PACS 42.25.-p; 42.82.Et

К теории мод шепчущей галереи шарового слоя

Д.В.Гузатов, А.Н.Ораевский

На основе аппроксимации функций Бесселя функциями Эйри построена теория мод шепчущей галереи (МШГ) диэлектрического шарового слоя. Исследованы зависимости собственных частот и эффективного объема моды от ее индекса и ширины слоя. Показано, что существует оптимальная толщина слоя, при которой интенсивности полей МШГ в шаровом слое более чем на порядок превосходят интенсивности полей МШГ сплошного шара.

***Ключевые слова**: шаровой слой, моды шепчущей галереи, эффективный объем.*

1. Введение

Интерес к использованию мод шепчущей галереи (МШГ) диэлектрических и полупроводниковых микрошаров обусловлен их высокой ($\sim 10^9$) добротностью и малым эффективным объемом [1 – 8]. Электродинамика МШГ рассматривалась в [2, 5 – 7].

МШГ представляет собой шаровую моду с большим радиальным индексом [9, 10]. Характеристическое уравнение для собственных частот таких мод было записано Г.Ми еще в 1908 г., но существенный прогресс в его решении для случая МШГ стал возможным, когда Л.А. Вайнштейн предложил метод, основанный на аппроксимации функций Бесселя функциями Эйри. Такая аппроксимация позволила аналитически и с хорошей точностью найти собственные частоты МШГ диэлектрического шара и добротность, обусловленную радиационными потерями [9]. Формула для эффективного объема локализации поля в МШГ была получена в работах [5, 10].

Наряду с диэлектрическими микрошарами в экспериментах используются и шаровые слои [8, 11 – 15]. В [8, 12, 14, 15] получено характеристическое уравнение в общем виде и, в соответствии с постановкой задачи в каждой конкретной работе, проведены численные расчеты характеристик МШГ.

Наше внимание к теории МШГ в диэлектрическом слое было привлечено вопросом: можно ли концентрировать энергию в диэлектрическом слое подобно тому, как это происходит в планарном диэлектрическом волноводе? Для ответа на этот вопрос следовало детально изучить структуру, собственные частоты и добротности этих мод в зависимости от толщины диэлектрического слоя. При этом желательно было получить сравнительно простые расчетные формулы. Заметим, что расчет с использованием бесселевых функций с очень большим индексом является весьма трудоемким даже с применением компьютера. Поэтому мы исследовали характеристические уравнения для частот МШГ в диэлектрическом слое с помощью функций Эйри.

Физический институт им. П.Н. Лебедева, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: oraevsky@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 18 сентября 2002 г.

2. Электромагнитное поле шарового слоя

Рассмотрим шаровой слой с внутренним и внешним радиусами a и b соответственно, изготовленный из однородного диэлектрика с электрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Обычно раздельно рассматривают поля двух типов: электрического, или E-типа ($H_r = 0$), и магнитного, или H-типа ($E_r = 0$). Для поля электрического типа имеют место выражения [9, 16]

$$E_r = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 \varepsilon\mu U, \quad E_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r \partial\theta}, \quad E_\varphi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial r\partial\varphi},$$
$$H_r = 0, \quad H_\theta = -\frac{\mathrm{i}k\varepsilon}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\varphi}, \quad H_\varphi = \frac{\mathrm{i}k\varepsilon}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}\,. \tag{1}$$

Здесь $k = \omega/c$; U – функция Герца [16], которая внутри шарового слоя ($a < r < b$) имеет вид

$$U = C_{nm}^{(E)}\{j_n[kr(\varepsilon\mu)^{1/2}] - \beta j_{-n-1}[kr(\varepsilon\mu)^{1/2}]\}$$
$$\times P_n^m(\cos\theta)\begin{cases}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{cases}, \tag{2}$$

где $C_{nm}^{(E)}$ – постоянная интегрирования, которая определяется введенной в шар энергией (ее можно назвать константой возбуждения), а β находится из граничных условий. Вне шарового слоя ($\varepsilon = \mu = 1$) функция Герца записывается следующим образом:

$$U = C_{nm}^{(E)}\varepsilon\,\frac{\{j_n[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}] - \beta j_{-n-1}[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}]\}}{j_n(ka)}\,j_n(kr)$$
$$\times P_n^m(\cos\theta)\begin{cases}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{cases} \tag{3}$$

для $r < a$ и

$$U = C_{nm}^{(E)}\varepsilon\,\frac{\{j_n[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}] - \beta j_{-n-1}[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}]\}}{h_n(ka)}\,h_n(kr)$$
$$\times P_n^m(\cos\theta)\begin{cases}\sin m\varphi \\ \cos m\varphi\end{cases} \tag{4}$$

для $r > a$. В этих формулах P_n^m – присоединенные полиномы Лежандра; j_n и h_n – функции Риккати – Бесселя [17], связанные с функциями Бесселя и Ханкеля соотношениями

$$j_n(x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} J_{n+1/2}(x),$$
$$h_n(x) = \left(\frac{\pi x}{2}\right)^{1/2} H^{(1)}_{n+1/2}(x). \qquad (5)$$

Для определения частоты электромагнитных колебаний слоя следует найти решение характеристического уравнения с учетом непрерывности тангенциальных компонент поля на границах сред. Для мод E-типа мы получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{j_n'\left[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}\right] - \beta j_{-n-1}'\left[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}\right]}{j_n\left[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}\right] - \beta j_{-n-1}\left[ka(\varepsilon\mu)^{1/2}\right]} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{j_n'(ka)}{j_n(ka)},$$
$$\frac{j_n'\left[kb(\varepsilon\mu)^{1/2}\right] - \beta j_{-n-1}'\left[kb(\varepsilon\mu)^{1/2}\right]}{j_n\left[kb(\varepsilon\mu)^{1/2}\right] - \beta j_{-n-1}\left[kb(\varepsilon\mu)^{1/2}\right]} = \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \frac{h_n'(kb)}{h_n(kb)}. \qquad (6)$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по аргументу функции. Исключив β, получим характеристическое уравнение, которое ввиду его громоздкости мы не приводим.

