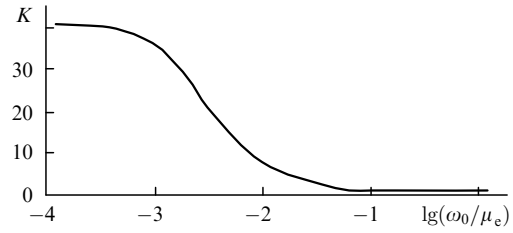


Рис.1. Зависимость коэффициента усиления  $K$  сигнала от его частоты.

$$K = (\alpha_s^2 + \beta_s^2)^{1/2}$$

и в отличие от (9) содержит правильный предельный переход (10).

Влияние шума на сигнал в значительной мере проявляется в области низких частот. Здесь коэффициент усиления может принимать значения порядка  $10^2$ . В квазистатической области частот сигнала амплитуда отклика практически постоянна и равна  $kA/2a$ . При точном равенстве  $\omega_0 = \mu_1$  усиление уменьшается в  $\sqrt{2}$  раз, поэтому можно сделать следующий вывод: периодические сигналы усиливаются на частотах, меньших или порядка частоты Крамерса. Для частот  $\omega_0 \geq (\mu_1\mu_e)^{1/2}$  амплитуда и фаза сигнала практически совпадают с амплитудой и фазой отклика системы без учёта шума, т. е. в этой области частот шум не влияет на сигнал.

Выражения для асимптотик  $\tan \phi_s$  в области малых и больших частот имеют следующий вид:

$$\tan \phi_s|_{\omega_0 \rightarrow 0} = \frac{k\mu_e + \mu_1}{\mu_1\mu_e(k+1)} \omega_0,$$

$$\tan \phi_s|_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{k\mu_1 + \mu_e}{k\mu_1^2 + \mu_e^2} \omega_0.$$

Для интенсивностей шума, при которых  $\mu_1 \ll \mu_e$ , наклоны этих прямых к оси  $\omega_0$  существенно различаются, поэтому зависимость фазы от частоты проходит через локальные максимум и минимум. Локальный максимум фазы отклика системы наблюдается при частоте сигнала  $\omega_0 \approx \mu_1\sqrt{k}$ . Частотные зависимости коэффициента усиления сигнала и тангенс его фазы для выбранной интенсивности шума  $D = 0.2U_0$  приведены на рис.1 и 2.

## 5. Отношение сигнал-шум на выходе бистабильной системы и коэффициент передачи

Обратимся теперь к определению отношения сигнал-шум на выходе бистабильной системы. Для этого необходимо найти спектральную плотность шума. Корреляционная функция случайного процесса на выходе системы имеет вид

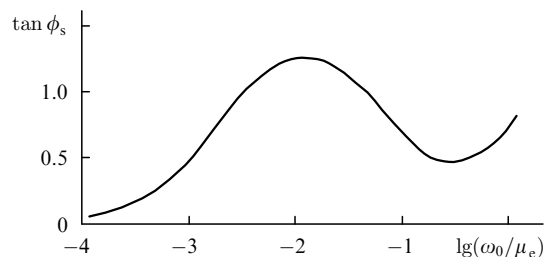


Рис.2. Зависимость тангенса фазы  $\phi_s$  выходного сигнала от его частоты.

$$K_{\text{out}}(\tau) = \iint \eta \eta_* f(\eta, \eta_*, \tau) \rho_0(\eta_*) d\eta d\eta_* \quad (25)$$

Учитывая, что для рассматриваемых малых амплитуд сигнала искажение спектральной плотности шума за счёт его взаимодействия с сигналом невелико, в (25) заменяем  $f$  на  $\rho$ . Тогда

$$K_{\text{out}}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} M_{2n+1}^2 \exp(-\mu_{2n+1} \tau).$$

Полученная корреляционная функция определена в области  $\tau \geq 0$ . Поскольку рассматривается стационарный случайный процесс на выходе бистабильной системы, то  $K_{\text{out}}(\tau)$  необходимо чётным образом продолжить в область  $\tau \leq 0$ . Отсюда находим спектральную плотность шума

$$N_{\text{out}}(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_{2n+1}}{\mu_{2n+1}^2 + \omega^2} M_{2n+1}^2.$$

