

Деформации спектра короткого интенсивного лазерного импульса при его взаимодействии с веществом

М.В.Чеготов

Предложено развитие трехмерного моментного подхода, с помощью которого при произвольных параметрах излучения и вещества можно получить спектр выходящего из вещества излучения в волновой зоне с любой степенью детализации на основе интегральных характеристик взаимодействия лазерного излучения с веществом. Показано, что ионизационные процессы могут приводить к большему уширению этого спектра по сравнению со сдвигом его центра в синюю сторону.

Ключевые слова: взаимодействие излучения с веществом, спектр излучения, ионизационные процессы.

1. Введение

При воздействии ультракороткого интенсивного импульса на вещество последнее переходит в нестационарное состояние. При этом характерные времена нестационарного отклика среды могут быть сравнимы с периодом быстрых осцилляций лазерного поля или быть меньше него. Такой отклик среды приводит к деформации спектра выходящего из вещества излучения по сравнению со спектром падающего на вещество лазерного импульса. В частности, при ионизации среды коротким интенсивным импульсом происходит сдвиг спектра в синюю сторону [1]. Исследованию синего сдвига посвящена обширная литература (см., напр., [1–10]). Интерес к этому явлению связан с возможностями его практического применения для изменения диапазона длин волн источников когерентного электромагнитного излучения, а также для диагностики сверхбыстрых процессов взаимодействия интенсивных электромагнитных полей с атомными (ионными) структурами.

Для аналитической оценки деформации спектра применяется, как правило, приближение геометрической оптики [1, 2, 4, 8] или его модификация [3, 10]. Однако в нестационарных условиях интерпретация результатов при использовании приближения геометрической оптики затруднительна [6].

В работах [11, 12] предложена трехмерная модель, позволяющая исследовать спектр выходящего из области взаимодействия электромагнитного излучения при нестационарном и пространственно-неоднородном воздействии лазерного импульса на вещество. Теория [11, 12] описывает сдвиг среднего по спектру квадрата частоты выходящего излучения относительно среднего квадрата частоты падающего на вещество лазерного импульса при произвольных параметрах лазерного импульса и вещества. Важной чертой этой теории, привлекательной с

точки зрения эксперимента, является то, что регистрация спектра излучения, выходящего из вещества, происходит в волновой зоне. Применительно к ионизационному синему сдвигу теория [11, 12] позволяет исследовать, в частности, зависимость частотного сдвига от положения движущегося ионизационного фронта на пространственно-временном профиле лазерного импульса, а также от величины ионизационных потерь [13]. Кроме того, с помощью этой теории можно учесть влияние на спектр выходящего излучения нелинейных процессов в веществе, например ВКР в плазме, рождающейся в результате ионизации [11, 12].

В настоящей работе развит моментный подход [11, 12], на базе которого при произвольных параметрах излучения и вещества может быть получен спектр выходящего из вещества излучения в волновой зоне с любой степенью детализации на основании интегральных характеристик взаимодействия лазерного излучения с веществом в реальной (трехмерной) геометрии. Исследовано влияние ионизационных процессов на спектральную ширину выходящего из области взаимодействия излучения; показано, что локальный сдвиг частоты, найденный в приближении геометрической оптики (см., напр., [1–4, 9, 10]), определяет именно спектральную ширину экспериментально регистрируемого излучения. Оценено соотношение между сдвигом центра спектра и его уширением за счет ионизационных процессов.

2. Основные соотношения

Используя подход работ [11, 12], продифференцируем n раз по t следующие уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1)$$

В (1) электрический ток \mathbf{J} определяется самосогласованно через напряженность электрического поля \mathbf{E} и его магнитную индукцию \mathbf{B} . Домножив скалярно получившиеся уравнения соответственно на $\partial^n \mathbf{E} / \partial t^n$ и $\partial^n \mathbf{B} / \partial t^n$ и вычтя второе из первого, найдем

Институт теплофизики экстремальных состояний Объединенного института высоких температур РАН, Россия, 127412 Москва, Ижорская ул., 13/19; e-mail: chegotov@ihed.ras.ru

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n} \right)^2 + \left(\frac{\partial^n \mathbf{B}}{\partial t^n} \right)^2 \right] \right\} + \operatorname{div} \left\{ \frac{c}{4\pi} \left[\frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n}, \frac{\partial^n \mathbf{B}}{\partial t^n} \right] \right\} \\ & = - \frac{\partial^n \mathbf{E} \partial^n \mathbf{J}}{\partial t^n \partial t^n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Предполагая отсутствие полей при $t = \pm\infty$, из (2) получаем

$$\operatorname{div} \left\{ \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n}, \frac{\partial^n \mathbf{B}}{\partial t^n} \right] dt \right\} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n \mathbf{E} \partial^n \mathbf{J}}{\partial t^n \partial t^n} dt. \quad (3)$$

Проинтегрировав (3) по некоторому объему V с поверхностью S , найдем

$$\frac{c}{4\pi} \int_S \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial^n \mathbf{E}}{\partial t^n}, \frac{\partial^n \mathbf{B}}{\partial t^n} \right] dt ds = - \int_V \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n \mathbf{E} \partial^n \mathbf{J}}{\partial t^n \partial t^n} dt d^3 \mathbf{r}, \quad (4)$$

где $d\mathbf{s} = \mathbf{e}_s ds$ – векторный элемент поверхности S с внешней нормалью \mathbf{e}_s .

Для дальнейшего использования (4) определим положение поверхности S_{in} (части поверхности S), через которую лазерное излучение попадает в газ, а также поверхности S_{out} (такой, что $S = S_{\text{in}} + S_{\text{out}}$), через которую излучение выходит из объема V . При этом излучение может выходить из объема V также и через поверхность S_{in} , что отвечает, например, ВКР назад на плазменных волнах (см., напр., [11, 12]). Будем считать, что поверхности S_{in} и S_{out} находятся на достаточно большом расстоянии от объема образования плазмы V_{pl} , а именно: S_{in} и S_{out} находятся в волновой зоне относительно объема V_{pl} и, кроме того, на этих поверхностях $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, где \mathbf{H} – напряженность магнитного поля.