Под МШГ шарового слоя электрического типа будем далее понимать поле (1) с функцией Герца (2) при $m = n \gg 1$ и частотой, определяемой первым корнем характеристического уравнения. При этом должны быть выполнены условия $kb \gg 1$ и $\varepsilon\mu > 1$.

Выражения для электромагнитного поля мод H-типа можно получить непосредственно из формул (1)–(4) и (6) заменой $E \to H$, $H \to -E$ и $\mu \to \varepsilon$, $\varepsilon \to \mu$, $C_{nm}^{(E)} \to C_{nm}^{(H)}$.

3. Собственные частоты МШГ

Точное аналитическое решение характеристических уравнений (6) невозможно вследствие их трансцендентного характера, поэтому корни уравнений следует определять численно. Однако прямое использование характеристических уравнений в форме (6) оказывается неудобным из-за плохой сходимости рядов для функций Риккати – Бесселя при больших значениях индексов ($n \sim 10^3 - 10^4$). Прямой расчет требует значительно большего машинного времени, чем при использовании аппроксимирующих выражений через функции Эйри [5, 6].

При $x \geqslant n + 1/2$ и $(\varepsilon\mu)^{1/2} > 1$ можно использовать следующие приближенные выражения [9]:

$$j_n(x) \approx \frac{t^{1/4}(x)}{\left[\sin\xi(x)\right]^{1/2}} \mathrm{Ai}(-t(x)),$$
$$j_{-n-1}(x) \approx \frac{t^{1/4}(x)}{\left[\sin\xi(x)\right]^{1/2}} \mathrm{Bi}(-t(x)), \qquad (7)$$

где Ai и Bi – первая и вторая функции Эйри соответственно; $(2/3)t^{3/2}(x) = (n+1/2)[\tan\xi(x) - \xi(x)]$ и $\cos\xi(x) = (n+1/2)/x$. Под x мы понимаем здесь как $ka(\varepsilon\mu)^{1/2}$, так и $kb(\varepsilon\mu)^{1/2}$. Отметим, что выражения (7) можно записать в более простом виде, если $x \approx n + 1/2$ [9]:

$$j_n(x) \approx v^{1/2}\mathrm{Ai}(t_l(x)), \quad j_{-n-1}(x) \approx v^{1/2}\mathrm{Bi}(t_l(x)), \qquad (8)$$

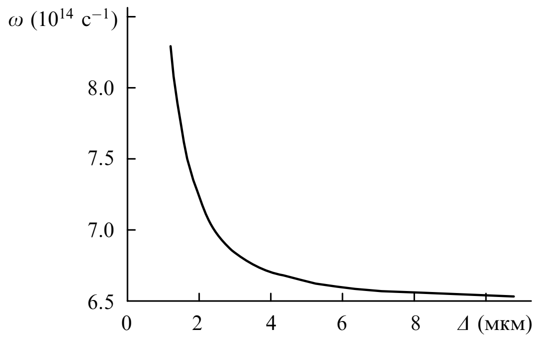

Рис.1. Зависимость собственной частоты ω МШГ от ширины слоя $\varDelta$ для $n = 1000$.

где

$$v = \left(\frac{n+1/2}{2}\right)^{1/3}; \quad t_l(x) = 2v^2 - \frac{1}{v}x.$$

В случае $z < n + 1/2$ наиболее удобным является приближение [9]

$$j_n(z) \approx \frac{\tau^{1/4}(z)}{\left[\sinh\eta(z)\right]^{1/2}} \mathrm{Ai}(\tau(z)),$$
$$j_{-n-1}(x) \approx \frac{\tau^{1/4}(z)}{\left[\sinh\eta(z)\right]^{1/2}} \mathrm{Bi}(\tau(z)), \qquad (9)$$

где $(2/3)\tau^{3/2}(z) = (n+1/2)[\eta(z) - \tanh\eta(z)]$; $\cosh z = (n+1/2)/z$.

Для численного расчета выберем шаровой слой из кварца ($\varepsilon = 2.347$, $\mu = 1$) со средним радиусом $0.5(a+b) = 300$ мкм. Зависимость действительной части собственной частоты МШГ от ширины слоя представлена на рис.1. Видно, что собственная частота диэлектрического слоя уменьшается с увеличением его ширины. Это важное обстоятельство может быть использовано для подстройки резонансной частоты слоя к частоте излучения возбуждающего лазера при заданном диаметре слоя.

Зависимость собственных частот от индекса моды и ширины слоя можно аппроксимировать следующей функцией:

$$\omega_n(\varDelta) \approx \frac{c}{b\varepsilon^{1/2}}\Bigg(2v^3 + 2.3381v + A_1\exp\left\{-\left[\left(\alpha_1 - \frac{\gamma_1}{\varDelta}\right)v^3 + \delta_1\right]\varDelta\right\}\Bigg). \qquad (10)$$

Здесь $\varDelta$ – ширина слоя в мкм; $v = [0.5(n+0.5)]^{1/3}$. Численные коэффициенты выражения (10) представлены в табл.1.

Отметим, что для подстройки частоты МШГ слоя к частоте излучения возбуждающего лазера необходимо

Табл.1. Коэффициенты формулы (10).

Коэффициент	E-тип	H-тип
A_1	587.706	948.718
$10^3\alpha_1$	1.251	0.908
$10^3\gamma_1$	0.882	0.226
δ_1	5.95	6.43

знать разность частот с соседними индексами. Ее можно получить, продифференцировав формулу (10) по n. В рассматриваемом нами численном примере эта разность частот изменяется от значения $3.26\times10^{11}(1+0.39/\nu^2)$ с$^{-1}$, соответствующего случаю сплошного шара радиусом $2R$, до значения $6.53\times10^{11}[1+0.39/\nu^2+0.5\gamma_1 A_1 \times\exp(\gamma_1\nu^3)]$ с$^{-1}$, соответствующего бесконечно тонкому слою. Заметим также, что при фиксированном среднем радиусе слоя вычисленные коэффициенты возрастают с увеличением диэлектрической проницаемости ε.