Выделяя здесь слагаемое с  $\mu_1$  и замечая, что оставшаяся сумма с точностью до численного множителя совпадает с  $S_2$ , имеем

$$N_{\text{out}}(\omega) = \frac{D}{\pi a} \left( \frac{k\mu_1}{\mu_1^2 + \omega^2} + \frac{\mu_e}{\mu_e^2 + \omega^2} \right). \quad (26)$$

В результате проведенного анализа получаем отношение сигнал-шум на выходе бистабильной системы

$$\left( \frac{S}{N} \right)_{\text{out}} = \frac{A^2(\alpha_s^2 + \beta_s^2)}{4a^2 N_{\text{out}}(\omega_0)} = \left( \frac{S}{N} \right)_{\text{in}} q, \quad (27)$$

где

$$q = \frac{\omega_0(\alpha_s^2 + \beta_s^2)}{2a\beta_s}$$

– коэффициент передачи, показывающий, насколько отношение сигнал-шум на выходе системы отличается от аналогичного отношения на её входе.

## 6. Отклик системы на сигнал (метастабильная стадия релаксации)

До сих пор мы рассматривали установившийся во времени отклик бистабильной системы на сигнал. При этом в решении уравнения (17) все члены с множителями  $\exp(-\mu_n t)$  были отброшены. Однако при малых по сравнению с высотой потенциального барьера интенсивностях шума ( $D \ll U_0$ ) необходимо большое время наблюдения, чтобы сформировался отклик системы (19). Действительно, в этом случае имеет место долгоживущая метастабильная стадия релаксации, связанная с большим различием кинетического и динамического характерных времён релаксации. Длительность метастабильной стадии определяется неравенством  $\mu_e^{-1} \ll t \ll \mu_1^{-1}$ . На этой стадии в решении (17) все члены с множителем  $\exp(-\mu_1 t)$  должны быть сохранены. При этом получаем следующее выражение для  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{A \int \rho_0 \varphi_1' d\eta}{\mu_1^2 + \omega_0^2} \{ \mu_1 [\cos(\omega_0 t) - 1] + \omega_0 \sin(\omega_0 t) \} +$$

$$+ A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{2n} \varphi_{2n}(\eta_*) \int \rho_0 \varphi_1' \varphi_{2n} d\eta}{\mu_{2n}^2 + \omega_0^2},$$

а другие коэффициенты разложения (15) сохраняют прежний вид. Отклик бистабильной системы на сигнал в данном случае принимает вид

$$\langle \tilde{\eta} \rangle = \frac{A}{D} [a_s \cos(\omega_0 t) + b_s \sin(\omega_0 t)] - \frac{A(\mu_1 M_1)^2}{D(\mu_1^2 + \omega_0^2)} + AM_1 S_3(\omega_0), \quad (28)$$

где

$$S_3(\omega_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_{2n} N_{2n}}{\mu_{2n}^2 + \omega_0^2}; \quad N_{2n} = \varphi_{2n}(\eta_*) \int \rho_0 \varphi_1' \varphi_{2n} d\eta.$$

Отсюда следует, что на метастабильной стадии релаксации к сигналу на выходе системы добавляется постоянная составляющая, определяемая последними двумя членами в формуле (28) и не дающая вклада в спектральную плотность сигнала. Отметим, что стационарный отклик (28) формируется очень медленно (за время кинетической релаксации  $\mu_1^{-1}$ ), а отклик (24) – очень быстро (за время динамической релаксации  $\mu_e^{-1}$ ).

Рассмотрим теперь квазистатическую область частот сигнала. Полагая в (28) коэффициент  $M_1 = \eta_0$  и учитывая полученную в [5] оценку

$$S_3(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_{2n}}{\mu_{2n}} \simeq \left( \frac{2}{\pi a D} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{a\eta_*^2}{2D}\right),$$

находим отклик на квазистатический сигнал

$$\langle \tilde{\eta} \rangle|_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \frac{A}{2a} + \eta_0 A S_3(0) = \frac{A}{2a} + A\eta_0 \left( \frac{2}{\pi a D} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{a\eta_*^2}{2D}\right)$$

и восприимчивость бистабильной системы

$$\chi = \frac{\partial \langle \tilde{\eta} \rangle}{\partial A} = \frac{1}{2a} + \eta_0 \left( \frac{2}{\pi a D} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{a\eta_*^2}{2D}\right). \quad (29)$$

Как следует из (29), восприимчивость  $\chi$  с ростом интенсивности шума ведёт себя подобно отношению сигнал-шум. Действительно, с увеличением  $D$  она растёт, достигает максимума и затем падает, что является ещё одним проявлением эффекта стохастического резонанса. Аномальная восприимчивость бистабильной системы впервые была получена в работе [6].

