

Свойства астигматического $\pi/2$ -конвертера мод

А.А.Малютин

Представлен детальный анализ свойств астигматического $\pi/2$ -конвертера при преобразовании собственных и несобственных лазерных мод, а также пучков произвольного вида. Показано, что действие оптической схемы конвертера сводится к независимому выполнению в двух ортогональных плоскостях, проходящих через оптическую ось устройства, четного и нечетного числа преобразований Фурье. Дано описание работы системы, состоящей из двух последовательно расположенных, произвольно ориентированных $\pi/2$ -конвертеров, которая позволяет сформировать в заданной плоскости либо изображение объекта, либо его фурье-образ. Приведены примеры численного моделирования распространения излучения через рассмотренные оптические схемы.

Ключевые слова: $\pi/2$ -конвертер мод, фурье-преобразование, произвольные лазерные пучки, численное моделирование распространения излучения.

1. Введение

Длительное время в оптике лазерных пучков уделялось внимание преимущественно модам Эрмита – Гаусса (ЭГ) u_{nm}^{HG} , генерация которых в лазерах достигается без особых затруднений. Моды Лагерра – Гаусса (ЛГ) u_{pl}^{LG} , являющиеся столь же общими, как и ЭГ-моды, решениями волнового уравнения в свободном пространстве, оставались практически вне поля зрения, поскольку малейшая анизотропия в лазере, вызванная любой наклонной поверхностью в резонаторе, неоднородными распределениями показателя преломления, потерь или инверсии активной среды, нарушает столь необходимую для генерации ЛГ-мод цилиндрическую симметрию. В некоторых случаях генерация ЛГ-мод наблюдалась, но это были, как правило, моды с угловой зависимостью поля вида $\cos l\varphi$ (с аксиально-симметричным многопестковым распределением поля), а не $\exp(i l\varphi)$, как должно быть в общем случае. Изображения пучков с распределением интенсивности, пропорциональным $\cos^2 l\varphi$, можно найти во многих обзорах и монографиях по лазерам (см., напр., [1]). Начиная с работы [2], ситуация кардинально изменилась. Было показано, что, используя астигматические преобразования, можно осуществить конверсию ЭГ-мод в ЛГ-моды. Позже были продемонстрированы возможности генерации ЛГ-мод общего вида в лазерах [3, 4] и получения их пассивным способом – с помощью голографических дифракционных элементов [5, 6].

Особенностью ЛГ-мод общего вида является наличие углового момента, равного lh на фотон, и сингулярности на волновом фронте, что оказывается существенным в самых разных ситуациях. С помощью ЛГ-мод возможна, например, реализация инвертированного «оптического

пинцета», предназначенного для манипуляций с микро-объектами [7]. Интерес представляет также воздействие пучков, обладающих большим угловым моментом, на атомные системы [8, 9]. Анализ свойств световых пучков с фазовыми сингулярностями указывает на целый ряд особенностей их распространения в свободном пространстве [10] и в нелинейных средах [11, 12].

Очевидно, что расширение экспериментальных исследований с применением ЛГ-мод во многом определяется надежностью и управляемостью параметров лазерного излучения. Активный способ получения таких мод требует специальных мер, поэтому пассивный метод является более предпочтительным. При этом использование астигматической оптики представляется более эффективным по сравнению с применением голографических элементов (потери излучения минимальны). Генерация же исходного излучения – чистых состояний в виде мод u_{nm}^{HG} , по крайней мере низшего порядка $n + m \geq 1$, может быть осуществлена достаточно тривиально.

Простейшим астигматическим устройством является так называемый $\pi/2$ -конвертер [13], представляющий собой оптическую систему, составленную из двух сферических и двух цилиндрических линз. При определенном соотношении между фокусными расстояниями линз и соответствующем их расположении $\pi/2$ -конвертер преобразует моды u_{nm}^{HG} в моды u_{pl}^{LG} того же порядка $2p + l = n + m$. Условия преобразования предполагают наличие достаточно жесткой связи между рэлеевской длиной моды входного излучения $Z_R = \pi\omega_0^2/\lambda$ (ω_0 – радиус перетяжки пучка), параметрами $\pi/2$ -конвертера и взаимным расположением пучка и оптических элементов. Этот факт дал основание рассматривать моды, удовлетворяющие необходимым условиям, в качестве собственных мод устройства [14]. Результаты некоторых расчетов и экспериментов по определению влияния рассогласования параметров входного излучения с параметрами собственных мод на работу $\pi/2$ -конвертера даны в [15]. В замкнутом виде задача о распространении через конвертер несобственной моды, а тем более – пучка произволь-

Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; тел.: (095)135-03-27, факс: (095)135-20-55, e-mail: amal@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 17 июня 2002 г.

ного вида, решена не была, хотя этот вопрос является определяющим как с практической точки зрения, так и с точки зрения более полного понимания действия $\pi/2$ -конвертера.

2. Астигматический $\pi/2$ -конвертер мод

Астигматический линзовый $\pi/2$ -конвертер мод в его «каноническом» виде [13] может быть представлен как оптическая система (рис.1), которая состоит из пары сферических (L_1, L_4) и пары одинаково ориентированных цилиндрических (L_2, L_3) линз, расположенных между входной (P_1) и выходной (P_2) опорными плоскостями. Расстояние между P_1 и P_2 удобно выбрать равным $4F$, где F – фокусное расстояние сферических линз L_1 и L_4 . Пусть фокусное расстояние цилиндрических линз равно f . Очевидно, что в плоскости yz , проходящей через ось системы, оптическая сила линз L_2, L_3 равна нулю, поэтому любой пучок попадает из плоскости P_1 в P_2 через пару линз L_1, L_4 без изменения масштаба и волнового фронта. Это свойство любой ретрансляционной системы с увеличением, равным -1 . В плоскости xz отсутствие изменений достигается только при определенных условиях. Так, при распространении между линзами L_2 и L_3 «нормальные» моды u_{nm}^{HG} , т.е. моды с симметричным или антисимметричным распределением поля по осям x, y , накапливают фазу Гуи* [13]

$$\theta = (2n + 1) \arctan \frac{d}{\zeta_{Rx}} + (2m + 1) \arctan \frac{d}{\zeta_{Ry}}, \quad (1)$$

где ζ_{Rx} и ζ_{Ry} – рэлеевские длины, или, что то же самое, конфокальные параметры мод в пространстве между линзами L_2 и L_3 , расстояние между которыми равно $2d$. Разность накопленных фаз Гуи нормальных мод u_{nm}^{HG} и u_{nm}^{HG} в этом пространстве

$$\Delta\theta = 2(n - m) \left(\arctan \frac{d}{\zeta_{Rx}} - \arctan \frac{d}{\zeta_{Ry}} \right). \quad (2)$$

Используя методы матричной оптики можно получить, что [13]

$$\frac{\zeta_{Ry}}{d} = \frac{d}{\zeta_{Rx}} = \left(\frac{1 - d/f}{1 + d/f} \right)^2 \quad (3)$$

и фаза (2) лежит в пределах от нуля до π в зависимости от отношения d/f . Если перетяжку моды излучения u_{nm}^{HG} расположить в плоскости P_1 и выполнить условия

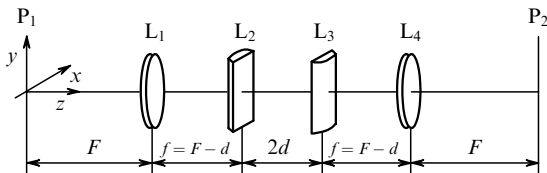


Рис.1. Оптическая схема $\pi/2$ -конвертера лазерных мод.

