

Полихроматические солитоны в условиях четырехфотонного комбинационно-параметрического взаимодействия

А.В.Андреев, А.А.Валеев

Проведен анализ системы уравнений, описывающей четырехфотонное комбинационно-параметрическое взаимодействие произвольного числа компонент поля, показано существование солитонов, содержащих множество стоксовых и антистоксовых компонент.

Ключевые слова: комбинационно-активная среда, солитоны, фазовая и частотная модуляция, когерентное рассеяние.

1. Введение

Комбинационно-параметрическое преобразование лазерной накачки молекулярной средой может сопровождаться генерацией излучения со спектром, состоящим из большого числа линий и перекрывающим широкую область длин волн в ИК, видимом и УФ диапазонах. Подобное преобразование рассматривалось в достаточно большом числе теоретических работ в качестве эффективного способа получения многочастотного излучения со спектром, состоящим из эквидистантных или квазиэквидистантных спектральных линий при колебательном и/или вращательном ВКР и резонансных параметрических процессах [1–12].

ВКР-преобразование импульсов пико- и фемтосекундной длительности, протекающее в существенно нестационарных условиях, имеет ряд особенностей. Например, возможно распространение солитонов как при резонансном, так и нерезонансном ВКР [13, 14]. Использование ВКР и четырехфотонных комбинационно-параметрических процессов (наряду с фазовой самомодуляцией [15] и генерацией гармоник высокого порядка [16, 17]) для получения фемто- и субфемтосекундных импульсов [12] вызывает несомненный интерес. Однако, несмотря на значительное число опубликованных работ, общий вид и амплитуды компонент солитонного решения остаются малоизученными.

В настоящей работе исследуются солитонные состояния многокомпонентного излучения, распространяющегося в газообразной среде. Теоретический анализ строится на основе рассмотрения самосогласованных решений системы уравнений нестационарного четырехфотонного комбинационно-параметрического взаимодействия, описывающих согласованные по фазе импульсы на частоте каждой из компонент, которые распространяются с одинаковыми скоростями, совпадающими со скоростью распространения возбуждения среды.

А.В.Андреев, А.А.Валеев. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы

Поступила в редакцию 17 мая 2002 г., после доработки – 18 марта 2003 г.

2. Основные уравнения

Получим уравнения, позволяющие описать четырехфотонные процессы комбинационного рассеяния в газообразных средах. Обозначим частоту основной компоненты как ω_0 , частоты стоксовых и антистоксовых компонент как $\omega_j = \omega_0 + j\Omega$, где $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; Ω – частота комбинационного перехода. При этом напряженность суммарного поля имеет следующий вид:

$$E = \sum_j A_j \exp i(k_j z - \omega_j t) + \text{компл. сопр.},$$

где A_j – медленно меняющиеся амплитуды; z – координата; $k_j = \omega_j/c$ – волновые векторы спектральных компонент; компоненты с $j < 0$ соответствуют стоксовой, а с $j > 0$ – антистоксовой области. Ограничимся рассмотрением случая слабой дисперсии, когда фазовая скорость света в среде c постоянна и равна групповой скорости.

Система уравнений для медленно меняющихся амплитуд компонент электромагнитного поля в комбинационно-активной среде с плотностью активных частиц N и наведенной когерентностью $\rho_{12} = \rho_{21}^*$ имеет хорошо известный вид [18]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) A_j = i2\pi\omega_j N \{ & r_{11}(\omega_j, -\omega_j)\rho_{11} \\ & + r_{22}(\omega_j, -\omega_j)\rho_{22} \} A_j + r_{12}(\omega_j, -\omega_{j-1})\rho_{21} A_{j-1} \\ & + r_{21}(\omega_{j+1}, -\omega_j)\rho_{12} A_{j+1} \}. \end{aligned} \quad (1)$$