## 7. Обсуждение результатов и выводы

На рис.3 представлена зависимость коэффициента передачи  $q$  от частоты сигнала для  $D = 0.2U_0$ . Видно, что в области низких частот  $q$  практически постоянно и существенно меньше единицы для выбранной интенсивности шума. Близкие к единице значения  $q$  имеют место в области частот  $\omega_0 \approx \mu_e$ , т. е. там, где усиление сигнала практически отсутствует. Для заданной интенсивности шума  $(S/N)_{\text{out}} \sim q$  и частотная зависимость отношения сигнал-шум имеет точно такой же вид, как и зависимость

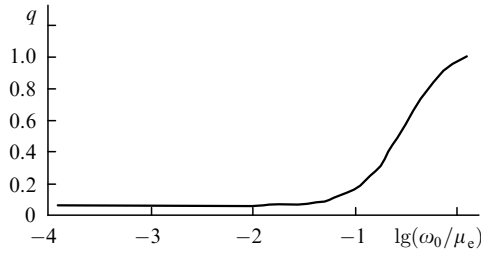


Рис.3. Зависимость коэффициента передачи  $q$  от частоты сигнала.

$q(\omega_0)$ . Рост коэффициента передачи и отношения сигнал-шум с увеличением частоты сигнала объясняется падением спектральной плотности шума (26) в области высоких частот  $\omega_0$ .

Полученные выше формулы позволяют найти также основные характеристики процесса в зависимости от интенсивности шума. Для частоты сигнала  $\omega_0 = 0.01\mu_e$  на рис.4–6 представлены зависимости от  $D$  коэффициента усиления, отношения сигнал-шум и коэффициента передачи. Прежде всего отметим аномальный рост отношения сигнал-шум с увеличением интенсивности шума  $D$  (рис.5), который является прямым следствием роста коэффициента усиления  $K$  с увеличением  $D$  (рис.4). Наибольшее значение  $K$  достигается для такой интенсивности шума, при которой частота сигнала  $\omega_0$  совпадает с частотой Крамерса  $\mu_1$  (средней частотой переходов через потенциальный барьер из одной ямы в другую в результате действия шума). Положения максимумов коэффициента усиления и отношения сигнал-шум совпадают, поэтому наблюдающийся эффект аномального роста отношения сигнал-шум получил название «стохастический резонанс» [3]. Однако, как следует из рис.6, коэффициент передачи в случае стохастического резонанса значительно меньше единицы.

Таким образом, в рамках построенной нами теории данного эффекта получены все его основные характеристики, которые подтверждаются экспериментальными исследованиями [1, 2] и результатами численного моделирования [7]. Кроме того, элементарные преобразования показывают, что формула (27) совпадает с отношением сигнал-шум, найденным с помощью другого подхода в работе [8], где в отличие от нашей теории для вычисления сумм типа  $S_1$  и  $S_2$  были использованы известные собственные значения и собственные функции краевой задачи (14) для потенциала  $U(\eta) \sim \eta^2$ . Подход [8] применим в случае небольших интенсивностей шума  $D$ , когда изменение параметра порядка происходит вблизи дна потенциальной ямы, где потенциал меняется по па-

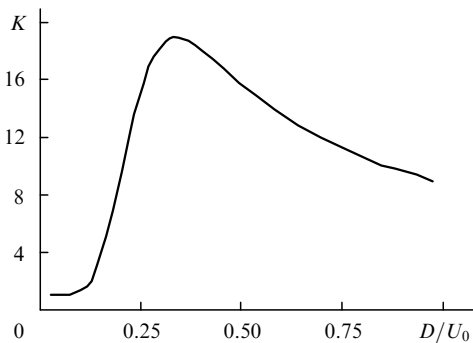


Рис.4. Зависимость коэффициента усиления  $K$  сигнала от интенсивности шума.