*В современной русскоязычной научной литературе термин «фаза Гуи» практически отсутствует, но имя Гуи известно и его работы, хотя и не в связи с фазой Гуи, активно обсуждались в начале XX века [16]. Краткий обзор различных физических интерпретаций фазы Гуи дан в [17], а подробное обсуждение ее проявлений при распространении лазерных мод имеется в [18].

$$\frac{\pi w_0^2}{\lambda} = Z_{Rx} = Z_{Ry} = F, \quad d = \frac{f}{\sqrt{2}}, \quad f = \frac{F\sqrt{2}}{\sqrt{2} + 1}, \quad (4)$$

то при $n - m = 1$ из соотношения (2) будем иметь $\Delta\theta = \pi/2$. При этом схема на рис.1 приобретает уникальное свойство: любая мода u_{nm}^{HG} , повернутая относительно осей x, y на угол 45° (далее «диагональная» мода), с перетяжкой в плоскости P_1 после распространения через оптическую систему появляется в плоскости P_2 как соответствующая мода u_{pl}^{LG} ($2p + l = n + m$). Например, диагональная мода u_{01}^{HG} может быть представлена в виде суммы двух нормальных (не повернутых) мод (рис.2,а):

$$u_{01}^{HG} \left(\frac{x - y}{w_0}, \frac{x + y}{w_0} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{01}^{HG} \left(\frac{x\sqrt{2}}{w_0}, \frac{y\sqrt{2}}{w_0} \right) + \frac{1}{\sqrt{2}} u_{10}^{HG} \left(\frac{x\sqrt{2}}{w_0}, \frac{y\sqrt{2}}{w_0} \right). \quad (5)$$

И поскольку распространение нормальных мод между линзами L_2 и L_3 приводит к появлению фазового сдвига (разности накопленных фаз Гуи) $\pi/2$, в выходной плоскости P_2 будем иметь

$$u_{01}^{LG} = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{01}^{HG} - i \frac{1}{\sqrt{2}} u_{10}^{HG}, \quad (6)$$

где для краткости переменные опущены. Таким образом, имея во входной плоскости пучок, сечение которого показано на рис.2,а, на выходе схемы рис.1 мы получаем моду u_{01}^{LG} (рис.2,б). Волновой фронт этой моды имеет вид винта Архимеда с периодом (шагом винта) 2π . Такое же преобразование будет получено для любой диагональной моды u_{nm}^{HG} , у которой индексы n и m не равны друг другу. Период изменения фазы на волновом фронте при этом будет равен $2|n - m|\pi$ (многозаходный винт Архимеда).

Между разложением диагональных ЭГ-мод и ЛГ-мод первого порядка ($n + m = 2p + l = 1$) по нормальным модам и соответствующим разложением поляризованных состояний излучения по базисам из двух линейных или двух круговых (левой и правой) поляризацй усматривается почти точная аналогия. Более того, для $\pi/2$ -конвертера, как и для четвертьволновой пластинки, можно указать соответствующие «быструю» и «медленную» оси (y и x на рис.1). Это позволило, несмотря на то что каждый из базисов ортогональных поляризацй (линейных и круговых) состоит всего из двух векторов, а базисы мод бесконечномерны, развить матричный фор-

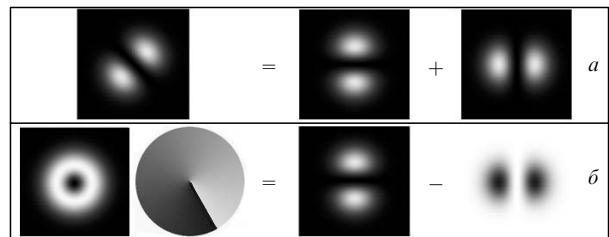


Рис.2. Разложение мод $u_{01}^{HG}((x - y)/\sqrt{2}, (x + y)/\sqrt{2})$ (а) и $u_{01}^{LG}(x, y)$ (б) по нормальным модам $u_{01}^{HG}(x, y)$ и $u_{10}^{HG}(x, y)$. Для моды ЛГ показан вид волнового фронта; сдвинутый по фазе на $\pi/2$ компонент дан в негативном изображении.

мализм [19], схожий с методом Джонаса [20]. Его наглядность, во всяком случае для мод первого порядка, оказывается весьма полезной.

3. Анализ некоторых свойств $\pi/2$ -конвертера мод методами матричной оптики

Авторы, предложившие схему $\pi/2$ -конвертера, приведенную на рис.1, нашли условия, при которых накопление фазы $\Delta\theta = \pi/2$ происходит между двумя одинаковыми цилиндрическими линзами L_2 и L_3 с симметричным относительно них расположением перетяжки взаимно ортогональных нормальных мод u_{nm}^{HG} и u_{nm}^{HG} . Для достижения этой цели была использована дополнительная линза L_1 , формирующая необходимые параметры пучка в плоскости линзы L_2 . Вторая сферическая линза L_4 лишь делает оптическую схему полностью симметричной, восстанавливая в плоскости P_2 плоский волновой фронт исходных нормальных мод; для конверсии мод, удовлетворяющих условиям (4), она не нужна. Добавление в схему на рис.1 линзы L_4 приводит к тому, что $ABCD$ -матрицы в плоскостях xz и yz приобретают весьма простой вид:

$$M_{xz}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -F \\ 1/F & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{yz}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Иными словами, как отмечалось выше, в плоскости yz любое распределение пучка переносится из плоскости P_1 в P_2 с единственным изменением – инверсией $u(x, y) \rightarrow u(x, -y)$. В плоскости xz в соответствии с правилом преобразования гауссовых пучков [20] имеем

$$\left(\frac{1}{R_{x\text{in}}} - i\frac{\lambda}{\pi w_{x\text{in}}^2}\right) \left(\frac{1}{R_{x\text{out}}} - i\frac{\lambda}{\pi w_{x\text{out}}^2}\right) = -\frac{1}{F^2}. \quad (8)$$

Считая, что радиус кривизны волнового фронта $R_{x\text{in}} = \infty$ (перетяжка находится в опорной плоскости P_1), получаем $R_{x\text{out}} = \infty$ и

$$w_{x\text{in}}w_{x\text{out}} = \frac{\lambda F}{\pi}, \quad (9)$$

что аналогично связи между размерами вырожденных эллиптических мод на зеркалах конфокального резонатора [21]. Приведенное в (4) условие для собственных мод $\pi/2$ -конвертера $\pi w_0^2/\lambda = Z_{R_x} = F$ есть лишь частный случай выражения (9). Рассмотрим, будут ли все диагональные моды u_{nm}^{HG} , удовлетворяющие в плоскости xz соотношению (9), трансформироваться в соответствующие ЛГ-моды.