Матричные элементы $r_{11}(\omega_j, -\omega_j)$, $r_{22}(\omega_j, -\omega_j)$ и $r_{21}(\omega_{j+1}, -\omega_j)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} r_{11}(\omega_j, -\omega_j) &= \frac{1}{\hbar} \sum_k \left[\frac{d_{1k}d_{k1}}{\Omega_{k1} - \omega_j} + \frac{d_{1k}d_{k1}}{\Omega_{k1} + \omega_j} \right], \\ r_{22}(\omega_j, -\omega_j) &= \frac{1}{\hbar} \sum_k \left[\frac{d_{2k}d_{k2}}{\Omega_{k2} - \omega_j} + \frac{d_{2k}d_{k2}}{\Omega_{k2} + \omega_j} \right], \\ r_{21}(\omega_{j+1}, -\omega_j) &= \frac{1}{\hbar} \sum_k \left[\frac{d_{2k}d_{k1}}{\Omega_{k2} - \omega_j} + \frac{d_{2k}d_{k1}}{\Omega_{k1} + \omega_j} \right], \\ r_{12}(\omega_{j+1}, -\omega_j) &= r_{21}^*(\omega_{j+1}, -\omega_j). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее считается, что частоты дипольно разрешенных переходов Ω_{k1} значительно превышают частоты взаимодействующих компонент: $\Omega_{k1} \gg \omega_j$.

Уравнения для статистически усредненного недиагонального элемента матрицы плотности ρ (здесь и далее $\rho \equiv \rho_{21}$) и усредненной разности населенностей между верхним и нижним уровнями ($R = \rho_{22} - \rho_{11}$) таковы:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left(\frac{1}{T_2} + iA_{21} \right) = -\frac{i}{\hbar} R \sum_j r_{21} A_j A_{j-1}^*, \quad (3)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{R - R_s}{T_1} = -\frac{2i}{\hbar} \left[\sum_k r_{12} A_k^* A_{k-1} \rho_{21} - \text{компл. сопр.} \right], \quad (4)$$

где $A_{21} \approx \Theta \sum_j |A_j|^2$ – штарковский сдвиг частоты; Θ – постоянный коэффициент; T_1 и T_2 – времена продольной и поперечной релаксации; R_s – равновесная разность населенностей.

Рассмотрим случай полного согласования волновых векторов ($k_{j+1} - k_j = k_j - k_{j-1} = \text{const}$).

Умножим уравнение (1) на A_j^* , а комплексно сопряженное ему – на A_j , сложим получившиеся уравнения и просуммируем по всем j :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \sum_j |A_j|^2 \\ & = i2\pi N \left(\rho \sum_j A_{j-1} A_j^* M_j - \rho^* \sum_j A_{j-1}^* A_j M_j^* \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $M_j = (\omega_j, -\omega_{j-1}) r_{21} (\omega_j - \omega_{j-1})$.

Затем умножим уравнение (1) на A_{j+1}^* и также просуммируем по j :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \sum_j A_j A_{j+1}^* = i2\pi N \left\{ -\rho^* \sum_j A_j A_j^* K_j \right. \\ & + \sum_j \omega_j A_j A_{j+1}^* [r_{11}(\omega_j, -\omega_j) \rho_{11} + r_{22}(\omega_j, -\omega_j) \rho_{22}] \\ & - \sum_j \omega_{j+1} A_j A_{j+1}^* [r_{11}(\omega_{j+1}, -\omega_{j+1}) \rho_{11} \\ & \left. + r_{22}(\omega_{j+1}, -\omega_{j+1}) \rho_{22}] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $K_j = \omega_{j+1} r_{21} (\omega_{j+1}, -\omega_j) - \omega_{j-1} r_{21} (\omega_j, -\omega_{j-1})$.