Для полей с напряженностями \mathbf{E} и \mathbf{H} в волновой зоне имеет место соотношение $\mathbf{E} = [\mathbf{H}, \mathbf{n}]$, где $\mathbf{n} = [\mathbf{E}, \mathbf{H}] / |[\mathbf{E}, \mathbf{H}]|$ определяет направление потока энергии излучения в фиксированной точке поверхности S [14]. Подставив это соотношение в (4), получим

$$\begin{aligned} & \frac{c}{4\pi} \int_S \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^n \mathbf{H}}{\partial t^n} \right)^2 dt ds = - \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n \mathbf{E} \partial^n \mathbf{J}}{\partial t^n \partial t^n} dt d^3 \mathbf{r}, \\ & \int_S \int_0^\infty \omega^{2n} I(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds = - \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n \mathbf{E} \partial^n \mathbf{J}}{\partial t^n \partial t^n} dt d^3 \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$I(\omega, \mathbf{r}) = \frac{c}{4\pi^2} |\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r})|^2$$

– спектральная плотность энергии, приходящейся на единицу площади [14];

$$\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{H}(t, \mathbf{r}) \exp(i\omega t) dt.$$

Здесь учтено, что ток \mathbf{J} сосредоточен в области V_{pl} . Заметим, что соотношение (5) справедливо и при $n = 0$:

$$\int_S \int_0^\infty I(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds = - \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} \mathbf{J} dt d^3 \mathbf{r}. \quad (6)$$

Равенство (6), выражающее закон сохранения энергии,

перепишем с учетом направления распространения излучения через поверхности S_{in} и S_{out} :

$$\varepsilon_{\text{out}} + \varepsilon_{\text{back}} - \varepsilon_{\text{in}} = - \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} \mathbf{J} dt d^3 \mathbf{r}, \quad (7)$$

где

$$\varepsilon_{\text{in}} = - \int_{S_{\text{in}}} \int_0^\infty I_{\text{in}}(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds$$

– энергия входящего в объем V лазерного излучения;

$$\varepsilon_{\text{out}} = \int_{S_{\text{out}}} \int_0^\infty I_{\text{out}}(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds,$$

$$\varepsilon_{\text{back}} = \int_{S_{\text{back}}} \int_0^\infty I_{\text{back}}(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds$$

– энергии излучения, выходящего из объема V через поверхности S_{out} и S_{back} ($S_{\text{back}} = S_{\text{in}}$).

Введя средние для соответствующих спектров величины

$$\begin{aligned} \langle \omega^{2n} \rangle_\alpha & = \int_{S_\alpha} \int_0^\infty \omega^{2n} I_\alpha(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds \left(\int_{S_\alpha} \int_0^\infty I_\alpha(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds \right)^{-1} \\ & (\alpha = \text{in, out, back}), \end{aligned} \quad (8)$$

а также коэффициент отражения назад $R_{\text{back}} = \varepsilon_{\text{back}} / \varepsilon_{\text{in}}$, запишем соотношение (5) в виде равенства

$$\langle \omega^{2n} \rangle_{\text{out}} = \frac{\langle \omega^{2n} \rangle_{\text{in}} - \langle \omega^{2n} \rangle_{\text{back}} R_{\text{back}} - \varepsilon_{\text{in}}^{-1} e_n}{1 - R_{\text{back}} - \varepsilon_{\text{in}}^{-1} e_0}, \quad (9)$$

где

$$e_n = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^n \mathbf{E} \partial^n \mathbf{J}}{\partial t^n \partial t^n} dt d^3 \mathbf{r}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Равенство (9) определяет $2n$ -ю степень частоты, усредненную по спектру выходящего через поверхность S_{out} излучения. Далее для определенности будем считать, что спектральные характеристики анализируются для излучения, прошедшего через поверхность S_{out} . Выражение (9) справедливо при любой интенсивности лазерного импульса и произвольной геометрии облучения вещества. Оно определяет величину $\langle \omega^{2n} \rangle_{\text{out}}$ в волновой зоне по отношению к формирующейся в результате ионизации плазме, где, как правило, и регистрируется спектр выходящего из плазмы излучения.

Обратим внимание, что $I(\omega, \mathbf{r}) = (c/4\pi^2) |\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r})|^2 = (c/4\pi^2) \times \mathbf{H}(\omega, \mathbf{r}) \mathbf{H}(-\omega, \mathbf{r})$ – четная функция частоты ω (см. также [14]). Вследствие этого, если известны величины $\langle \omega^{2n} \rangle_{\text{out}}$ при всех значениях n , то известна и функция частоты $I_{\text{out}}(\omega, \mathbf{r})$.