Согласно [22], если пучок проходит оптическую схему, описываемую некоторой $ABCD$ -матрицей, то накопленная им фаза Гауи может быть найдена из соотношения

$$\theta = \arctan \left[\frac{B\lambda}{\pi w_{\text{in}}^2} \left(A + \frac{B}{R_{\text{in}}} \right)^{-1} \right]. \quad (10)$$

Из (10) следует, что в плоскости yz в соответствии с (7) фаза $\theta_{yz} = k_y\pi$ для любого пучка. В xz -плоскости $\theta_{xz} = \pi/2 + k_x\pi$ ($k_x, k_y = 0, 1, 2, \dots$) только в том случае, если, как и было принято выше, $R_{x\text{in}} = \infty$. Точные значения k_y и k_x могут быть установлены при использовании формулы (10) для последовательных отрезков оптической

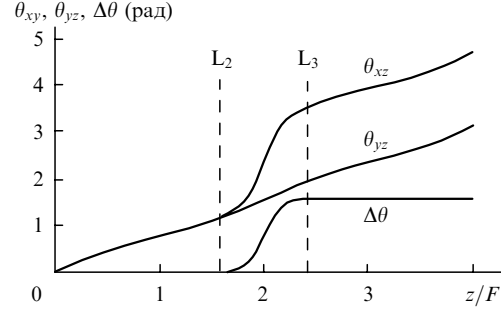


Рис.3. Изменение вдоль оптической оси $\pi/2$ -конвертера накопленных фаз Гауи собственных мод в плоскостях xz и yz и их разности.

схемы $\pi/2$ -конвертера. Вычисленные таким образом накопленные фазы Гауи $\theta_{xz}(z)$, $\theta_{yz}(z)$ и их разность $\Delta\theta(z)$ в ортогональных плоскостях xz и yz для собственных мод (т. е. при $Z_{R_x} = Z_{R_y} = F$) приведены на рис.3.

Очевидны два результата. Первый состоит в том, что после цилиндрической линзы L_3 разность накопленных фаз Гауи становится постоянной ($\Delta\theta(z) = \pi/2$), поскольку накопление сдвига фаз между нормальными модами u_{nm}^{HG} и u_{nm}^{HG} имеет место только в пространстве между цилиндрическими линзами. Второй результат заключается в том, что в плоскости xz полная накопленная фаза $\theta_{xz} = 3\pi/2$, в то время как в плоскости yz имеем $\theta_{yz} = \pi$. Таким образом, переходя на язык фурье-преобразований (ФП), можно утверждать, что для входных пучков с плоским волновым фронтом ($R_{x\text{in}} = \infty$) это эквивалентно трем и двум ФП, осуществляемым оптической схемой $\pi/2$ -конвертера (рис.1). Отсюда следует, что несобственные (в соответствии с (4)) диагональные ЭГ-моды $\pi/2$ -конвертера также могут преобразовываться в соответствующие ЛГ-моды, или, более точно (поскольку должно быть выполнено условие (9)), что эти несобственные моды преобразуются в соответствующие эллиптические ЛГ-моды. Такое преобразование диктуется видом матриц $\pi/2$ -конвертера (7).

В дополнение к сказанному отметим, что при двух ФП любое четное распределение поля переходит само в себя. Для нечетных распределений происходит инверсия. В нашем случае при двух ФП в плоскости yz и трех ФП в плоскости xz имеем

$$F_y[F_y[u(x, y)]] = u(x, -y), \quad (11)$$

$$F_x[F_x[F_x[u(x, y)]]] = u(-x, y),$$

где $F_\xi[f(\xi)]$ обозначает ФП по координате ξ . Чтобы при этом правая часть второго выражения в (11) совпала с исходным распределением (или его инверсией) нужны определенные условия [23]. Для ЭГ-мод эти условия выполняются. Как можно заметить, ход изменения фазы Гауи при трех ФП в xz -плоскости $\pi/2$ -конвертера (рис.3) означает, что в пространстве между цилиндрическими линзами симметрично располагаются две промежуточные фурье-сопряженные плоскости. Вычисление дает, что расстояние между ними равно $2F(3 - 2\sqrt{2})$. В плоскости yz фурье-сопряженная с P_1 и P_2 плоскость находится при $z = 2F$.

Анализ действия $\pi/2$ -конвертера для несобственных мод в общем случае удобно провести с помощью методов тензорной оптики [24]. Соответствующая матрица 4×4 имеет вид

$$T_{\pi/2} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -F & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1/F & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где A, B, C и D – матрицы 2×2 , составленные из элементов матриц (7). Входной пучок общего вида зададим комплексным тензором кривизны (аналогом комплексного вектора кривизны q^{-1} обычной матричной оптики)

$$Q_{in}^{-1} = \begin{pmatrix} -i\lambda/(\pi w^2) & 1/R \\ 1/R & -i\lambda/(\pi w^2) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тензор (13) описывает входной гауссов пучок в плоскости P_1 с одинаковыми размерами перетяжек w по осям x и y , обладающий седлообразным волновым фронтом с максимальной (минимальной) кривизной R ($-R$) вдоль направлений, ориентированных под углом 45° к оси x (оси y). Удобно выразить величину w через параметры собственной моды, т. е. принять $w = Mw_0 = M(\lambda F/\pi)^{1/2}$, где $M > 0$. Используя (12), (13) и соответствующее соотношение Коллинза [24], получаем комплексный тензор кривизны пучка на выходе $\pi/2$ -конвертера

$$Q_{out}^{-1} = \begin{pmatrix} -iM^2/F & iM^2/R \\ iM^2/R & -i[1/(FM^2) + FM^2/R^2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\alpha & i\rho \\ i\rho & -i\beta \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Так как все элементы тензора (14) комплексны, а элементы на его главной диагонали не равны друг другу, получаем, что гауссову пучку в плоскости P_1 , имеющему седлообразный волновой фронт, в плоскости P_2 отвечает эллиптический пучок с плоским волновым фронтом, который повернут на угол

$$\varphi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2M^4FR}{M^4(F^2 - R^2) + R^2}. \quad (15)$$

При этом отношение размеров полуосей эллипса (аспектное отношение)

$$a = \left(\frac{\alpha - \beta \tan^2 \varphi}{\beta - \alpha \tan^2 \varphi} \right)^{1/2}. \quad (16)$$

Вследствие принципа обратимости в оптике, меняя вход и выход местами, можно утверждать, что верно и обратное: эллиптическому пучку с плоским волновым фронтом и аспектным отношением a , повернутому на входе в $\pi/2$ -конвертер на некоторый угол φ , на выходе соответствует круговой пучок с седлообразным волновым фронтом.