Используя формулу (10) и второе из уравнений (6), найдем аппроксимирующую зависимость действительной части коэффициентов β от ширины слоя и индекса n:

$$-\ln\beta_n(\varDelta)\approx A_2 n^{\alpha_2} -B_2\exp\left\{-\left[\left(\gamma_2-\frac{\delta_2}{\varDelta}\right)\nu^3+\sigma_2\right]\varDelta\right\}. \tag{11}$$

Здесь $\varDelta$ измеряется в мкм, а численные коэффициенты представлены в табл.2. Отметим, что формулы (10) и (11) являются аппроксимацией, найденной с помощью численного эксперимента.

Мнимая часть собственной частоты крайне мала, что обуславливает малые радиационные потери в МШГ. Она настолько мала по сравнению с действительной частью, что сразу найти численно ее комплексное значение практически невозможно. Однако мнимую часть можно вычислить, если воспользоваться идеей Л.А.Вайнштейна [9]. Эта идея состоит в том, что в первом приближении в характеристическом уравнении пренебрегают мнимой частью и вычисляют действительную часть частоты, а в следующем приближении вычисляют комплексную поправку к частоте. Подставляя в (6) соотношения (8) и следуя методике работы [9], получаем

$$\omega_n\approx\frac{c}{b(\varepsilon\mu)^{1/2}}(2\nu^3+2.3381\nu-\Delta t_n), \tag{12}$$

где Δt_n – комплексная величина. Для МШГ E-типа

$$\Delta t_n\approx[1+\mathrm{i}\exp(-2T_n)]\left[\frac{\varepsilon}{\mu}(\varepsilon\mu-1)\right]^{-1/2}\left(\frac{2\beta_n-\mathrm{i}}{2\beta_n+\mathrm{i}}\right). \tag{13}$$

В формуле (13) величина T_n определяется соотношением

$$T_n\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\operatorname{arccosh}\left(\varepsilon\mu^{1/2}\right)-\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right] -2.3381\nu\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{2\beta_n-\mathrm{i}}{2\beta_n+\mathrm{i}}\right). \tag{14}$$

Соответствующие выражения для Δt_n в случае МШГ H-типа получаем из формул (13), (14) заменой $\varepsilon\to\mu$ и $\mu\to\varepsilon$.

Следует отметить, что в случае комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon=\varepsilon'+\mathrm{i}\varepsilon''$, когда $|\varepsilon''|\ll\varepsilon'$, в полученных выше формулах для МШГ E-типа вместо ε должно быть ε', а $(2\beta_n-\mathrm{i})/(2\beta_n+\mathrm{i})$ необходимо умножить на $(\varepsilon^*/\varepsilon)^{1/2}$. Для МШГ H-типа достаточно заменить $\varepsilon\to\varepsilon'$.

Табл.2. Коэффициенты формулы (11).

Коэффициент	E-тип	H-тип
A_2	1.1147	0.3822
α_2	0.1102	0.1898
B_2	1198.927	813.584
$10^3\gamma_2$	1.2578	0.9084
$10^3\delta_2$	0.8706	0.205
σ_2	5.9311	6.4288

Добротность моды, обусловленную радиационными потерями, определим выражением

$$Q_{\mathrm{r}}^{(n)}=-\frac{\mathrm{Re}\omega_n}{2\mathrm{Im}\omega_n}. \tag{15}$$

Из (13), (14) при $\mu=1$ следует

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\omega_n^{(E)}&\approx-\frac{c}{b\varepsilon(\varepsilon-1)^{1/2}}\\&\times\frac{4\beta_n-\left(4\beta_n^2-1\right)\exp\left(-2T_n^{(E)}\right)\cos(2\chi_n)}{4\beta_n^2+1},\\\mathrm{Im}\omega_n^{(H)}&\approx-\frac{c}{b(\varepsilon-1)^{1/2}}\\&\times\frac{4\beta_n-\left(4\beta_n^2-1\right)\exp\left(-2T_n^{(H)}\right)\cos(2\varepsilon\chi_n)}{4\beta_n^2+1}.\end{aligned} \tag{16}$$

В этих формулах

$$\begin{aligned}T_n^{(H)}&=T_n^{(E)}-\varepsilon\chi_n\left(\beta_n-\frac{1}{4\beta_n}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)\\&\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\operatorname{arccosh}\varepsilon^{1/2}-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]\\&-2.3381\nu\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}-\varepsilon\chi_n\left(\beta_n-\frac{1}{4\beta_n}\right),\end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\chi_n=\frac{4\beta_n}{\varepsilon\left(4\beta_n^2+1\right)}.$$

Используя (15), с учетом (16), (17) и (12) нетрудно вычислить добротность, обусловленную радиационными потерями, как функцию параметров диэлектрического слоя и индекса моды.

Из предыдущего рассмотрения видно, что радиационные потери в МШГ шарового слоя неизбежны. Однако они не являются особенностью именно слоистой структуры: аналогичного рода потери существуют и в однородных диэлектрических шарах [9, 10] и обусловлены кривизной шаровой поверхности. Физическая интерпретация этого явления, основанная на конечности скорости света, дана в [9].

Здесь уместно подчеркнуть, что добротность МШГ шарового слоя, как и добротность однородного диэлектрического шара, определяется не только радиационными, но и другими видами потерь. Среди них поверхностное и объемное рассеяние электромагнитной волны и ее поглощение примесями на поверхности. Эти виды потерь не могут быть вычислены в рамках электродинамики идеальной сферы или шарового слоя, и их анализ выходит за рамки настоящей работы. Общий подход к расчету такого рода потерь обсуждается в [10].