Тогда в приближении независимости K , M , c , а также r_{21} , r_{22} , r_{11} от индекса j (это справедливо в области спектра, расположенной по частоте значительно ниже частот дипольно разрешенных переходов) уравнения (5), (6) вместе с уравнениями (3) и (4) образуют замкнутую систему относительно функций Y и Z :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) Y = i2\pi N M (Z\rho - Z^* \rho^*), \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) Z = i2\pi N [KY\rho^* + OZ(1 + \mu R)], \quad (8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\gamma + i\Theta Y) = -\frac{ir_{21}}{\hbar} RZ^*, \quad (9)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{R - R_s}{T_1} - \frac{2ir_{21}}{\hbar} (Z\rho - Z^* \rho^*), \quad (10)$$

где

$$Y = \sum_j |A_j|^2; \quad Z = \sum_j A_j A_{j+1}^*; \quad (11)$$

$$O = \frac{\Omega(r_{11} + r_{22})}{2}; \quad \mu = \frac{r_{22} - r_{11}}{r_{22} + r_{11}}.$$

В полученных выражениях Y имеет смысл суммарной интенсивности, а Z – функции парных корреляций амплитуд компонент поля. В частном случае солитонного распространения со скоростью v уравнения (7)–(10) принимают вид уравнений в полных производных:

$$\left(1 - \frac{c}{v} \right) \frac{dY}{dt} = (c - v) \frac{dY}{dz} = i2\pi N M (Z\rho - Z^* \rho^*), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{c}{v} \right) \frac{dZ}{dt} = (c - v) \frac{dZ}{dz} \\ & = -i2\pi N [KY\rho^* + OZ(1 + \mu R)], \end{aligned} \quad (13)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho(\gamma + i\Theta Y) = -\frac{ir_{21}}{\hbar} RZ^*, \quad (14)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{R - R_s}{T_1} - \frac{2ir_{21}}{\hbar} (Z\rho - Z^* \rho^*). \quad (15)$$

3. Солитонное решение

Найдем возможные солитонные решения. Рассмотрим уравнения (12)–(15) и, ограничившись безрелаксационным случаем, получим для них первые интегралы. Для этого разделим уравнение (12) на уравнение (15):

$$\frac{dY}{dR} = \frac{\pi N M \hbar}{(c/v - 1)r_{21}}.$$

Отсюда

$$Y = \frac{\pi N M \hbar}{(c/v - 1)r_{21}} (R - R_0) = T(R - R_0), \quad (16)$$

где R_0 – постоянная интегрирования; T – положительная константа. Выбор знака T обусловлен тем, что стабильный в полубесконечной среде солитон должен распространяться со скоростью, не превышающей скорости распространения света в среде. Подставим выражение для Y в уравнение (13). Оно примет следующий вид:

$$\frac{dZ}{dt} = ia_1 (R - R_0) \rho^* - i2\pi N O Z (1 + \mu R), \quad (17)$$

где

$$a_1 = \frac{2\pi^2 N^2 K M \hbar}{r_{21} (c/v - 1)^2}. \quad (18)$$

Запишем уравнение для квадрата амплитуды Z , принимая во внимание (15):

$$\frac{d|Z|^2}{dt} = ia_1 (R - R_0) (Z^* \rho^* - Z\rho) = \frac{\hbar a_1}{2r_{21}} (R - R_0) \frac{dR}{dt}. \quad (19)$$

Отсюда получим еще один интеграл:

$$|Z|^2 = \varepsilon^2 (R^2 - 2R_0R + R_z). \quad (20)$$

Здесь $\varepsilon^2 = \hbar a_1 / 4r_{21}$; R_z – определяемая начальными условиями постоянная интегрирования.

Имеет место также закон сохранения вектора Блоха:

$$|\rho|^2 = \frac{1}{4} (R_m^2 - R^2), \quad (21)$$

где R_m – максимальное значение R .

Представим комплексные функции в виде амплитуды и фазы:

$$Z = Z_a \exp(i\varphi), \quad \rho = \rho_a \exp(i\psi). \quad (22)$$

Тогда уравнения (17), (14) примут следующий вид:

$$\frac{dZ_a}{dt} + iZ_a \frac{d\varphi}{dt} = ia_1(R - R_0)\rho_a \exp i(\varphi + \psi), \quad (23)$$

$$\frac{d\rho_a}{dt} + i\rho_a \left[\frac{d\psi}{dt} + \Theta T(R - R_0) \right] = -ia_2 R Z_a \exp i(\varphi + \psi), \quad (24)$$

где $a_2 = r_{21} / \hbar$.