Результаты численного эксперимента для несобственных мод u_{00}^{HG} и u_{01}^{HG} на входе в $\pi/2$ -конвертер приведены на рис.4 (здесь и на рис. 7, 8 изменениям фазы на 2π соответствует переход от черного к белому на линейной шкале). Расчеты выполнены при параметрах пучка (13) $M = 2$ и $R = 166.7$ см с использованием программы ФРЕНЕЛЬ, разработанной для моделирования распространения лазерного излучения по оптическим системам. Численные расчеты основаны на дифракционной теории Френеля с применением специального алгоритма автоподстройки шкалы, позволяющего минимизировать элай-

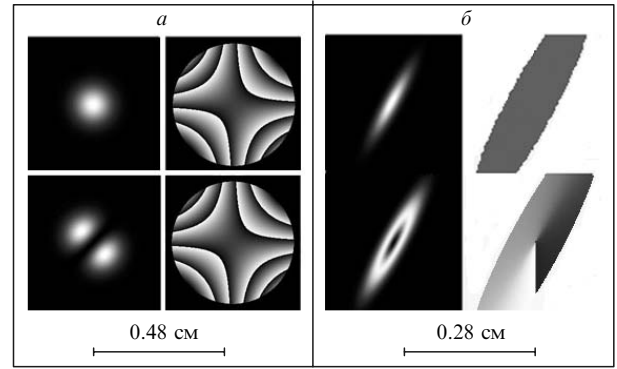


Рис.4. Несобственные моды конвертера $u_{00}^{HG}(x, y)$, $u_{01}^{HG}((x - y)/\sqrt{2}, (x + y)/\sqrt{2})$ и их волновые фронты на входе (а) и выходе (б) конвертера; параметры мод приведены в тексте.

зинг [25], т. е. счетную ошибку, возникающую при использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Появление эллиптичности и других искажений для несобственных мод не является единственным отличием от случая собственных мод $\pi/2$ -конвертера. Зависимости от z размера пучка в главных плоскостях конвертера для указанных случаев даны на рис.5, а, б. В то время как для собственной моды размеры пучка в плоскостях xz и yz различаются только в пространстве между цилиндрическими линзами, для несобственной моды, описываемой тензором (13), различие наблюдается на всей длине конвертера. В соответствии с этим изменение накопленных фаз Гуи для несобственной моды в плоскостях xz и yz происходит довольно прихотливым образом и требуемая разность $\Delta\theta = \pi/2$ достигается только в плоскости P_2 , как показано на рис.5, в.

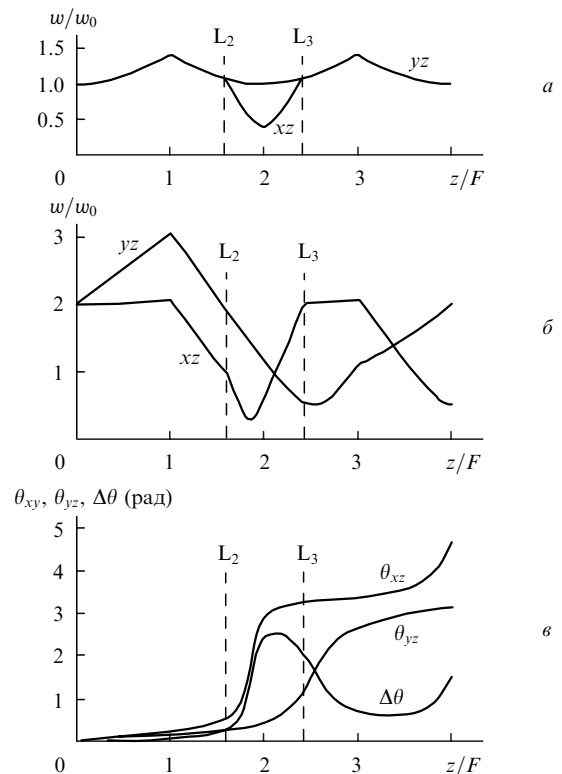


Рис.5. Изменения в плоскостях xz и yz размера собственных (а) и несобственных (б) мод, а также накопленных фаз Гуи несобственных мод и их разности (в) вдоль оптической оси $\pi/2$ -конвертера; параметры несобственных мод те же, что и для рис.4.

Необходимо отметить, что, поскольку собственная ЛГ-мода в $\pi/2$ -конвертере формируется сразу за цилиндрической линзой L_3 , далее из этой плоскости она распространяется в свободном пространстве с сохранением разности накопленных фаз Гуи между составляющими нормальными компонентами (ЭГ-модами). Эллиптическая ЛГ-мода, получаемая из несобственной ЭГ-моды конвертера, существует только в выходной плоскости P_2 . При этом наличие или отсутствие внутри конвертера точек, в которых $\Delta\theta = \pi/2$ зависит от параметров входного пучка (13). При распространении в свободном пространстве за плоскостью P_2 эллиптическая ЛГ-мода разрушается, восстанавливаясь только в дальней зоне. Последнее означает, что в случае необходимости эллиптическая ЛГ-мода будет получена и в фокусе сферической линзы, что может оказаться более предпочтительным при манипуляциях с микрочастицами.

В общем случае любой произвольный пучок $u(x, y)$ может быть представлен в плоскости P_1 в виде разложения по нормальным собственным модам $u_{nm}^{\text{HG}}(x, y)$:

$$u_{P_1}(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} u_{nm}^{\text{HG}}(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} u_n^{\text{HG}}\left(\frac{x\sqrt{2}}{w}\right) u_m^{\text{HG}}\left(\frac{y\sqrt{2}}{w}\right), \quad (17)$$

где $u_j^{\text{HG}}(\xi\sqrt{2}/w)$ – функция ЭГ j -го порядка от аргумента ξ с масштабом w ; $a_{n,m}$ – некоторые постоянные коэффициенты. Каждый член суммы (17) есть произведение функций от независимых ортогональных координат, поэтому при распространении пучка через $\pi/2$ -конвертер изменение этих функций может рассматриваться независимо. Благодаря виду матриц в xz - и yz -плоскостях (7) и циклической природе ФП мы имеем приведенные выше соотношения (11). Для поля пучка (17) в выходной плоскости P_2 получаем

$$u_{P_2}(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} F_x \left[u_n^{\text{HG}}\left(-\frac{x\sqrt{2}}{w}\right) \right] u_m^{\text{HG}}\left(-\frac{y\sqrt{2}}{w}\right). \quad (18)$$

Выражение (18) показывает, что $\pi/2$ -конвертер преобразует произвольное двумерное поле по одной координате как одномерный преобразователь Фурье (ПРФ), а по другой координате он осуществляет только инверсию.

4. Два последовательно установленных $\pi/2$ -конвертера мод

Два $\pi/2$ -конвертера, установленные друг за другом, в зависимости от угла их поворота вокруг оптической оси (φ_1, φ_2) образуют достаточно различающиеся по действию оптические устройства. В связи с этим рассмотрим три варианта.