4. Эффективный объем

Следуя [5, 6], определим эффективный объем моды формулой

$$V_{\rm eff}^{(p,n)} = \frac{\int E_{pn}^2(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\left(E_{pn}^2\right)_{\max}}. \qquad (18)$$

В этом выражении интегрирование производится по объему слоя; p – проекция поля МШГ. Исследование эффективного объема позволяет определять локализацию поля слоем. Рассматривая φ- и θ-проекции поля E-типа, получаем

$$V_{\rm eff}^{(\varphi,E)} \approx \pi r_{\max}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/3} \times \frac{\int_{ka\varepsilon^{1/2}}^{kb\varepsilon^{1/2}} \mathrm{d}\zeta\left[j_n'(\zeta) - \beta_n j_{-n-1}'(\zeta)\right]^2}{\left\{\zeta_{\max}\left[j_n'(\zeta_{\max}) - \beta_n j_{-n-1}'(\zeta_{\max})\right]^2\right\}_{\zeta_{\max}=kr_{\max}\varepsilon^{1/2}}}$$

$$= \pi r_{\max}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/3}\frac{1}{f_n^{(E,\varphi)}}, \qquad (19)$$

$$V_{\rm eff}^{(\theta,E)} \approx \frac{\mathrm{e}}{2}V_{\rm eff}^{(\varphi,E)}.$$

Здесь $r_{\max}$ – радиальная координата, соответствующая положению максимума интенсивности. Аналогично записываются выражения для эффективного объема радиальной проекции

$$V_{\rm eff}^{(r,E)} \approx \pi r_{\max}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/3} \times \frac{\int_{ka\varepsilon^{1/2}}^{kb\varepsilon^{1/2}} \left(\mathrm{d}\zeta/\zeta^2\right)\left[j_n(\zeta) - \beta_n j_{-n-1}(\zeta)\right]^2}{\left\{(1/\zeta_{\max})\left[j_n(\zeta_{\max}) - \beta_n j_{-n-1}(\zeta_{\max})\right]^2\right\}_{\zeta_{\max}=kr_{\max}\varepsilon^{1/2}}}$$

$$= \pi r_{\max}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/3}\frac{1}{f_n^{(r)}} \qquad (20)$$

и объемов θ- и φ-проекций поля волны H-типа

$$V_{\rm eff}^{(\theta,H)} \approx \pi r_{\max}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/3} \times \frac{\int_{ka\varepsilon^{1/2}}^{kb\varepsilon^{1/2}} \mathrm{d}\zeta\left[j_n(\zeta) - \beta_n j_{-n-1}(\zeta)\right]^2}{\left\{\zeta_{\max}\left[j_n(\zeta_{\max}) - \beta_n j_{-n-1}(\zeta_{\max})\right]^2\right\}_{\zeta_{\max}=kr_{\max}\varepsilon^{1/2}}}$$

$$= \pi r_{\max}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{1/3}\frac{1}{f_n^{(H,\theta)}}, \qquad (21)$$

$$V_{\rm eff}^{(\varphi,H)} \approx \frac{\mathrm{e}}{2}V_{\rm eff}^{(\theta,H)}.$$

Интеграл в (19)–(21) можно взять аналитически. Однако получаемое таким образом выражение неудобно для дальнейших исследований, т.к. $r_{\max}$ можно определить лишь численно. Поэтому более удобным является численное исследование параметра f.

На рис.2 и 3 показаны зависимости параметра f от ширины кварцевого шарового слоя ($\varepsilon = 2.347$, $\mu = 1$) со средним радиусом 300 мкм. Оказывается, что в случае φ- и θ-проекций волны электрического типа имеется минимум, в то время как в случае радиальной проекции МШГ E-типа и θ- и φ-проекций волны H-типа минимумов нет.

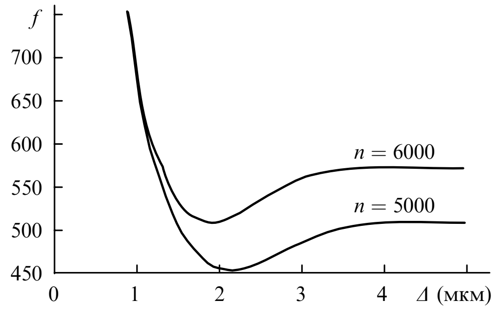

Рис.2. Зависимости f-параметра φ-проекции МШГ E-типа от ширины слоя $\varDelta$ для $n = 5000$ и 6000.

Исходя из определения эффективного объема, в точке минимума f для φ- и θ-проекций волны электрического типа имеет место максимальная делокализация поля МШГ: поле здесь занимает наибольший из возможных объемов.

Значения минимумов $f_{\min}$ как функции индекса моды n и ширины слоя $\varDelta_{\min}$ (в мкм) хорошо аппроксимируются зависимостями

$$f_{\min}(n) \approx (6.5289)\times 10^{-2}n + 101.42,$$
$$\varDelta_{\min}(n) \approx -(3.238)\times 10^{-4}n + 3.607. \qquad (22)$$

Как видно из рис.2, параметр f, так же как и эффективный объем, перестает существенным образом меняться, начиная с некоторой определенной ширины слоя $\varDelta_{\rm s} > \varDelta_{\min}$. Функция, которая определяет смещение минимума параметра f при изменении индекса моды, будет, очевидно, иметь линейный характер, подобный характеру зависимости $\varDelta_{\min}(n)$, представленной в (22). При уменьшении ширины слоя видно резкое уменьшение f, соответствующее столь же резкому увеличению эффективного объема, т.е. процессу делокализации МШГ, который, однако, продолжается только при уменьшении ширины до значения, соответствующего $\varDelta_{\min}$. С дальнейшим уменьшением ширины эффективный объем моды быстро стремится к нулю.

Как видно на рис.3, для зависимости f-параметра радиальной проекции МШГ E-типа и θ- и φ-проекций поля волны H-типа от ширины слоя минимумов нет. Формулы (20) и (21) могут быть аппроксимированы более простым соотношением

$$f(n,\varDelta) \approx (A_3 n + B_3)\varDelta^{-\alpha_3}, \qquad (23)$$

где $\varDelta$ взято в мкм, а численные коэффициенты даны в табл.3.