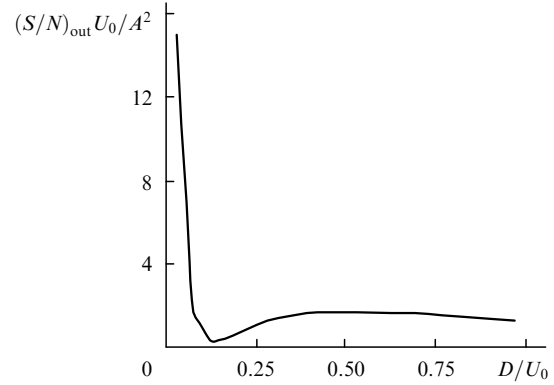


Рис.5. Зависимость  $(S/N)_{out}$  от интенсивности шума.

раболическому закону. Совпадение результатов в рамках обоих подходов не является случайным, т. к. для расчёта интегралов с целью определения  $\mu_e$  использовался метод перевала, дающий правильные их значения при  $D < U_0$ . Обобщение на случай  $D > U_0$  в рамках нашей теории заключается в отказе от применения данного метода расчёта. При этом необходимо использовать итерационную схему построения собственных значений и собственных функций, предложенную в [4]. Например, обобщенная частота Крамерса для произвольных интенсивностей шума имеет вид

$$\mu_1^{-1} = D^{-1} \int_0^\infty \rho_0^{-1} dx \int_x^\infty \rho_0 dy. \quad (30)$$

Вычисляя в (30) интеграл методом перевала, приходим к классическому выражению для частоты Крамерса:  $\mu_1 = (\sqrt{2}a/\pi) \exp(-U_0/D)$ . Проведённый в [9] численный эксперимент показал, что формула (30) приводит к правильным результатам для интенсивностей шума  $D \leq 10^2 U_0$ , а классическая частота Крамерса применима в области  $D \leq U_0$ .

Ещё раз подчеркнём, что рост отношения сигнал-шум с увеличением интенсивности шума (стохастический резонанс) вызван прежде всего ростом коэффициента усиления амплитуды сигнала на выходе за счёт действия шума. Однако, как указывают приведённые на рис.6 результаты вычислений, коэффициент передачи меньше единицы, т. е. на выходе бистабильной системы отношение сигнал-шум не превышает подобного отношения на её входе, и фильтрующие свойства бистабильной системы в случае стохастического резонанса не улучшаются.

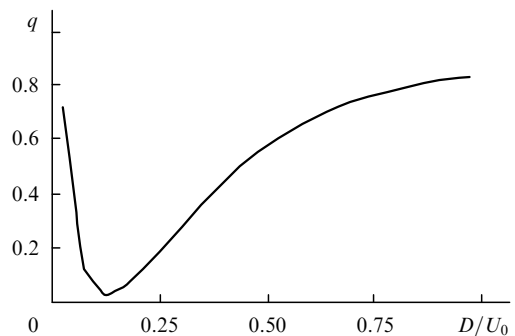


Рис.6. Зависимость коэффициента передачи  $q$  в области низких частот сигнала от интенсивности шума.

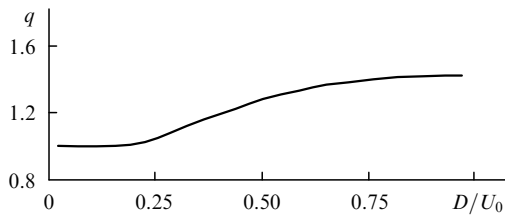


Рис. 7. Зависимость коэффициента передачи  $q$  в области высоких частот сигнала от интенсивности шума.

С нашей точки зрения наибольший практический интерес вызывают исследования по определению таких параметров бистабильной системы, при которых  $q > 1$ . В рамках построенной теории эти параметры удаётся найти. Действительно, несложные преобразования позволяют представить коэффициент передачи (27) в виде

$$q = \frac{\mu_1^2(k+1)^2 + \alpha^2\omega_0^2}{\mu_1(k\mu_e + \mu_1) + \alpha\omega_0^2}, \quad (31)$$

где  $\alpha = 1 + k\mu_1/\mu_e$ .