4.1. «Параллельные» $\pi/2$ -конвертеры (π -конвертер)

Из результатов предыдущего раздела следует, что поскольку $\pi/2$ -конвертер может рассматриваться как одномерный ПРФ двумерного распределения поля, то два $\pi/2$ -конвертера, установленные друг за другом (рис.6), с цилиндрическими линзами, которые ориентированы одинаково ($\varphi_1 = \varphi_2$), могут служить в качестве цилиндрического ретранслятора пучка. Если при этом параметры линз $\pi/2$ -конвертеров различаются, имеем цилиндрический телескоп Кеплера, или расширитель пучка, действующий только в одном направлении. Даже по сравнению с подобными устройствами на основе призм цилиндрический расширитель может рассматриваться как идеальный, т. к. в одном из направлений размер пучка полностью сохраняется. Действительно, поскольку фокусное расстояние сферического компонента конвертера является его главным параметром, то, используя (7), для системы двух конвертеров получаем

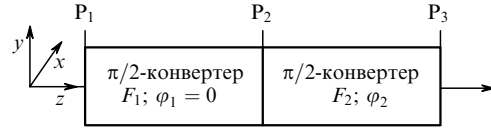


Рис.6. Последовательность двух $\pi/2$ -конвертеров с произвольной ориентацией вокруг оптической оси.

дрический телескоп Кеплера, или расширитель пучка, действующий только в одном направлении. Даже по сравнению с подобными устройствами на основе призм цилиндрический расширитель может рассматриваться как идеальный, т. к. в одном из направлений размер пучка полностью сохраняется. Действительно, поскольку фокусное расстояние сферического компонента конвертера является его главным параметром, то, используя (7), для системы двух конвертеров получаем

$$M_{xz}\left(F_2, \frac{\pi}{2}\right) \times M_{xz}\left(F_1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} -F_2/F_1 & 0 \\ 0 & -F_1/F_2 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$M_{yz}\left(F_2, \frac{\pi}{2}\right) \times M_{yz}\left(F_1, \frac{\pi}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как в обеих матрицах (19) элемент B равен нулю, то вычисление накопленных фаз Гуи по формуле (10) дает $\theta_{xz} = k_x\pi, \theta_{yz} = k_y\pi$ ($k_x, k_y = 0, 1, 2, \dots$) для любого пучка. При этом в соответствии с результатами разд.3 имеем $k_x = 3, k_y = 2$ и $\Delta\theta = \pi$. Таким образом, система, приведенная на рис.6, при $\varphi_1 = \varphi_2$ есть астигматический π -конвертер мод. Продолжая циклические ФП (17) до плоскости P_3 , получаем

$$u_{P_3}(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} u_n^{\text{HG}}\left(-\frac{x F_1 \sqrt{2}}{w F_2}\right) u_m^{\text{HG}}\left(\frac{y \sqrt{2}}{w}\right), \quad (20)$$

что отражает изменение масштаба пучка вдоль оси x , равное F_2/F_1 . Так как не существует ограничений на собственные моды π -конвертера, его действие не зависит ни от формы пучка, ни от кривизны его волнового фронта. Это показано на рис.7 при $F_2/F_1 = 1/2$ для ЛГ-моды (которая является собственной для первого $\pi/2$ -конвертера в последовательности) и произвольного пучка – транспаранта заглавной буквы F, освещаемого когерентным излучением. Дадим пояснение.

ЛГ-мода на входе π -конвертера (плоскость P_1 , рис.7,а) представима в виде (6), и ее распространение через первый $\pi/2$ -конвертер приводит к появлению дополнительного сдвига фазы у компоненты $u_{10}^{\text{HG}}(x, y)$. В связи с этим в плоскости P_2 имеем диагональную моду u_{10}^{HG} с плоским волновым фронтом:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} u_{01}^{\text{HG}}\left(\frac{x\sqrt{2}}{w_0}, \frac{y\sqrt{2}}{w_0}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}} u_{10}^{\text{HG}}\left(\frac{x\sqrt{2}}{w_0}, \frac{y\sqrt{2}}{w_0}\right) = u_{10}^{\text{HG}}\left(\frac{x+y}{w_0}, \frac{x-y}{w_0}\right). \quad (21)$$

Эта мода не является собственной для второго $\pi/2$ -конвертера (ограничения (4) не выполняются), поэтому в соответствии с (14) и (15) получаем в плоскости P_3 эллиптическую ЛГ-моду с инвертированным ходом фазы ($l = -1$) и измененным масштабом по оси x :

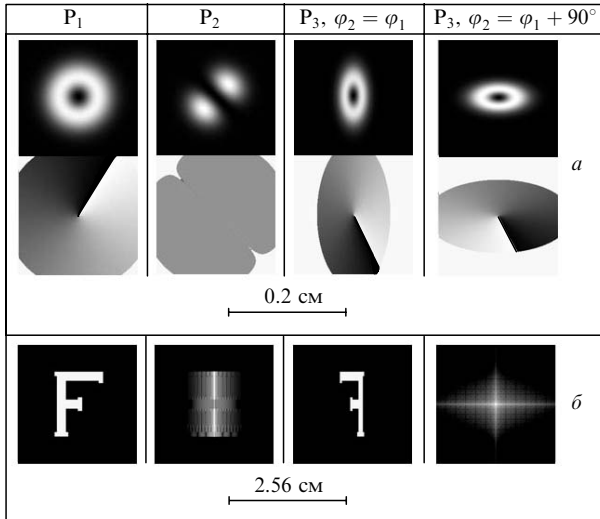


Рис. 7. Преобразование моды $u_{01}^{LG}(x, y)$ (а) и произвольного пучка (б) последовательно двумя $\pi/2$ -конвертерами (рис.6) с различными оптическими параметрами ($F_2/F_1 = 1/2$). Над столбцами указаны соответствующие опорные плоскости и углы ориентации второго конвертера.

$$u_{0,-1}^{LG}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} u_{01}^{HG} \left(\frac{x F_1 \sqrt{2}}{w_0 F_2}, \frac{y \sqrt{2}}{w_0} \right) + i \frac{1}{\sqrt{2}} u_{10}^{HG} \left(\frac{x F_1 \sqrt{2}}{w_0 F_2}, \frac{y \sqrt{2}}{w_0} \right). \quad (22)$$

Преобразование произвольного пучка (рис.7,б) может быть описано в тех же терминах, что и выше, но гораздо проще сделать это несколько иначе. Поскольку нам известно, что первый $\pi/2$ -конвертер в последовательности (рис.6) действует как «идеальная цилиндрическая линза» (в том смысле, что с полем в одном из направлений ничего не происходит), то в плоскости P_2 мы естественным образом получаем одномерное ФП (18), т.е. пучок «фокусируется» в линию вдоль оси y (рис.7,б, вторая колонка). Вторая цилиндрическая линза (второй $\pi/2$ -конвертер) с другим фокусным расстоянием восстанавливает пучок по его ФП, инвертируя x -координаты и меняя масштаб согласно соотношению $F_2/F_1 = 1/2$ (рис.7,б, третья колонка). Главное различие для пучков на рис.7,а,б состоит в том, что первый пучок относится к типу фурье-самосопряженных [23], в то время как второй таковым не является.