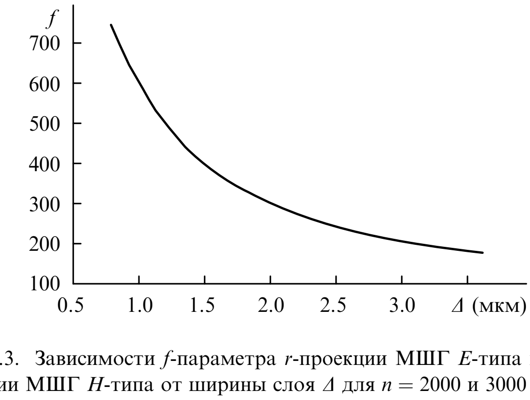

Рис.3. Зависимости f-параметра r-проекции МШГ E-типа и θ-проекции МШГ H-типа от ширины слоя $\varDelta$ для $n = 2000$ и 3000 (в представленной области они совпадают).

Табл.3. Коэффициенты формулы (23).

Коэффициент	E-тип	H-тип
$10^4 A_3$	7.126	7.859
B_3	597.63	597.32
α_3	0.9962	0.9957

5. Сравнение интенсивностей полей МШГ шара и шарового слоя

Для того чтобы сравнить интенсивности полей МШГ шарового слоя и шара, нам необходимо найти константы возбуждения $C_{nm}^{(E,H)}$. Их можно определить, зная энергию поля МШГ или (как далее поступим мы) задавая внешний источник излучения, который возбудит моду шепчущей галереи в исследуемой структуре. Здесь мы не будем рассматривать все способы возбуждения МШГ в шаровом слое, поскольку они полностью совпадают с методами их возбуждения в сплошном шаре и подробно рассмотрены в [10]. Для сравнения интенсивностей необходимо лишь выбрать одинаковый способ возбуждения МШГ как в шаровом слое, так и в сплошном шаре.

Рассмотрим для определенности случай возбуждения МШГ плоской монохроматической волной. В соответствии с работой [10] можно возбудить МШГ плоской волной в плоскости, параллельной направлению распространения волны. Если волна распространяется вдоль оси x и поляризована вдоль оси y или z, то такими плоскостями будут xy и xz. При этом для волны, поляризованной вдоль оси y, в азимутальной плоскости xy будут возбуждаться МШГ E-типа, а в плоскости xz – H-типа. Для волны, поляризованной вдоль оси z, картина возбуждения будет обратной.

Предполагая частоту плоской волны близкой к частоте МШГ и сравнивая энергии полей МШГ, построенных по теориям Ми [18] и Вайнштейна [9], находим константы возбуждения для случая $m = n$:

$$\left|C_{nn}^{(E)}\right|^2 = \left\{E_0 \frac{1}{(2n)!!}\left[\frac{2n+1}{n+1}\right]|b_n|\right\}^2,$$
$$\left|C_{nn}^{(H)}\right|^2 = \left\{E_0 \frac{1}{(2n)!!}\left[\frac{2n+1}{n+1}\right]|a_n|\right\}^2, \tag{24}$$

где E_0 – амплитуда падающей волны; a_n и b_n – так называемые коэффициенты Ми [18], имеющие для диэлектрического шара радиусом R с проницаемостью ε следующий вид:

$$a_n^{(\mathrm{sp})} = \frac{j_n(kR)}{j_n(kR\varepsilon^{1/2})}\left[\frac{j_n'(kR)}{j_n(kR)} - \frac{h_n'(kR)}{h_n(kR)}\right] \times\left[\frac{j_n'(kR\varepsilon^{1/2})}{j_n(kR\varepsilon^{1/2})} - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\frac{h_n'(kR)}{h_n(kR)}\right]^{-1},$$
$$b_n^{(\mathrm{sp})} = \frac{j_n(kR)\varepsilon^{1/2}}{j_n(kR\varepsilon^{1/2})}\left[\frac{j_n'(kR)}{j_n(kR)} - \frac{h_n'(kR)}{h_n(kR)}\right] \times\left[\frac{j_n'(kR\varepsilon^{1/2})}{j_n(kR\varepsilon^{1/2})} - \varepsilon^{1/2}\frac{h_n'(kR)}{h_n(kR)}\right]^{-1}, \tag{25}$$

Из граничного условия на внешней поверхности шарового слоя ($r = b$) имеем выражения [19]

$$a_n^{(\mathrm{sh})} = \frac{j_n(kb)}{[j_n(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(kb\varepsilon^{1/2})]}\left[\frac{j_n'(kb)}{j_n(kb)} - \frac{h_n'(kb)}{h_n(kb)}\right] \times\left[\frac{j_n'(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}'(kb\varepsilon^{1/2})}{j_n(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(kb\varepsilon^{1/2})} - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\frac{h_n'(kb)}{h_n(kb)}\right]^{-1}, \tag{26}$$

$$b_n^{(\mathrm{sh})} = \frac{j_n(kb)\varepsilon^{1/2}}{j_n(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(kb\varepsilon^{1/2})}\left[\frac{j_n'(kb)}{j_n(kb)} - \frac{h_n'(kb)}{h_n(kb)}\right] \times\left[\frac{j_n'(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}'(kb\varepsilon^{1/2})}{j_n(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(kb\varepsilon^{1/2})} - \varepsilon^{1/2}\frac{h_n'(kb)}{h_n(kb)}\right]^{-1}.$$

Удовлетворяя граничным условиям на внутренней поверхности слоя ($r = a$), получаем дополнительные соотношения [19], из которых находим значения параметра β_n. Эти выражения имеют вид

$$\frac{j_n'(ka\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}'(ka\varepsilon^{1/2})}{j_n(ka\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(ka\varepsilon^{1/2})} = \varepsilon^{1/2}\frac{j_n'(ka)}{j_n(ka)} \tag{27}$$

для коэффициентов $b_n^{(\mathrm{sh})}$ и

$$\frac{j_n'(ka\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}'(ka\varepsilon^{1/2})}{j_n(ka\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(ka\varepsilon^{1/2})} = \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\frac{j_n'(ka)}{j_n(ka)} \tag{28}$$

для коэффициентов $a_n^{(\mathrm{sh})}$. В формулах (25)–(28) $k = \omega/c$, где ω – частота плоской волны. Дополнительные индексы (sp и sh) введены для того, чтобы отличить коэффициенты Ми от их аналогов для шарового слоя.