Рассмотрим случай, когда производные фазовых функций равны нулю. Это можно допустить в приближении малости штарковского сдвига частоты. Выразим все амплитуды через R и подставим в любое из этих уравнений. Тогда получим уравнение для R

$$\frac{dR}{dt} = \frac{ia_1 \exp i(\varphi + \psi)}{2\varepsilon} (R^2 - 2R_0R + R_z)^{1/2} (R_m^2 - R^2)^{1/2}, \quad (25)$$

для которого существует решение в квадратурах

$$t - t_b = - \frac{2i\varepsilon \exp[-i(\varphi + \psi)]}{a_1} \times \int_{R_b}^R \frac{dR}{(R^2 - 2R_0R + R_z)^{1/2} (R_m^2 - R^2)^{1/2}}, \quad (26)$$

где R_b и t_b – начальные значения разности населенностей и времени. Поскольку время может быть только действительным, то для фазовых функций выполняются соотношения

$$\exp i(\varphi + \psi) = \pm i. \quad (27)$$

С учетом этого уравнение (26) примет следующий вид:

$$t - t_b = \pm 2 \frac{\varepsilon}{a_1} \int_{R_b}^R \frac{dR}{(R^2 - 2R_0R + R_z)^{1/2} (R_m^2 - R^2)^{1/2}}. \quad (28)$$

Для существования решения в виде светлого солитона необходимо попадание начальной точки R_b в отрезок от $-R_m$ до R_m справа от наибольшего корня $R = R_0 + (R_0^2 - R_z)^{1/2}$ квадратного трехчлена, совпадение точки (R_b, t_b) с точкой поворота (R_m, t_m) подынтегрального выражения, а также выполнение условия $R_0 + (R_0^2 - R_z)^{1/2} = -R_m$. Последнее обеспечивает то, что R достигает значения $-R_m$ на положительной и отрицательной бесконеч-

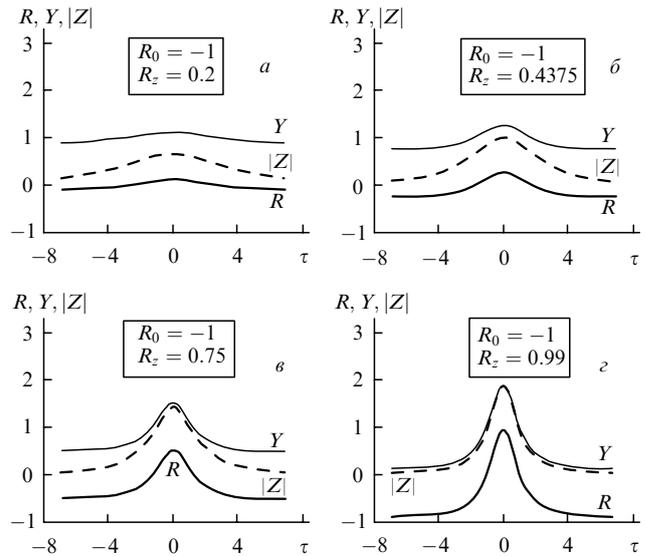


Рис.1. Зависимости безразмерных величин населенности R , суммарной интенсивности Y и функции $|Z|$ от безразмерного времени τ для солитонных решений при $R_0 = -1$ и разных R_z .

ностях времени t . При выполнении этих условий решение имеет следующий вид:

$$R = R_m \frac{R_r - (R_r + R_m) \sinh^2[\Delta\tau(R_m R_r)^{1/2}]}{(R_r + R_m) \cosh^2[\Delta\tau(R_m R_r)^{1/2}] - R_m}, \quad (29)$$

где $\Delta\tau = a_1(t - t_m) / 2\varepsilon$; $R_r = (R_0^2 - R_z)^{1/2}$. На рис.1 приведены зависимости R , Y и $|Z|$ от τ при $R_0 = -1$ и разных R_z .