4.2. «Ортогональные» $\pi/2$ -конвертеры

В данном случае для $\pi/2$ -конвертеров $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$, поэтому согласно результатам разд.3 при распространении излучения число ФП, выполняемых в плоскостях xz и yz , равно пяти. Пусть параметры $\pi/2$ -конвертеров различны: $F_2 \neq F_1$. Поскольку четыре ФП полностью восстанавливают исходное поле, матрицы распространения из плоскости P_1 в P_3 точно соответствуют двум однократным одномерным ФП, выполняемым независимо по осям x и y с цилиндрическими линзами, имеющими различные фокусные расстояния:

$$M_{xz} = \begin{pmatrix} 0 & F_1 \\ -1/F_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{yz} = \begin{pmatrix} 0 & F_2 \\ -1/F_2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Отметим различие знаков в первой из матриц (7) и в матрицах (23), которое является следствием выполнения трех и пяти ФП соответственно.

Распределения интенсивности тех же пучков, которые использовались в качестве примера в п.4.1, для случая ортогональных $\pi/2$ -конвертеров даны на рис.7 в четвертой колонке. Эти распределения суть ФП соответствующих изображений, приведенных в первой колонке, с различными масштабами по осям, отношение которых дается выражением $F_2/F_1 = 1/2$. Различия в характере распределений объясняются так же, как и в случае $\varphi_2 = \varphi_1$ (см. в конце п.4.1).

4.3. Произвольно ориентированные $\pi/2$ -конвертеры

Выше было показано, что два последовательно установленных $\pi/2$ -конвертера при углах $\varphi_2 = \varphi_1$ или $\varphi_2 = \varphi_1 + 90^\circ$ позволяют получать в одной и той же плоскости P_3 или изображение исходного распределения, или его ФП. Формирование изображения связано с четным числом ФП в обеих плоскостях (xz и yz), в то время как нечетному числу ФП отвечает фурье-образ. Для схемы на рис.6 в первом случае число ФП равно шести и четырем, во втором – пяти и пяти. Согласно этому накопленная разность фаз Гуи $\Delta\theta = \pi$ или $\Delta\theta = 0$. Это наводит на мысль, что при промежуточных ориентациях $\pi/2$ -конвертеров может быть реализована схема некоего « $\Delta\theta$ -конвертера» мод [26] с переменным $\Delta\theta$. При выяснении того, верно ли такое предположение, ограничимся случаем двух идентичных $\pi/2$ -конвертеров ($F_1 = F_2 = F$) и примем $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 90^\circ + \varphi$. Поскольку подобная схема представляет собой астигматическую систему общего вида, то распространение пучков в плоскостях xz и yz не может рассматриваться независимо и необходимо применять методы тензорной оптики. Однако сначала для собственных ЭГ-мод порядка $n + m = 1$ воспользуемся поляризационной аналогией, о которой упоминалось в конце разд.2.

Возьмем две четвертьволновые пластинки, оси первой из которых ориентированы по осям x и y ($\varphi_1 = 0$). Вторую повернем на произвольный угол $\varphi_2 = 90^\circ + \varphi$. Матрицы Джонса для этих пластинок имеют вид [20]

$$J_1 \left(\frac{\lambda}{4} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (24)$$

$$J_2 \left(\frac{\lambda}{4} \right) = \begin{pmatrix} S^2 - iC^2 & CS(1+i) \\ CS(1+i) & S^2 - iC^2 \end{pmatrix},$$

где $C = \cos \varphi$; $S = \sin \varphi$. Для последовательности двух пластинок получим

$$J_s = J_2 \left(\frac{\lambda}{4} \right) \times J_1 \left(\frac{\lambda}{4} \right) = \begin{pmatrix} S^2 - iC^2 & CS(1-i) \\ CS(1+i) & -S^2 - iC^2 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Если пропустить через эти пластинки излучение с линейной поляризацией, ориентированной под углом 45° к осям x, y , вектор Джонса которого есть

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(аналог диагональной собственной моды $\pi/2$ -конвертера), то получим

$$J_s \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (S - iC) \begin{pmatrix} C + S \\ C - S \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Правая часть (26) является сдвинутым по фазе линейно поляризованным излучением с вектором поляризации, повернутым на угол $-\varphi$.

Если пропустить через пластинки излучение с круговой поляризацией, вектор Джонса которого есть

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

(аналог собственной ЛГ-моды $\pi/2$ -конвертера), получим

$$\begin{aligned} J_s \times \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} S(S - C) - iC(C + S) \\ C(S - C) + iS(C + S) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} (1 + C_2 S_2)^{1/2} \exp(-i\phi_1) \\ (1 - C_2 S_2)^{1/2} \exp(+i\phi_2) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (27)$$

т. е. излучение приобретает некоторую эллиптическую поляризацию ($C_2 = \cos 2\varphi$, $S_2 = \sin 2\varphi$).

Подобный же результат будем иметь для диагональной собственной моды u_{01}^{HG} или собственной ЛГ-моды u_{01}^{LG} , рассматривая их распространение через два произвольным образом ориентированных $\pi/2$ -конвертера. Например, моде u_{01}^{HG} на выходе первого конвертера (в плоскости P_2) соответствует мода u_{01}^{LG} (6). В повернутой системе координат второго конвертера к этой моде должен быть добавлен только фазовый множитель $\exp[i(\varphi + \pi/2)]$, т. к. амплитудная составляющая ЛГ-моды не меняется. Во втором конвертере происходит преобразование моды u_{01}^{LG} в ЭГ-моду, после чего надо вернуться в исходную систему координат. Прделав все вычисления, получим, что в плоскости P_3 поле пропорционально выражению

$$(S - iC)[(S + C)u_{10}^{\text{HG}} + (S - C)u_{01}^{\text{HG}}], \quad (28)$$

т. е. является исходной диагональной модой u_{01}^{HG} , повернутой на угол $-\varphi$. Постоянный фазовый множитель, приобретенный при повороте второго $\pi/2$ -конвертера относительно оси моды u_{01}^{LG} , полученной на выходе первого, не исчезает. В общем случае ($n + m > 1$) фазовый сомножитель имеет вид $\exp[i(n - m)(90^\circ + \varphi)]$.

Преобразования собственной ЛГ-моды, как это следует и из поляризационной аналогии (27), оказываются более сложными. В этом случае оправдывается замечание авторов работы [26], которое кратко сводится к следующему: что является простым для ЭГ-моды (например, поворот), для ЛГ-моды оказывается сложным (изменением фазы), и наоборот.

Теперь рассмотрим случай произвольной ЭГ-моды. Зададим пучок на входе в систему тензором кривизны

$$Q_{\text{in}}^{-1} = \begin{pmatrix} -i\lambda/(\pi w_x^2) & 1/R \\ 1/R & -i\lambda/(\pi w_y^2) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где, в отличие от (13), пучок имеет некоторую эллиптическую, причем главные оси эллипса совпадают с осями x и y . Это необходимо, чтобы исключить неопределенность в нахождении угла поворота пучка в отсутствие эллиптичности в системе, поскольку при анализе методами тензорной (матричной) оптики используется толь-

ко гауссова огибающая мод (индексы мод n и m не учитываются).