Рассмотрим коэффициенты (26) вблизи центра резонансной частоты МШГ. Используя методику Вайнштейна [9] представления цилиндрических функций больших индексов через функции Эйри и ограничиваясь первым членом по малой величине $|\mathrm{Im}\omega_n/\mathrm{Re}\omega_n|:1/Q$, можно показать (см. Приложение), что

$$\frac{j_n'(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}'(kb\varepsilon^{1/2})}{j_n(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(kb\varepsilon^{1/2})} - \varepsilon^{1/2}\frac{h_n'(kb)}{h_n(kb)} \approx -\frac{\mathrm{i}}{2Q_n^{(E)}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left\{\varepsilon^2 - (\varepsilon-1)\exp\left[2\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1/2} + \left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right] - \frac{2\mathrm{i}}{2\beta_n+\mathrm{i}}\right\},$$
$$\frac{j_n'(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}'(kb\varepsilon^{1/2})}{j_n(kb\varepsilon^{1/2}) - \beta_n j_{-n-1}(kb\varepsilon^{1/2})} - \frac{1}{\varepsilon^{1/2}}\frac{h_n'(kb)}{h_n(kb)} \approx -\frac{\mathrm{i}}{2Q_n^{(H)}}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(2\varepsilon\frac{2\beta_n}{2\beta_n+\mathrm{i}} - 1\right). \tag{29}$$

Аналогичные выражения для шара можно получить, положив $\beta_n = 0$ и $b \to R$.

Таким образом, для отношения коэффициентов (24) слоя и шара в резонансе мы легко получаем следующие выражения:

$$\left|\frac{C_n^{(\mathrm{sh})E}}{C_n^{(\mathrm{sp})E}}\right| \approx \frac{1}{(4|\beta_n|^2+1)^{1/2}}\times$$

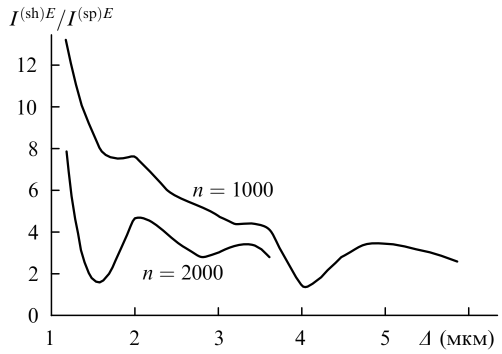

Рис.4. Зависимости отношения максимумов интенсивностей φ-проекции МШГ E-типа слоя со средним радиусом 300 мкм и шара радиусом 300 мкм от ширины слоя Δ для $n = 1000$ и 2000.

$$\times\left|1+\frac{2[2\beta_n/(2\beta_n+\mathrm{i})]}{(\varepsilon-1)\{\exp[2(1-1/\varepsilon)^{-1/2}+(1-1/\varepsilon)^{1/2}]-\varepsilon-1\}-1}\right|^{-1}$$

$$\times\frac{Q_n^{(\mathrm{sh})E}}{Q_n^{(\mathrm{sp})E}}\exp\left(\frac{4}{\varepsilon}\,\mathrm{Re}\frac{2\beta_n}{2\beta_n+\mathrm{i}}\right), \qquad (30)$$

$$\left|\frac{C_n^{(\mathrm{sh})E}}{C_n^{(\mathrm{sp})E}}\right|\approx\frac{1}{(4|\beta_n|^2+1)^{1/2}}\left|1-2\varepsilon\left(\frac{2\beta_n}{2\beta_n+\mathrm{i}}\right)\right|^{-1}$$

$$\times\frac{Q_n^{(\mathrm{sh})H}}{Q_n^{(\mathrm{sp})H}}\exp\left(4\mathrm{Re}\frac{2\beta_n}{2\beta_n+\mathrm{i}}\right).$$

Построим сначала отношение максимумов интенсивностей полей для φ-проекции поля E-типа в зависимости от толщины слоя. Для упрощения расчета положим отношение добротностей МШГ слоя и шара равным единице. Будем нормировать интенсивность МШГ слоя со средним радиусом 300 мкм на интенсивность МШГ шара радиусом 300 мкм. На рис.4 представлены зависимости для индексов мод $n = 1000$ и 2000. Хорошо видна тенденция к увеличению отношения максимумов интенсивностей при уменьшении ширины слоя. Заметно также уменьшение отношения с увеличением индекса моды. На рис.5 представлены зависимости отношения максимумов интенсивности θ-проекции поля H-типа от ширины слоя для $n = 1000$ и 2000. Для них характерна яркая немонотонность зависимости – чередование минимумов и максимумов, причем значения последних растут при увеличении ширины слоя и индекса моды.

Физически ясно, что шаровой слой при уменьшении

Рис.5. Зависимости отношения максимумов интенсивностей θ-проекции МШГ H-типа слоя со средним радиусом 300 мкм и шара радиусом 300 мкм от ширины слоя Δ для $n = 1000$ и 2000.