3. Сдвиг среднего квадрата частоты и ширина спектра выходящего из вещества излучения

Согласно (9) сдвиг среднего квадрата частоты выходящего из вещества излучения $\langle \omega^2 \rangle_{\text{out}}$ относительно среднего квадрата частоты падающего на вещество лазерного импульса $\langle \omega^2 \rangle_{\text{in}}$ при $n = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} = & \left[R_{\text{back}} (\langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{back}}) \right. \\ & \left. + \varepsilon_{\text{in}}^{-1} \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{J} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \right) \mathbf{E} dt d^3 \mathbf{r} \right] \\ & \times \left(1 - R_{\text{back}} - \varepsilon_{\text{in}}^{-1} \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{J} \mathbf{E} dt d^3 \mathbf{r} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения ширины спектра выходящего через поверхность S_{out} излучения воспользуемся выражениями (8). Исследуем среднеквадратичное отклонение квадрата частоты от $\langle \omega^2 \rangle_{\text{out}}$:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{out}} = & \int_{S_{\text{out}}} \int_0^\infty (\omega^2 - \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}})^2 I_{\text{out}}(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds \\ & \times \left(\int_{S_{\text{out}}} \int_0^\infty I_{\text{out}}(\omega, \mathbf{r}) d\omega nds \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (11)$$

Из выражений (11) и (8) найдем

$$\langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{out}} = \langle \omega^4 \rangle_{\text{out}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}}^2. \quad (12)$$

Используя (9), представим выражение (12) в виде

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{out}} - \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{in}} = & \left(e_0 \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{in}} - \Phi \right) \\ & \times (\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{in}} R_{\text{back}} - e_0)^{-1} - \left(\langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}} \right)^2 + R_{\text{back}} \\ & \times \left[\langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{in}} - \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{back}} - \left(\langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{back}} \right)^2 \right] \\ & \times (1 - R_{\text{back}} - e_0/\varepsilon_{\text{in}})^{-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\Phi = e_2 - 2 \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} e_1 + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}}^2 e_0.$$

Из соотношений (10) и (13) следует, в частности, что в отсутствие вещества (когда $e_n = 0$, $R_{\text{back}} = 0$)

$$\langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} = \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}}, \quad \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{out}} = \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{in}}.$$

Выражение для Φ (см. (10) и (13)) преобразуем к виду

$$\Phi = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{J} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \right)^2 \mathbf{E} dt d^3 \mathbf{r}. \quad (14)$$

Сдвиг среднего квадрата частоты и изменение спектральной ширины выходящего из вещества излучения относительно соответствующих спектральных характеристик падающего излучения определяются также долей энергии R_{back} , сдвигом среднеквадратичной частоты $\langle \omega^2 \rangle_{\text{back}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}}$ и шириной спектра $\langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{back}}$ отраженного назад излучения.

4. Частотные характеристики ионизационных процессов

При достаточно малой длительности лазерного импульса движением ионной компоненты, рождающейся в

результате ионизации плазмы, можно пренебречь. Тогда динамика ионизации так называемых нейтралов и ионов полем лазерного излучения описывается локальными уравнениями

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} = -\Gamma_0, \quad \frac{\partial n_m}{\partial t} = \Gamma_{m-1} - \Gamma_m, \quad m = 1, \dots, Z-1, \quad (15)$$

$$\frac{\partial n_Z}{\partial t} = \Gamma_{Z-1}, \quad \Gamma_0 = W_0 n_0, \quad \Gamma_m = W_m n_m,$$

где n_m – концентрация ионов (нейтралов при $m = 0$) с зарядовым числом m ; W_m – вероятность ионизации в единицу времени иона с зарядовым числом m до иона с зарядовым числом $m + 1$; $Z|e|$ – заряд ядра атома. При интенсивностях лазерного излучения, меньших релятивистских, пренебрежем нелинейностью движения электронов в поле лазерного импульса, тогда ток свободных электронов \mathbf{j} в электрическом поле \mathbf{E} также описывается локальным уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = \frac{e^2 n_e}{m_e} \mathbf{E}, \quad (16)$$

где m_e – масса электрона, а концентрация электронов n_e определяется по локальной полной плотности заряда ионов из условия квазинейтральности рождающейся в результате ионизации плазмы

$$n_e = \sum_{m=1}^Z m n_m. \quad (17)$$

Заметим, что уравнение (16) корректно описывает динамику движения свободных электронов с учетом процессов ионизации интенсивным полем лазерного импульса [15]. Однако ток \mathbf{j} не полностью исчерпывает возможные движения электронов при ионизации. В ходе ионизации иона с зарядом $m|e|$ электромагнитное поле сообщает связанному электрону энергию, равную потенциалу ионизации U_m . Такие потери энергии электромагнитного поля (которые мы будем называть потерями на ионизацию (см. [13])) могут быть описаны с помощью ионизационного тока

$$\mathbf{j}_{\text{ion}} = \frac{\mathbf{E}}{|\mathbf{E}|^2} \sum_{m=0}^{Z-1} W_m n_m U_m. \quad (18)$$

При этом полный ток \mathbf{J} является суммой ионизационного тока и тока свободных электронов:

$$\mathbf{J} = \mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{ion}}. \quad (19)$$

Выражение (18) для ионизационного тока удовлетворяет как закону сохранения энергии, так и закону сохранения импульса при ионизации [16]. Оба тока (\mathbf{j} и \mathbf{j}_{ion}) приводят к потерям энергии лазерного импульса [15], соотношение между которыми определяется параметрами газа и лазерного излучения [13]. Заметим, что поскольку процессы, описываемые Γ_m , локализованы в пространстве и времени в областях ионизационных фронтов, возникающих при ионизации ионов с зарядом $m|e|$ [13, 15], то ионизационный ток \mathbf{j}_{ion} также оказывается локализованным в указанных областях. По этой же причине изменения электронной плотности n_e происходят в той же временной области. Из (17) и (15) следует, что

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} = \Gamma = \sum_{m=0}^{Z-1} \Gamma_m. \quad (20)$$

Вводя «скорость» движущихся в электрическом поле E электронов $V_E(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t (e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')/m_e) dt'$ и считая, что $V_E(\mathbf{r}, t = +\infty) = 0$, соотношение (10) можно записать в виде [11, 12]

$$\begin{aligned} \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} &= R_{\text{back}} (\langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{back}}) \\ &\times (1 - R_{\text{back}} - \varepsilon_{\text{in}}^{-1} e_0)^{-1} + (\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{in}} R_{\text{back}} - e_0)^{-1} \\ &\times \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathbf{j}_{\text{ion}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \right) \mathbf{E} \right. \\ &\left. + \Gamma \left(\frac{e^2 \mathbf{E}^2}{2m_e} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \frac{m_e V_E^2}{2} \right) \right\} dt d^3 \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (21)$$

где было учтено, что

$$e_0 = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\mathbf{j}_{\text{ion}} \mathbf{E} + \Gamma \frac{m_e V_E^2}{2} \right) dt d^3 \mathbf{r}. \quad (22)$$

Подынтегральные функции в (21) и (22) локализованы в пространстве и времени на ионизационных фронтах (см. выше).