Первый $\pi/2$ -конвертер в схеме на рис.6 задан тензором (12). Для второго мы должны найти тензор

$$T_{\pi/2}(90^\circ + \varphi) = R(-90^\circ - \varphi)T_{\pi/2}(0)R(90^\circ + \varphi), \quad (30)$$

где

$$R(\varphi) = \begin{pmatrix} C & -S & 0 & 0 \\ S & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & -S \\ 0 & 0 & S & C \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$T_{\pi/2}(90^\circ + \varphi) = \begin{pmatrix} -C^2 & CS & -FS^2 & -FCS \\ CS & -S^2 & -FCS & -FC^2 \\ S^2/F & CS/F & -C^2 & CS \\ CS/F & C^2/F & CS & -S^2 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Окончательно для всей оптической схемы получим

$$T_{\pi/2}(90^\circ + \varphi)T_{\pi/2}(0) = \begin{pmatrix} A_s & B_s \\ C_s & D_s \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$= \begin{pmatrix} -S^2 & -CS & FC^2 & FCS \\ -CS & S^2 & -FCS & FC^2 \\ -C^2/F & -CS/F & -S^2 & -CS \\ CS/F & -C^2/F & -CS & S^2 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

При входном пучке, заданном тензором кривизны (29), вычисления согласно [24] дают для выходного пучка тензор

$$Q_{\text{out}}^{-1} = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} \rho_{\text{out}}'' - i\mu_{x\text{out}}' & \rho_{\text{out}}' - i\mu_{\text{out}}' \\ \rho_{\text{out}}' - i\mu_{\text{out}}' & -\rho_{\text{out}}'' - i\mu_{y\text{out}}' \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где

$$\mu_{x\text{out}} = \lambda \left(\frac{S^2}{w_x^2} + \frac{C^2}{w_y^2} \right) \frac{1}{\pi}, \quad \mu_{y\text{out}} = \lambda \left(\frac{C^2}{w_x^2} + \frac{S^2}{w_y^2} \right) \frac{1}{\pi};$$

$$\mu_{\text{out}}' = S_2 \lambda \left(\frac{1}{w_y^2} - \frac{1}{w_x^2} \right) \frac{1}{\pi};$$

$$\rho_{\text{out}}' = C_2 S_2 \left[1 - F^2 \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 w_x^2 w_y^2} + \frac{1}{R^2} \right) \right] \frac{1}{2F} - \frac{C_2^2}{R};$$

$$\rho_{\text{out}}'' = S_2^2 \left[1 - F^2 \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 w_x^2 w_y^2} + \frac{1}{R^2} \right) \right] \frac{1}{2F} - \frac{C_2 S_2}{R};$$

$$A = S^2 - \frac{S_2 F}{R} + C^2 F^2 \left(\frac{\lambda^2}{\pi^2 w_x^2 w_y^2} + \frac{1}{R^2} \right).$$

Используя (33), для ориентации осей эллипса на выходе двух $\pi/2$ -конвертеров с $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = 90^\circ + \varphi$ имеем

$$\varphi_{\text{el}} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\mu_{\text{out}}'}{\mu_{y\text{out}}' - \mu_{x\text{out}}'} = -\varphi. \quad (34)$$

Таким образом, угол поворота не зависит от параметров тензора (29), т. е. ориентация эллипса, соответствующего распределению интенсивности пучка, как и для собственной ЭГ-моды, «следит» за положением второго $\pi/2$ -кон-

вертера в схеме на рис.6, поворачиваясь в противоположную сторону. Волновой фронт пучка остается седлообразным, т. к. знаки кривизн (действительных частей элементов на главной оси тензора (33)) противоположны. Положение осей седлообразного (гиперболического) волнового фронта определяется углом

$$\varphi_{wf} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\rho'_{out}}{\rho''_{out}} = \frac{1}{2} \arctan(\cot 2\varphi) = 45^\circ - \varphi, \quad (35)$$

и направления максимальной и минимальной кривизн волнового фронта также «отслеживают» положение второго $\pi/2$ -конвертера, причем знак кривизны меняется на противоположный по отношению к знаку на входе.

Предположив, что в (29) $w_x = w_y = Mw_0 = M(\lambda F/\pi)^{1/2}$, получим

$$w_{out} = w_0 \frac{[M^4(S - CF/R^2)^2 + C^2]^{1/2}}{M} \quad (36)$$

и

$$\rho' = C_2 \left[\frac{S_2}{2F} \left(\frac{M^4 - 1}{M^4} - \frac{F^2}{R^2} \right) - \frac{C_2}{R} \right], \quad (37)$$

$$\rho'' = S_2 \left[\frac{S_2}{2F} \left(\frac{M^4 - 1}{M^4} - \frac{F^2}{R^2} \right) - \frac{C_2}{R} \right].$$

Для несобственной ЭГ-моды с $M = 2, R = \infty$ найденные при численном моделировании изменения размера и волнового фронта пучка в выходной плоскости в зависимости от угла поворота второго $\pi/2$ -конвертера показаны на рис.8,а. Эти результаты и расчет по формулам (33)–(36) совпадают. Можно сделать проверку данных формул для собственной ЭГ-моды ($M = 1, R = \infty$), что дает

$$w_{out} = w_0 \left[\left(S - \frac{CF}{R} \right)^2 + C^2 \right]^{1/2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} w_0, \quad (38)$$

$$\rho' = -C_2 \left(\frac{S_2 F}{2R^2} + \frac{C_2}{R} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad (39)$$

$$\rho'' = -S_2 \left(\frac{S_2 F}{2R^2} + \frac{C_2}{R} \right) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

т. е. при $R \rightarrow \infty$ остается только поворот распределения, «отслеживающий» поворот второго $\pi/2$ -конвертера. Таким образом, все способы – от поляризационной аналогии до метода тензорной оптики – дают одинаковое решение.

Для рассмотрения преобразований произвольного пучка на входе двух взаимно повернутых на произвольный угол $\pi/2$ -конвертеров удобно разложить его по диагональным собственным ЭГ-модам первого конвертера:

$$u_{P_1}(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} u_{nm}^{HG} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right). \quad (40)$$

Преобразование (40) при переходе от плоскости P_1 к P_3 , учитывая поворот системы координат и появление фазового множителя $\exp[i(n-m)(90^\circ + \varphi)]$ (см. (28)), можно записать в виде