Таким образом, в предельном безрелаксационном случае возможно согласованное распространение импульсов, содержащих, кроме волны накачки, одну или несколько комбинационных компонент. С помощью расчетов на основе системы безразмерных уравнений

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + c \frac{\partial}{\partial z'} \right) B_j = i[e_j \rho_{21} B_{j-1} + f_j \rho_{12} B_{j+1} + g_j (1 + \mu R) B_j], \quad (30)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -iR \sum_j B_j B_{j-1}^*, \quad (31)$$

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = -2i \left[\sum_k B_k^* B_{k-1} \rho_{21} - \text{компл. сопр.} \right] \quad (32)$$

можно провести численное исследование динамики этих солитонов.

В уравнениях (30)–(32) использованы безразмерные переменные

$$z' = \frac{2\pi\omega_0 N r_{12}(\omega_0, -\omega_{-1})}{c} z, \quad \tau = 2\pi\omega_0 N r_{12}(\omega_0, -\omega_{-1}) t,$$

$$e_j = \frac{\omega_j r_{12}(\omega_j, -\omega_{j-1})}{\omega_0 r_{12}(\omega_0, -\omega_{-1})}, \quad f_j = \frac{\omega_j r_{21}(\omega_{j+1}, -\omega_j)}{\omega_0 r_{12}(\omega_0, -\omega_{-1})},$$

$$g_j = \frac{\omega_j [r_{22}(\omega_j, -\omega_j) + r_{11}(\omega_j, -\omega_j)]}{\omega_0 r_{12}(\omega_0, -\omega_{-1})},$$

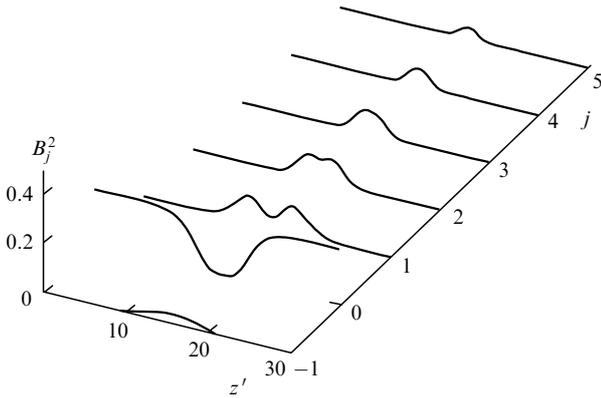


Рис.2. Распределение интенсивностей компонент с номерами $j = -1 \dots 5$ по безразмерной длине z' , соответствующее солитону, изображенному на рис.1,б.

а также $B_j = A_j / (2\pi\hbar\omega_0 N)$ – безразмерные амплитуды компонент поля.

Примем допущение, что коэффициенты r_{21}, r_{22}, r_{11} не зависят от частоты. Тогда справедливо выражение

$$K = 2M = 2\Omega r_{21}. \tag{33}$$

На рис.2 показано распределение интенсивностей частотных компонент солитона, изображенного на рис.1,б, которое получается при численном решении солитонного уравнения с граничными условиями в точке $z' = 0$, удовлетворяющими (16), (20) и имеющими следующий вид:

$$|B_{-1}|^2 + |B_0|^2 + |B_{+1}|^2 = \frac{1}{2} \tilde{\Omega} (R - R_0),$$

$$|B_{-1} B_0^* + B_0 B_{+1}^*|^2 = \left(\frac{1}{2} \tilde{\Omega} \right)^2 (R^2 - 2R_0 R + R_z),$$

где $\tilde{\Omega} = \Omega / [\omega_0 (c/v - 1)]$; $B_{-1} = B_{+1}$. Остальные $B_j = 0$. Значение R в этой точке определяется из (29):

$$R = R_m \frac{R_r - (R_r + R_m) \text{sh}^2[(R_m R_r)^{1/2} \tilde{\Omega} (\tau - \tau_m)]}{(R_r + R_m) \text{ch}^2[(R_m R_r)^{1/2} \tilde{\Omega} (\tau - \tau_m)] - R_m}.$$

В последних выражениях коэффициент $\tilde{\Omega} = \Omega / [\omega_0 (c/v - 1)]$ введен для перехода от масштабов солитонных уравнений к масштабу уравнений (30)–(32). Правая часть уравнения (30) равна нулю при $j = -2$. В силу этого в солитоне отсутствуют стоксовы компоненты с номерами выше первого.