Обращаясь к выражению (13), связанному с шириной спектра выходящего из вещества излучения, заметим, что (14) может быть преобразовано следующим образом:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathbf{j}_{\text{ion}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \right)^2 \mathbf{E} \right. \\ &+ m_e \Gamma \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 4 \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \right) V_E \left(\frac{\partial^2 V_E}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} V_E \right) \right. \\ &- \frac{1}{2} V_E \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \right)^2 V_E \\ &\left. \left. - \left(\frac{\partial^2 V_E}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} V_E \right)^2 \right] \right\} dt d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (23)$$

Так же, как и в формуле (21), подынтегральные функции в (22) и (23) локализованы там, где $\Gamma_m \neq 0$, т. е. на соответствующих ионизационных фронтах. Таким образом, при учете ионизационных процессов подынтегральные члены, входящие в выражения (10) и (13), определяются локализованными на ионизационных фронтах функциями.

4.1. Малые плотности ионизуемого газа

Определим далее $\langle \omega^2 \rangle_{\text{out}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}}$ и $\langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{out}} - \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{in}}$ в условиях, когда отражением назад можно пренебречь. Такие условия легко осуществимы, если концентрация ионизуемого газа мала (такова, что концентрация рождающихся в результате ионизации электронов $n_e \ll n_c = m_e \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} (4\pi e^2)^{-1}$, где n_c – критическая концентрация). В частности, как показано в [17], если характерные масштабы пространственного распределения концентрации плазмы, возникшей после пробега лазерного импульса, велики по сравнению с длиной волны лазерного излучения (см., напр.,

[18]), то доля отраженной назад от распространяющегося по веществу ионизационного фронта энергии R_{back} мала. Заметим, что отражение от слоя плазмы с резкими границами в условиях нарастающей во времени концентрации электронов может быть значительным [19].

Пренебрегая в (21) и (13) членами, пропорциональными R_{back} , находим

$$\begin{aligned} \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} &= (\varepsilon_{\text{in}} - e_0)^{-1} \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \mathbf{j}_{\text{ion}} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \right)^2 \mathbf{E} \right. \\ &\left. + \Gamma \left(\frac{e^2 \mathbf{E}^2}{2m_e} + \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} \frac{m_e V_E^2}{2} \right) \right\} dt d^3 \mathbf{r}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{out}} - \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{in}} &= (\varepsilon_{\text{in}} - e_0)^{-1} \\ &\times [e_0 \langle (\Delta \omega^2)^2 \rangle_{\text{in}} - \Phi] - (\langle \omega^2 \rangle_{\text{in}} - \langle \omega^2 \rangle_{\text{out}})^2. \end{aligned} \quad (25)$$

При малых концентрациях для описания распространения электромагнитного излучения может быть использовано приближение медленно меняющихся амплитуд. Положим

$$V_E = \frac{1}{2} [\mathbf{v} \exp(-i\omega_0 t) + \text{компл. сопр.}],$$

где $\omega_0 = \langle \omega^2 \rangle_{\text{in}}^{1/2}$; \mathbf{v} – медленно меняющаяся на масштабе $2\pi/\omega_0$ амплитуда. Последнее, в частности, предполагает выполнение неравенства $\omega_0^{-1} \max\{|\partial \ln(v_l)/\partial t|\} \equiv \delta \ll 1$, где v_l – проекция вектора \mathbf{v} на l -ю координатную ось. Электрическое поле \mathbf{E} также представим в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega_0 t) + \text{компл. сопр.}],$$

где \mathbf{E}_0 – медленно меняющаяся амплитуда. Из интегрального равенства $V_E(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^t [e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t')/m_e] dt'$ и определений V_E и \mathbf{E} через амплитуды \mathbf{v} и \mathbf{E}_0 найдем связь между медленно меняющимися амплитудами:

$$\mathbf{E}_0 = \frac{m_e}{e} \left(i\omega_0 \mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right).$$

Приближенное выражение частотного сдвига (24) через медленно меняющуюся амплитуду \mathbf{E}_0 имеет следующий вид (ср. с [11, 12]):

$$\langle \omega^2 \rangle_{\text{out}} - \omega_0^2 = \omega_0^2 \frac{\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{fr}} + \varepsilon_{\text{ion}}^{\text{res}}}{\varepsilon_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{ion}}^{\text{p}} - \varepsilon_{\text{ion}}^{\text{res}}}, \quad (26)$$

где

$$\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{p}} = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} \mathbf{j}_{\text{ion}} dt d^3 \mathbf{r} = \sum_{m=0}^{Z-1} U_m \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_m dt d^3 \mathbf{r}; \quad (27)$$

$$\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{fr}} = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma \frac{e^2 \mathbf{E}^2}{2m_e \omega_0^2} dt d^3 \mathbf{r} = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\Gamma} F(\mathbf{r}, t) dt d^3 \mathbf{r}; \quad (28)$$

$$\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{res}} = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} \mathbf{j} dt d^3 \mathbf{r} = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma m_e V_E^2}{2} dt d^3 \mathbf{r}; \quad (29)$$

$$\bar{\Gamma} = \sum_{m=0}^{Z-1} \bar{\Gamma}_m; \quad \bar{\Gamma}_m = \overline{W}_m \bar{n}_m;$$