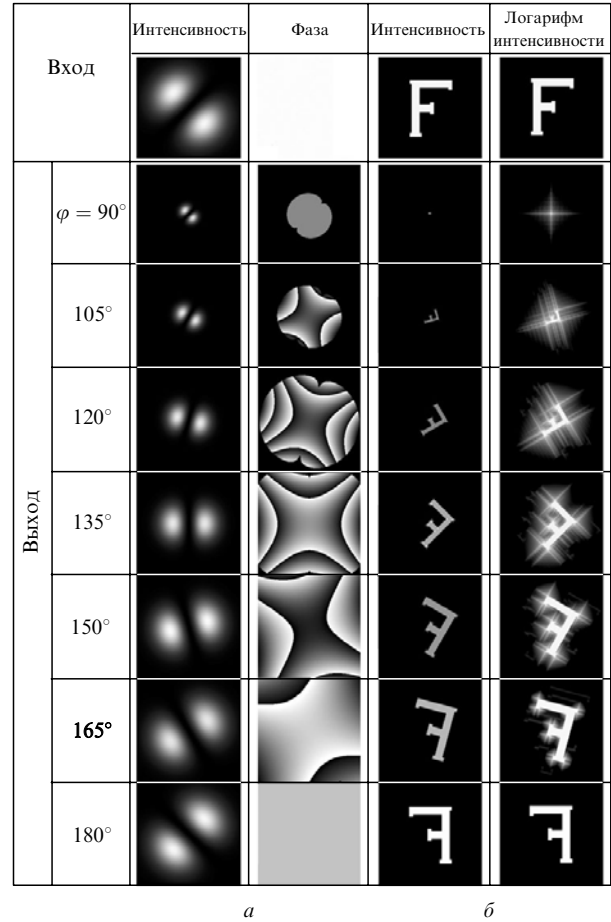


Рис.8. Преобразование несобственной моды $u_{01}^{HG}(x, y)$ (а) и произвольного пучка (б) последовательно двух $\pi/2$ -конвертеров (рис.6) с одинаковыми оптическими параметрами ($F_2 = F_1$) при различной их ориентации. Для произвольного пучка представлен также логарифм интенсивности.

$$u_{P_3}(x, y) = \sum_{n,m} a_{nm} \exp \left[i(n-m) \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \right] \times R_{nm}^{HG}(-\varphi) \left[u_{nm}^{HG} \left(\frac{x-y}{w_0}, \frac{x+y}{w_0} \right) \right], \quad (41)$$

где $R_{nm}^{HG}(-\varphi)$ – оператор поворота [19] ЭГ-моды на угол $-\varphi$. В результате для произвольного пучка в плоскости P_3 имеем сумму тех же мод с теми же, что и на входе, амплитудами, но каждая со своей, отличающейся от исходной, фазой. Таким образом, можно ожидать, что распределение интенсивности для произвольного пучка в плоскости P_3 будет весьма похоже на исходное, но искажено из-за различия дополнительных фазовых коэффициентов у каждого члена суммы (40). Численное моделирование, результаты которого показаны на рис.8 (для визуализации деталей распределения интенсивность дана в линейном и логарифмическом масштабах), подтверждает сказанное.

5. Заключение

Представленный анализ свойств астигматического $\pi/2$ -конвертера при преобразовании собственных и несобственных лазерных мод, а также пучков произвольного вида показал, что действие конвертера сводится к

независимому выполнению в двух ортогональных плоскостях, проходящих через оптическую ось устройства, четного и нечетного числа преобразований Фурье. На основе этого принципа стало возможным предложить целый ряд схем $\pi/2$ -конвертеров [27], отличных от описанной в [13].

Приведены некоторые аналитические соотношения, которые позволяют определить вид искажений, возникающих при преобразовании лазерных пучков в случае отклонения параметров излучения на входе от параметров собственной моды $\pi/2$ -конвертера.

Система из последовательности двух $\pi/2$ -конвертеров, как было показано, позволяет сформировать в заданной плоскости либо изображение объекта (конвертеры ориентированы параллельно), либо его фурье-образ (ориентация конвертеров взаимно ортогональна). При произвольной ориентации конвертеров происходит поворот изображения как собственной, так и несобственной ЭГ-моды (во втором случае – с появлением дополнительного изменения масштаба и седлообразного профиля волнового фронта). Режим $\Delta\theta$ -конвертера ЭГ-мод [26], как было выяснено, для данной схемы не реализуется. Для произвольного пучка преобразования последовательностью двух конвертеров оказываются еще более сложными, чем для несобственной моды.

Применимость приведенных в статье аналитических соотношений проиллюстрирована примерами численного моделирования распространения излучения через рассмотренные оптические схемы.

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17718).

1. Kogelnik H., Li T. *Appl. Opt.*, **5**, 1550 (1966).

2. Abramochkin E., Volostnikov V. *Opt. Commun.*, **83**, 123 (1991).
3. Abramochkin E., Losevsky N., Volostnikov V. *Opt. Commun.*, **141**, 59 (1997).
4. Petrov D.V., Canal F., Torner L. *Opt. Commun.*, **143**, 265 (1997).
5. Баженов В.Ю., Васнецов М.В., Соскин М.С. *Письма в ЖЭТФ*, **52**, 1037 (1990).
6. Heckenberg N.R., et al. *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S951 (1992).
7. O'Neil A.T., Courtial J. *Opt. Commun.*, **193**, 45 (2001).
8. Masalov A.V. *Laser Phys.*, **7**, 751 (1997).
9. Clifford M.A., Arlt J., Courtial J., Dholakia K. *Opt. Commun.*, **156**, 300 (1998).
10. Soskin M.S., Gorshkov V.N., Vassetsov M.V., Malos J.T., Heckenberg N.R. *Phys. Rev. A*, **56**, 4064 (1997).
11. Courtial J., Dholakia K., Allen L., Padgett M.J. *Phys. Rev. A*, **56**, 4193 (1997).
12. Carmon T., Uzdin R., Musslimani Z.H., Segev M., Nepomnyashchy A. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, № 143901 (2001).
13. Beijersbergen M.W., Allen L., van der Veen H.E.L.O., Woerdman J.P. *Opt. Commun.*, **96**, 123 (1993).
14. Van Enk S.J., Nienhuis G. *Opt. Commun.*, **94**, 147 (1992).
15. Courtial J., Padgett M.J. *Opt. Commun.*, **159**, 13 (1999).
16. Соколов Ф.Ф. В сб. *Новые идеи в физике*. Под ред. И.И.Боргмана (СПб: Образование, 1912, № 5, с.15).
17. Ruffin A.B., Rudd J.V., Whitaker J.F., Feng S., Winful H.G. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3410 (1999).
18. Siegman A.E. *Lasers* (Mill Valley, CA: Univ. Science Books, 1986).
19. Allen L., Courtial J., Padgett M.J. *Phys. Rev. E*, **60**, 7497 (1999).
20. Джерард А., Берч Дж.М. *Введение в матричную оптику* (М.: Мир, 1978).
21. Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **24**, 736 (1997).
22. Erden M.F., Ozaktas H.M. *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 2190 (1997).
23. Lohmann A.W., Mendlovic D. *J. Opt. Soc. Am. A*, **9**, 2009 (1992).
24. Lin Q., Wang L. *Opt. Commun.*, **185**, 263 (2000).
25. Епатко И.В., Малютин А.А., Серов Р.В., Соловьев Д.А., Чулкин А.Д. *Квантовая электроника*, **25**, 717 (1998).
26. O'Neil A.T., Courtial J. *Opt. Commun.*, **181**, 35 (2000).
27. Malyutin A.A. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **4900**, 908 (2002).