В области низких частот сигнала коэффициент передачи

$$q|_{\omega_0 \rightarrow 0} = \frac{\mu_1(k+1)^2}{k\mu_e + \mu_1}$$

и, как показывают оценки, он меньше единицы. В области высоких частот сигнала

$$q|_{\omega_0 \rightarrow \infty} = \alpha = 1 + \frac{4\sqrt{2}U_0}{\pi D} \exp\left(-\frac{U_0}{D}\right).$$

Видно, что коэффициент передачи превышает единицу и достигает максимального значения 1.66 для интенсивностей шума  $D = U_0$ .

Поведение коэффициента передачи в области высоких частот сигнала определяется двумя факторами. Первый фактор – коэффициент усиления сигнала, который имеет значения порядка единицы. Второй и главный фактор, приводящий к росту  $q$ , – малая спектральная плотность шума. На рис. 7 приведены значения коэффициента передачи в зависимости от интенсивности шума для частоты сигнала  $\omega_0 = \mu_e$ . При этом отношение сигнал-шум ведет себя нормальным образом, т. е. уменьшается с ростом интенсивности шума. Отсюда можно сделать следующий вывод: в области умеренных или высоких частот сигнала стохастический резонанс отсутствует, но бистабильная система является частотным фильтром для шумового воздействия с отношением сигнал-шум на выходе, превышающим аналогичное отношение на её входе, и может иметь практическое значение для фильтрации слабых сигналов на фоне помех. Поэтому рассмотренному процессу взаимодействия сигнала и шума больше подходит название «стохастическая фильтрация», как это было предложено в [10] Ю.Л.Климонтовичем.

бильная система является частотным фильтром для шумового воздействия с отношением сигнал-шум на выходе, превышающим аналогичное отношение на её входе, и может иметь практическое значение для фильтрации слабых сигналов на фоне помех. Поэтому рассмотренному процессу взаимодействия сигнала и шума больше подходит название «стохастическая фильтрация», как это было предложено в [10] Ю.Л.Климонтовичем.

## 8. Заключение

Таким образом, показана принципиальная возможность реализации отношения сигнал-шум на выходе, превышающего отношение сигнал-шум на входе бистабильной системы. Однако остаются открытыми вопросы достижения коэффициентов передачи  $q \gg 1$  и определения параметров системы, при которых фильтрация сигнала становится оптимальной. Для их решения необходимо проведение дальнейших как теоретических, так и экспериментальных исследований стохастической фильтрации и, в частности, построение теории этого явления без использования метода возмущений по малой амплитуде сигнала.

Взаимодействие сигнала и шума проанализировано нами в рамках модели передемпфированного нелинейного осциллятора. Случай же малых коэффициентов трения в настоящее время исследован недостаточно. Однако в работе [11] для бистабильных систем с малой диссипацией обнаружена аномальная восприимчивость к квазистатическим сигналам, что является проявлением в подобных системах стохастического резонанса. Очевидно, что здесь кроме указанного эффекта может иметь место и обычный резонанс, поэтому исследование взаимодействия сигнала и шума с точки зрения наложения обоих резонансов является перспективным.

1. Gammaitoni L., et al. *Rev. Mod. Phys.*, **70**, 223 (1998).
2. Анищенко В.С. и др. *УФН*, **169**, 7 (1999).
3. McNamara B., Wiesenfeld K., Roy R. *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 2626 (1988).
4. Решетняк С.А., Харчев С.М., Шелепин Л.А. *Труды ФИАН*, **144**, 4 (1984).
5. Решетняк С.А. *J. Russ. Las. Research*, **19**, 175 (1998).
6. Решетняк С.А., Харчев С.М., Шелепин Л.А. *Труды ФИАН*, **173**, 94 (1985).
7. Карташов В.М. и др. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, № 9, 19 (2000).
8. Hu G., Haken H., Ning C.Z. *Phys. Lett. A*, **172**, 21 (1992).
9. Карташов В.М. и др. *Кр. сообщ. физ. ФИАН*, № 9, 12 (2000).
10. Климонтович Ю.Л. *УФН*, **169**, 39 (1999).
11. Решетняк С.А., Щеглов В.А. *J. Russ. Las. Research*, **17**, 519 (1996).