\overline{W}_m и \bar{n}_m – усредненные по периоду $2\pi/\omega_0$ частоты ионизации и плотности ионов соответственно; $F(\mathbf{r}, t) \approx 2Q_p(\mathbf{r}, t)$; $Q_p(\mathbf{r}, t) = e^2 |E_0(\mathbf{r}, t)|^2 / (4m_e \omega_0^2)$ – ponderomotorный потенциал электрона. В (28), (29) предполагается, что вероятности ионизации W_m максимальны в моменты максимумов осциллирующего поля $|E|$. Заметим, что в формуле (27) выражение $U_m \int_{V_{pl}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_m dt d^3r$ представляет собой полную энергию, переданную лазерным импульсом электронам на преодоление потенциала ионизации U_m при ионизации ионов с зарядовым числом m , а сумма $\varepsilon_{ion}^p + \varepsilon_{ion}^{res}$ – полную ионизационную потерю энергии электромагнитного излучения [13], т.е. сумму энергии, затраченной на преодоление электронами потенциалов ионизации, ε_{ion}^p , и так называемой остаточной энергии ε_{ion}^{res} .

Выражение (23) с точностью до членов второго порядка малости по δ имеет вид

$$\Phi = i\omega_0 \frac{e^2}{m_e} \int_{V_{pl}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} - E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} \right) \bar{\Gamma} dt d^3r. \quad (30)$$

Множитель в скобках в подинтегральном выражении (30) может быть записан с помощью локального сдвига частоты электромагнитного излучения $\Delta\omega_{loc}$:

$$E_0 \frac{\partial E_0^*}{\partial t} - E_0^* \frac{\partial E_0}{\partial t} = 2i |E_0|^2 \Delta\omega_{loc}(\mathbf{r}, t). \quad (31)$$

В условиях, когда поле E имеет циркулярную или линейную поляризацию, выражение (31) совпадает с широко применяемым определением (ср., напр., с [1–5, 7, 9, 10]). Используя (30) и (31), из выражения (25) получаем

$$\begin{aligned} & \langle (\Delta\omega^2)^2 \rangle_{out} - \langle (\Delta\omega^2)^2 \rangle_{in} = \langle (\Delta\omega^2)^2 \rangle_{in} (\varepsilon_{ion}^p + \varepsilon_{ion}^{res}) \\ & \quad \times (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ion}^p - \varepsilon_{ion}^{res})^{-1} - (\omega_0^2 - \langle \omega^2 \rangle_{out})^2 \\ & + (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ion}^p - \varepsilon_{ion}^{res})^{-1} 2\omega_0 \frac{e^2}{m_e} \int_{V_{pl}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega_{loc} |E_0|^2 \bar{\Gamma} dt d^3r. \end{aligned} \quad (32)$$

Введя усредненный локальный сдвиг частоты $\overline{\Delta\omega_{loc}}$

$$\overline{\Delta\omega_{loc}} \equiv \int_{V_{pl}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta\omega_{loc} k(\mathbf{r}, t) dt d^3r, \quad (33)$$

где

$$k(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\varepsilon_{ion}^{fr}} \frac{e^2 |E_0|^2}{2m_e \omega_0^2} \bar{\Gamma},$$

соотношение (32) с учетом (26) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned} & \langle (\Delta\omega^2)^2 \rangle_{out} - \langle (\Delta\omega^2)^2 \rangle_{in} = \langle (\Delta\omega^2)^2 \rangle_{in} (\varepsilon_{ion}^p + \varepsilon_{ion}^{res}) \\ & \quad \times (\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ion}^p - \varepsilon_{ion}^{res})^{-1} + (\langle \omega^2 \rangle_{out} - \omega_0^2) \\ & \quad \times \left[\frac{2\varepsilon_{ion}^{fr}}{\varepsilon_{ion}^{fr} + \varepsilon_{ion}^{res}} 2\omega_0 \overline{\Delta\omega_{loc}} - (\langle \omega^2 \rangle_{out} - \omega_0^2) \right]. \end{aligned} \quad (34)$$

Функцию $k(\mathbf{r}, t)$ можно рассматривать как функцию распределения некоторой величины. С формальной точки зрения это допустимо, поскольку $k(\mathbf{r}, t) \geq 0$ и $\int_{V_{pl}} \int_{-\infty}^{+\infty} k(\mathbf{r}, t) dt d^3r = 1$ (см. (28)). Для выяснения физического смысла функции $k(\mathbf{r}, t)$ заметим, что величина

$$\frac{e^2 |E_0|^2}{2m_e \omega_0^2} \bar{\Gamma} dt d^3r$$

представляет собой амплитудное значение суммарной осцилляторной энергии всех электронов, рождающихся в результате ионизации в интервале времени $(t, t + dt)$ в объеме d^3r в окрестности координаты \mathbf{r} . Таким образом, $k(\mathbf{r}, t)$ можно интерпретировать как нормированную на единицу пространственно-временную плотность распределения амплитуды суммарной осцилляторной энергии всех электронов, рождающихся в результате ионизации.