ширины должен терять энергию поля МШГ вследствие образования так называемых вытекающих волн [16], перекачивающих энергию в полость шара и в окружающую слой среду. В случае плоской диэлектрической пластинки потери поля становятся заметными начиная с некоторого характерного значения ее толщины [16]. При этом поле одинаковым образом вытекает по обе стороны от пластинки. В рассматриваемом нами случае процесс вытекания поля происходит иначе [19]. Начиная с ширины (см. Приложение)

$$(b-a)_H\approx 2R\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]^{-1}, \qquad (31)$$

где $R = 0.5(b + a)$, поле МШГ H-типа выталкивается в полость, ограниченную слоем, а при дальнейшем уменьшении ширины, начиная со значения

$$(b-a)_E\approx 2R\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]^{-1}$$

$$\times\exp\left[-2\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right], \qquad (32)$$

поле МШГ электрического типа вытекает во внешнюю среду.

6. Выводы

Таким образом в результате проведенного исследования показано, что

– существует предельная толщина шарового слоя, при которой возможно возбуждение в нем МШГ с большой добротностью;

– эффективный объем МШГ в шаровом слое может быть меньше эффективного объема МШГ в однородном шаре;

– амплитуда интенсивности МШГ слоя существенно зависит от его ширины и номера моды и может быть до $\sim 10^2$ раз больше интенсивности МШГ сплошного шара, что улучшает эффективность нелинейных преобразований излучения в шаровом слое;

– резонансная частота МШГ в слое зависит от толщины слоя, и это дает возможность плавно изменять резонансную частоту МШГ при фиксированном диаметре шара;

– формула (10) позволяет вычислять собственную частоту МШГ в диэлектрическом шаровом слое, не прибегая к численному решению характеристического уравнения, причем точность вычисления линейно возрастает с увеличением индекса моды n.

Приложение

В данном приложении получены уравнения для собственных частот МШГ в случае слоя малой ширины (с условием малости $\alpha = (b - a)/(b + a) \ll 1$) и значения ширины слоя, соответствующие отсутствию потерь внутри полости для МШГ E-типа и вне ее – для мод H-типа.

Так как внутренний и внешний радиусы слоя можно выразить через его средний радиус R (который мы полагаем постоянным) в виде $a = R(1 - \alpha)$ и $b = R(1 + \alpha)$, то, использовав условие малости α и введя функции

$$F_n(x) = \frac{j_n'(x) - \beta_n j'_{-n-1}(x)}{j_n(x) - \beta_n j_{-n-1}(x)},$$

$$\Psi_n(x) = \frac{j_n'(x)}{j_n(x)}, \quad \Phi_n(x) = \frac{h_n'(x)}{h_n(x)}, \tag{П1}$$

уравнения системы (6) представим следующим образом (сохранен лишь первый порядок по α):

$$F_n\big(kR(\varepsilon\mu)^{1/2}\big) \approx \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\Psi_n(kR) - \alpha kR\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}$$

$$\times[\partial_x\Psi_n(x)|_{x=kR} - \mu\partial_x F_n(x)|_{x=kR(\varepsilon\mu)^{1/2}}],$$

$$F_n\big(kR(\varepsilon\mu)^{1/2}\big) \approx \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\Phi_n(kR) + \alpha kR\left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2} \tag{П2}$$

$$\times[\partial_x\Phi_n(x)|_{x=kR} - \mu\partial_x F_n(x)|_{x=kR(\varepsilon\mu)^{1/2}}].$$

Для производных этих функций имеем следующие выражения [17]:

$$\partial_x F_n(x) = -\left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) + \frac{(2n+1)^2}{4x^2} + F_n(x)\left[\frac{1}{2x} - F_n(x)\right]$$

$$+ \frac{1}{2x}\left[\frac{(4n+1)j_{n+1}(x) + \beta_n(4n+3)j_{-n}(x)}{j_n(x) - \beta_n j_{-n-1}(x)}\right]$$

$$+ \frac{2n+1}{4x^2}\frac{j_n(x) + \beta_n j_{-n-1}(x)}{j_n(x) - \beta_n j_{-n-1}(x)},$$

$$\partial_x\Phi_n(x) = -\left(1 + \frac{3}{4x^2}\right) - \frac{2n+1}{4x^2} + \frac{1}{2x}\Phi_n(x) \tag{П3}$$

$$- \frac{1}{2x}\frac{h_{n-1}(x) - h_{n+1}(x)}{h_n(x)} + \frac{h_{n-1}(x)}{h_n(x)}\frac{h_{n+1}(x)}{h_n(x)},$$

$$\partial_x\Psi_n(x) = -\left(1 + \frac{3}{4x^2}\right) - \frac{2n+1}{4x^2} + \frac{1}{2x}\Psi_n(x)$$

$$- \frac{1}{2x}\frac{j_{n-1}(x) - j_{n+1}(x)}{j_n(x)} + \frac{j_{n-1}(x)}{j_n(x)}\frac{j_{n+1}(x)}{j_n(x)}.$$

Далее, следуя методике Вайнштейна (9), упростим выражения (П3) в области $kR(\varepsilon\mu)^{1/2} \approx n + 1/2$. Опустив подробные выкладки, в результате преобразований получим следующие соотношения:

$$\frac{h_{n-1}(kR)}{h_n(kR)} \approx \exp\big[-\operatorname{arccosh}\big(\varepsilon\mu^{1/2}\big)\big],$$

$$\frac{h_{n+1}(kR)}{h_n(kR)} \approx \exp\left[2\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu - 1}\right)^{1/2}\right.$$

$$\left. + \operatorname{arccosh}\big(\varepsilon\mu^{1/2}\big) + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right], \tag{П4}$$

$$j_{n+1}\big(kR(\varepsilon\mu)^{1/2}\big) \approx \frac{1}{2}v_n^{1/2}(-2.3381)^{-1/4}\big(-\mathrm{i}^{1/2}\big),$$

$$j_{-n}\big(kR(\varepsilon\mu)^{1/2}\big) \approx v_n^{1/2}(-2.3381)^{-1/4}\,\mathrm{i}^{1/2}.$$