Для выполнения условий применимости приближения медленно меняющихся амплитуд необходимо потребовать, чтобы $|\langle \omega^2 \rangle_{out} - \omega_0^2| \ll \omega_0^2$. Это означает (см. (26)), что $|\varepsilon_{ion}^{fr} + \varepsilon_{ion}^{res}| \ll |\varepsilon_{in} - \varepsilon_{ion}^p - \varepsilon_{ion}^{res}|$. В условиях туннельной ионизации вещества короткими интенсивными лазерными импульсами величина ε_{ion}^p оказывается порядка или меньше ε_{ion}^{res} (см. [13]), а $\varepsilon_{ion}^{res} \ll \varepsilon_{ion}^{fr}$. Тогда первым слагаемым в правой части (34) можно пренебречь и из этого соотношения получить, что

$$\sigma_{out} = \left[\delta\omega \left(\frac{2\varepsilon_{ion}^{fr}}{\varepsilon_{ion}^{fr} + \varepsilon_{ion}^{res}} \overline{\Delta\omega_{loc}} - \delta\omega \right) + \sigma_{in}^2 \right]^{1/2}, \quad (35)$$

где $\delta\omega \equiv (2\omega_0)^{-1} (\langle \omega^2 \rangle_{out} - \omega_0^2)$ – сдвиг центра спектра выходящего из вещества лазерного излучения; $\sigma_\beta \equiv (2\omega_0)^{-1} [(\langle \Delta\omega^2 \rangle_\beta)^{1/2}]$ – ширина спектра падающего на вещество лазерного импульса при $\beta = in$ или ширина спектра выходящего из вещества излучения при $\beta = out$. Для гауссова лазерного импульса с интенсивностью $I = I_{max} \exp[-4t^2 \ln 2 / \tau_0^2]$, где $I = c |E|^2 / (4\pi) = c |E_0|^2 \times (8\pi)^{-1}$, а τ_0 – длительность импульса по полувысоте с периодом $2\pi/\omega_0 \lesssim \tau_0$, имеет место $\sigma_{in} = (2 \ln 2)^{1/2} \tau_0^{-1}$.

Величины $\delta\omega$ и σ_{out} зависят от поляризации излучения. Это обстоятельство связано с тем, что энергия ε_{ion}^{fr} , а также соотношение между ε_{ion}^{fr} и остаточной энергией ε_{ion}^{res} зависят от поляризации. В условиях линейно поляризованного ионизирующего лазерного излучения ионизация происходит в моменты времени, близкие к максимумам осциллирующего электрического поля, которые соответствуют близкой к нулю скорости V_E . Как следствие, для линейной поляризации имеет место соотношение $\varepsilon_{ion}^{fr} \gg \varepsilon_{ion}^{res}$. В условиях циркулярно поляризованного лазерного поля при небольшом изменении $\langle \omega^2 \rangle_{out}$ по сравнению с ω_0^2 для V_E^2 справедливо приближенное равенство $V_E^2 \approx e^2 E^2 / (m_e^2 \omega_0^2)$, вследствие чего $\varepsilon_{ion}^{fr} \approx \varepsilon_{ion}^{res}$ и множитель $2\varepsilon_{ion}^{fr} / (\varepsilon_{ion}^{fr} + \varepsilon_{ion}^{res})$, входящий в (35), равен двум при линейной и единице при циркулярной поляризации электромагнитного излучения. В свою очередь

$$\sigma_{out} = \left[\delta\omega \left(\frac{2}{\eta} \overline{\Delta\omega_{loc}} - \delta\omega \right) + \sigma_{in}^2 \right]^{1/2}, \quad (36)$$

где

$$\delta\omega = \eta \frac{\omega_0 \varepsilon_{ion}^{fr}}{2 \varepsilon_{in}}; \quad (37)$$

$\eta = 1$ при линейной и 2 при циркулярной поляризации.

Частота ионизации \bar{W}_m (и, следовательно, число ионов \bar{N}_m) определяется механизмом ионизации. В условиях сравнительно коротких и интенсивных лазерных импульсов он оказывается туннельным [13], и для частоты ионизации может быть использована формула [20]

$$\bar{W}_m(|E_0|) = \omega_{\text{at}} \sqrt{3} \left(\frac{e}{\pi} \right)^{3/2} \frac{(m+1)^2}{n_*^{4.5}} \times \left[4e \frac{(m+1)^3 E_{\text{at}}}{n_*^4 |E_0|} \right]^{2n_*-1.5} \exp \left[-\frac{2(m+1)^3 E_{\text{at}}}{3 n_*^3 |E_0|} \right], \quad (38)$$

где $n_* = (m+1)(U_{\text{H}}/U_m)^{1/2}$; $U_{\text{H}} = 13.65$ эВ – потенциал ионизации атома водорода с основного состояния; $E_{\text{at}} \approx 5.1 \times 10^9$ В·см⁻¹ – напряженность атомного поля; $\omega_{\text{at}} \approx 4.1 \times 10^{16}$ с⁻¹ – атомная частота; $e \approx 2.718$ – основание натуральных логарифмов (в работе [20] допущена опечатка: численный множитель (e/π) в выражении для частоты ионизации должен иметь степень 3/2 вместо 1/2). Выражение для остаточной энергии (29) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{res}} = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{Z-1} \bar{\Gamma}_m R_m dt d^3r,$$

где R_m зависит от поляризации поля,

$$R_m(\mathbf{r}, t) \approx \begin{cases} \frac{3\hbar\omega_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{Q_p(\mathbf{r}, t)}{U_m} \right)^{3/2} & \text{при линейной поляризации,} \\ 2Q_p(\mathbf{r}, t) & \text{при циркулярной поляризации.} \end{cases} \quad (39)$$

Отсюда, в частности, следует, что при циркулярной поляризации $R_m/F \approx (3/2)\alpha_m$, где $\alpha_m \equiv (U_{\text{H}}/U_m)^{3/2} |E_0(\mathbf{r}, t)| \times E_{\text{at}}^{-1}$. При ионизации сравнительно легких атомов с зарядовым номером ядра $Z < 10$ параметр $\alpha_m \ll 1$ в моменты ионизации. Вследствие этого малость $\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{res}}$ по сравнению с $\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{fr}}$ в условиях линейной поляризации лазерного поля определяется малостью α_m .

4.2. Оценочные соотношения

Частотный сдвиг и изменение ширины спектра излучения, выходящего из ионизируемого вещества, определяются пространственно-временными интегралами (27)–(29). Как было отмечено выше, подынтегральные функции в этих выражениях локализованы на сравнительно узких (см., напр., [13]) ионизационных фронтах. Узость этих фронтов позволяет оценить величину $\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{fr}}$ следующим образом:

$$\varepsilon_{\text{ion}}^{\text{fr}} = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma \frac{e^2 E^2}{2m_e \omega_0^2} dt d^3r = \int_{V_{\text{pl}}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{I}{cn_c} \bar{\Gamma} dt d^3r, \\ \approx \frac{1}{cn_c} \sum_{m=1}^Z I_{\text{th}}^{m-1} N_m,$$

где I_{th}^m – пороговая интенсивность для ионизации иона с зарядовым числом m ; N_m – полное число ионов с зарядовым числом m , рождающихся в ходе распространения

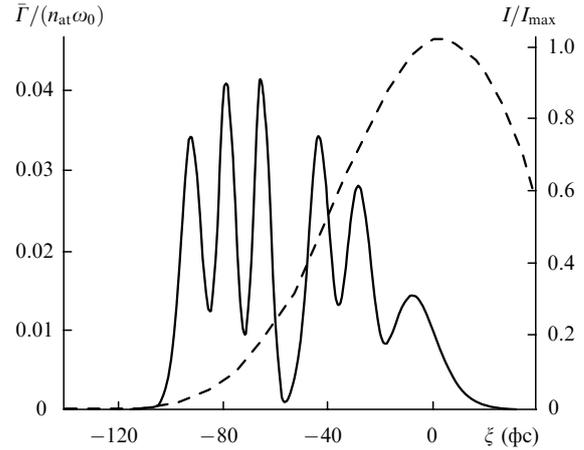


Рис.1. Зависимости $\bar{\Gamma}(\xi)/(n_{\text{at}}\omega_0)$ (сплошная кривая) и $I(\xi)/I_{\text{max}}$ (штриховая кривая) при ионизации аргона гауссовым лазерным импульсом с $\lambda = 0.62$ мкм, $\tau_0 = 90$ фс и $I_{\text{max}} = 10^{16}$ Вт/см².

ния импульса в веществе. В соответствии с этим оценим частотный сдвиг $\delta\omega$ (37):

$$\delta\omega \approx \eta \frac{\omega_0}{2cn_c \varepsilon_{\text{in}}} \sum_{m=1}^Z I_{\text{th}}^{m-1} N_m. \quad (40)$$

Поскольку начальная энергия импульса ε_{in} пропорциональна пиковой интенсивности импульса I_{max} , из выражения (40) следует, что смещение центра спектра выходящего из ионизируемого вещества излучения зависит от отношения $I_{\text{th}}^m/I_{\text{max}}$.

Для оценки ширины этого спектра по сравнению со сдвигом его центра $\delta\omega$ воспользуемся простейшей одномерной моделью распространения линейно поляризованного импульса в однородном слое газа толщиной L при начальной концентрации атомов n_{at} . В пренебрежении ионизационными потерями уравнение для медленно меняющейся амплитуды поля E_0 , которое распространяется вдоль оси z , в переменных z , $\xi = t - z/c$ имеет вид

$$\frac{\partial E_0}{\partial z} + iE_0 \frac{\omega_0}{2cn_c} \int_{-\infty}^{\xi} \bar{\Gamma}(\xi) d\xi = 0.$$

Из этого уравнения определим локальный сдвиг частоты

$$\Delta\omega_{\text{loc}}(\xi, z) = \frac{\omega_0}{2cn_c} \bar{\Gamma}(\xi)z.$$

Отсюда относительный средний локальный сдвиг частоты

$$\frac{\overline{\Delta\omega_{\text{loc}}}}{\omega_0} = \frac{\omega_0 L n_{\text{at}}}{4c n_c} \int_{-\infty}^{+\infty} I \left(\frac{\bar{\Gamma}}{n_{\text{at}}\omega_0} \right)^2 d\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I \frac{\bar{\Gamma}}{n_{\text{at}}\omega_0} d\xi \right)^{-1}.$$

В свою очередь, относительное смещение центра спектра выходящего из ионизируемого вещества линейно поляризованного ($\eta = 1$) излучения в одномерной модели

$$\frac{\delta\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2} \frac{\omega_0 L n_{\text{at}}}{c n_c} \int_{-\infty}^{+\infty} I \frac{\bar{\Gamma}}{n_{\text{at}}\omega_0} d\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I d\xi \right)^{-1}.$$

Таким образом, в одномерной модели в пренебрежении ионизационными потерями отношение среднего локального сдвига частоты к смещению центра спектра выходящего из ионизируемого вещества излучения не зависит от глубины проникновения лазерного импульса в газ:

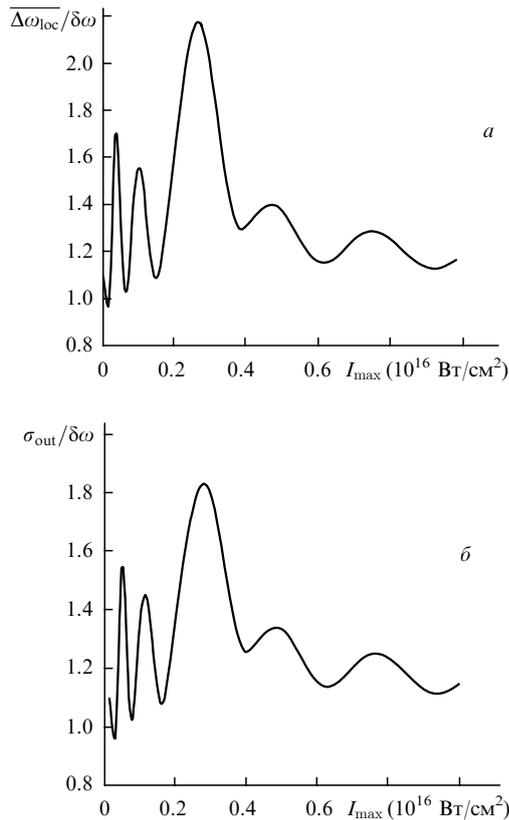


Рис.2. Зависимости $\overline{\Delta\omega_{loc}}/\delta\omega$ (а) и $\sigma_{out}/\delta\omega$ (б) от I_{max} ; параметры импульса и газа те же, что и на рис.1.