Подставляя их в (П3), а затем полученные выражения в (П1), получаем систему уравнений вида

$$F_n\big(kR(\varepsilon\mu)^{1/2}\big) \approx \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\Phi_n(kR) + \frac{\alpha}{\mu}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left\{\mu\varepsilon^2 - (\varepsilon - 1)\exp\left[2\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu - 1}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right]\right.$$

$$\left. + \mu\,\frac{2\beta_n - \mathrm{i}}{2\beta_n + \mathrm{i}} - 1\right\}, \tag{П5}$$

$$F_n\big(kR(\varepsilon\mu)^{1/2}\big) \approx \left(\frac{\varepsilon}{\mu}\right)^{1/2}\Psi_n(kR) - \frac{\alpha}{\mu}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left\{\mu\varepsilon^2 - (\varepsilon - 1)\exp\left[2\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu - 1}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right]\right.$$

$$\left. + \mu\,\frac{2\beta_n - \mathrm{i}}{2\beta_n + \mathrm{i}} - 1\right\}.$$

Из (П5), используя формулы (12) и (15), нетрудно получить выражение для добротности радиационных потерь, т. к. для комплексной величины Δt_n, введенной в (12), имеем

$$\mathrm{Im}\Delta t_n = \frac{4\beta_n}{4\beta_n^2 + 1}\left\{\left[\frac{\varepsilon}{\mu}(\varepsilon\mu - 1)\right]^{1/2} \pm \frac{\alpha}{\mu}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right.$$

$$\times\left\{(\varepsilon - 1)\exp\left[2\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu - 1}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right] - \mu\varepsilon^2 + 1\right\}$$

$$\left.\times\big(A_n^2 + B_n^2\big)^{-1}\right\}\frac{1}{v_n}, \tag{П6}$$

где

$$A_n = \left[\frac{\varepsilon}{\mu}(\varepsilon\mu - 1)\right]^{1/2} \pm \frac{\alpha}{\mu}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left\{(\varepsilon - 1)\exp\left[2\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu - 1}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right]\right.$$

$$\left. - \mu\varepsilon^2 - \mu\,\frac{4\beta_n^2 - 1}{4\beta_n^2 + 1} + 1\right\}; \tag{П7}$$

$$B_n = \frac{4\beta_n}{4\beta_n^2 + 1}\,\alpha\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Знак «$\pm$» в (П6), (П7) означает, что в случае знака «$+$» выражения относятся к первой формуле (П5), а в случае знака «$-$» они соответствуют второй формуле (П5).

При подстановке в формулу (15) в выражении (П6) меняется знак на внутренней поверхности слоя в точке, где

$$\left[\frac{\varepsilon}{\mu}(\varepsilon\mu - 1)\right]^{1/2} - \frac{\alpha}{\mu}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\times\left\{(\varepsilon - 1)\exp\left[2\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu - 1}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right]\right.$$

$$\left. - \mu\varepsilon^2 + 1\right\} = 0, \tag{П8}$$

поскольку

$$(\varepsilon-1)\exp\left[2\left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon\mu-1}\right)^{1/2}+\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)^{1/2}\right]+1>\mu\varepsilon^2$$

для $\mu=1$ и $\varepsilon=2.347$.

Из формулы (П8) следует выражение для ширины слоя, соответствующей отсутствию потерь на излучение в полость, для волн E-типа. Таким образом, при $\mu=1$ имеем

$$(b-a)_E\approx 2R\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]^{-1}$$
$$\times\exp\left[-2\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\right)^{1/2}-\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]. \qquad (\text{П}9)$$

Для волн магнитного типа после аналогичных рассуждений получаем следующую формулу ($\mu=1$):

$$(b-a)_H\approx 2R\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)^{1/2}\right]^{-1}. \qquad (\text{П}10)$$

Заметим, что в случае поля магнитного типа знак в выражении (П6) меняется на внешней поверхности шарового слоя.

1. Ilchenko V.S., Gorodetsky M.L. *Laser Phys.*, **2**, 1004 (1992).
2. Gorodetsky M.L., Ilchenko V.S. *Opt. Commun*, **113**, 133 (1994).
3. Васильев В.В., Величанский В.Л., Городецкий М.Л., Ильченко В.С., Хольберг Л., Яровицкий А.В. *Квантовая электроника*, **23**, 675 (1996).
4. Vernooy D.W., Ilchenko V.S., Mabuchi H., Streed E.W., Kimble H.J. *Opt. Lett.*, **23**, 247 (1998).
5. Ораевский А.Н., Скалли М., Величанский В.Л. *Квантовая электроника*, **25**, 211 (1998).
6. Oraevsky A.N., Scully M.O., Sarkisyan T.V., Bandy D.K. *Laser Phys.*, **9**, 990 (1999).
7. Ораевский А.Н., Бенди Д.К. *Квантовая электроника*, **22**, 211 (1995).
8. *Optical Effects Associated with Small Particles*. Eds by P.W.Barber, R.K.Chang (Singapore: World Scientific, 1988).
9. Вайнштейн Л.А. *Открытые резонаторы и открытые волноводы* (М.: Сов. радио, 1966).
10. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **32**, 377 (2002).
11. Oldenburg S.J., Averitt R.D., Westcott S.L., Halas N.J. *Chem. Phys. Lett.*, **288**, 243 (1998).
12. Averitt R.D., Sarkar D., Halas N.J. *Phys. Rev. Lett.*, **22**, 4217 (1997).
13. Eto M., Kawamura K. *Phys. Rev. B*, **51**, 10119 (1995).
14. Bhandari R. *Appl. Opt.*, **24**, 1960 (1985).
15. Rojas R., Claro F., Fuchs R. *Phys. Rev. B*, **37**, 6799 (1988).
16. Вайнштейн Л.А. *Электромагнитные волны* (М.: Радио и связь, 1986).
17. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган (М.:Наука, 1979).
18. Стреттон Дж.А. *Теория электромагнетизма* (М. – Л.: ОГИЗ, 1948).
19. Гузатов Д.В. *Моды шепчущей галереи шарового слоя диэлектрика* (Дипл. работа, М., МИФИ, 2001).