$$\frac{\overline{\Delta\omega_{loc}}}{\delta\omega} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} Id\xi \int_{-\infty}^{+\infty} I \left(\frac{\bar{\Gamma}}{n_{at}\omega_0} \right)^2 d\xi \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I \frac{\bar{\Gamma}}{n_{at}\omega_0} d\xi \right)^{-2}. \quad (41)$$

Если глубина проникновения ионизирующего импульса достаточно велика (настолько, что выполняется неравенство $\delta\omega \gg \sigma_{in}$), то соотношение между шириной σ_{out} и сдвигом $\delta\omega$ спектра выходящего из ионизованного вещества излучения имеет вид

$$\frac{\sigma_{out}}{\delta\omega} = \left(2 \frac{\overline{\Delta\omega_{loc}}}{\delta\omega} - 1 \right)^{1/2}. \quad (42)$$

На рис.1 приведена зависимость $\bar{\Gamma}(\xi)/(n_{at}\omega_0)$ при ионизации аргона гауссовым лазерным импульсом с $\lambda = 0.62$ мкм, длительностью $\tau_0 = 90$ фс и максимальной интенсивностью $I_{max} = 10^{16}$ Вт/см². В одномерном приближении при такой интенсивности и длительности лазерного импульса аргон ионизируется до $Z = 6$. Этому соответствует наличие шести пиков $\bar{\Gamma}(\xi)$ на рис.1. Эти пики, в свою очередь, соответствуют шести минимумам зависимости $\overline{\Delta\omega_{loc}}/\delta\omega$ от максимальной интенсивности лазерного импульса I_{max} , изображенной на рис.2,а, а минимумы источника электронов $\bar{\Gamma}(\xi)$ (рис.1) отвечают максимумам отношения среднего локального сдвига частоты к смещению центра спектра выходящего из ионизирующе-

гося вещества излучения $\overline{\Delta\omega_{loc}}/\delta\omega$ (рис.2,а). Подобное же поведение $\sigma_{out}/\delta\omega$ в зависимости от I_{max} показано на рис.2,б.

5. Заключение

Таким образом, в настоящей работе развит метод исследования спектральных характеристик взаимодействия коротких интенсивных лазерных импульсов и вещества с помощью изучения высших моментов спектральной интенсивности выходящего из области взаимодействия излучения. Этот подход, являющийся продолжением работ [11, 12], позволяет установить влияние ионизационных процессов на основные характеристики регистрируемого в эксперименте спектра выходящего из вещества излучения: смещение центра и изменение ширины спектра. Найдено, что при небольшом относительном смещении центра спектра в синюю сторону его величина определяется количеством ионизованного вещества и относительной пороговой для ионизации интенсивностью. Спектральная ширина выходящего излучения определяется усредненным локальным сдвигом частоты при ионизации и может превышать сдвиг центра спектра.

Работа частично поддержана РФФИ (грант № 01-02-16723).

1. Yablonovitch E. *Phys. Rev. A*, **10**, 1888 (1974).
2. Wilks S.C., Dawson J.M., Mori W.B., Katsouleas T., Jones M.E. *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 2600 (1989).
3. Гильденбург В.Б., Ким А.В., Сергеев А.М. *Письма в ЖЭТФ*, **51**, 91 (1990).
4. Esarey E., Ting A., Sprangle P. *Phys. Rev. A*, **42**, 3526 (1990).
5. Wood W.M., Siders C.W., Downer M.C. *Phys. Rev. Lett.*, **67**, 3523 (1991).
6. Rae S.C., Burnett K. *Phys. Rev. A*, **46**, 1084 (1992).
7. Wood W.M., Siders C.W., Downer M.C. *IEEE Trans. Plasma Science*, **21**, 20 (1993).
8. Gil'denburg V.B., Pozdnyakova V.T., Shereshevskii I.A. *Phys. Lett. A*, **203**, 214 (1995).
9. Oliveira e Silva L., Mendonca J.T. *IEEE Trans. Plasma Science*, **24**, 316 (1996).
10. Liu C.S., Tripathi V.K. *Phys. Plasmas*, **7**, 4360 (2000).
11. Чеготов М.В. В сб. *Физика экстремальных состояний вещества – 2002*. Под ред. В.Е.Фортова и др. (Черноголовка: ИПХФ РАН, 2002, с. 115).
12. Чеготов М.В. *ЖТФ*, **72**, 71 (2002).
13. Чеготов М.В. *Физика плазмы*, **26**, 940 (2000).
14. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теория поля* (М.: Наука, 1988, с.509).
15. Chegotov M.V. *J. Phys. D.*, **35**, 647 (2002).
16. Андреев Н.Е., Вейсман М.Е., Кейджян М.Г., Чеготов М.В. *Физика плазмы*, **26**, 1010 (2000).
17. Чеготов М.В. *Квантовая электроника*, **31**, 804 (2001).
18. Andreev N.E., Chegotov M.V., Downer M.C., Gaul E.W., Matlis N.H., Pogossova A.A., Rundquist A.R. *IEEE Trans. Plasma Science*, **28**, 1090 (2000).
19. Глазов Л.Г., Рухадзе А.А. *ЖТФ*, **62**, 63 (1992).
20. Аммосов М.В., Делоне Н.Б., Крайнов В.П. *ЖЭТФ*, **91**, 2008 (1986).