При решении использованы следующие дополнительные параметры: $\Omega/\omega_0 = 1/2$, $v/c = 4/5$, $e_0 = f_0 = 1$, $g_0 = 3, 5$, $\mu = 0, 1$. Безразмерная длительность импульса составляет две единицы, или 14 пс, для чисто колебательного перехода в молекулярном водороде при давлении 10 бар и температуре 300 К. Интенсивность солитона в максимуме равна 0.45, или 450 ГВт/см². (Следует отметить, что время τ в уравнениях (30)–(32), в отличие от времени Δt в (29), имеет нормировку, не зависящую от скорости распространения солитонов, поэтому время τ , в котором представлены результаты численных расчетов, удовлетворяет соотношению $\tau = 2\Delta t$.)

На рис.3 демонстрируется устойчивость полученного решения. На нем представлено столкновение двух солитонов, движущихся со скоростями $v/c = 4/5$ и $1/3$. В момент времени $\tau = 48$ (рис.3,б) происходит их максимальное сближение. На рис.3,г показан разлет сохранивших форму многокомпонентных импульсов.

Спектр солитона содержит множество компонент поля. Если предположить, что пиковая интенсивность компоненты солитона квадратично зависит от ее частоты, то можно оценить максимальное число его компонент

$$N_m \approx \frac{9}{2} \frac{R - R_0}{R - R_0 - (R^2 - 2R_0 R + R_z)^{1/2}},$$

максимальную ширину спектра

$$\delta\omega_m \approx \frac{\Omega N_m}{2} \approx \frac{9\Omega}{4} \frac{R - R_0}{R - R_0 - (R^2 - 2R_0 R + R_z)^{1/2}}$$

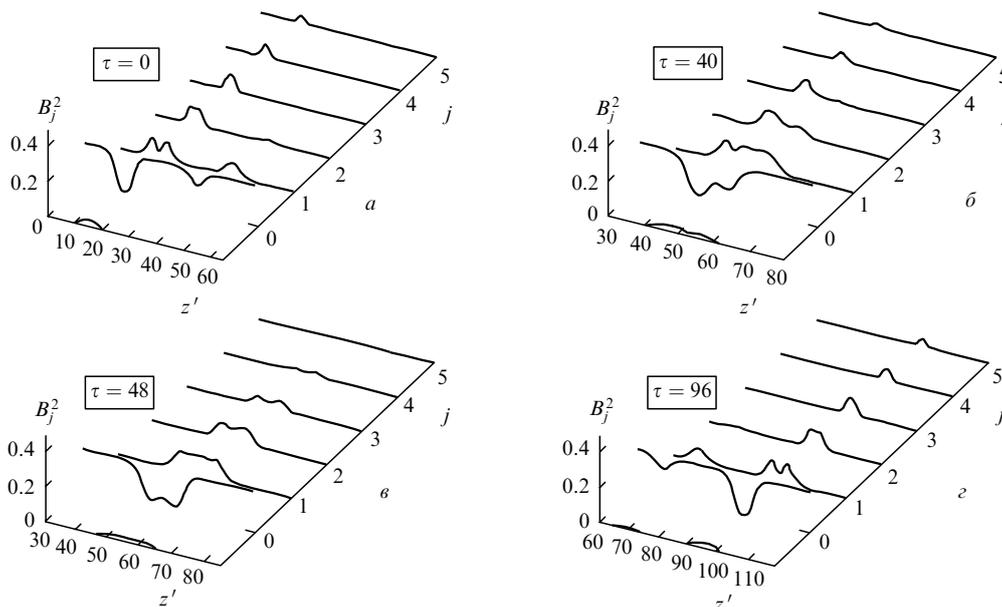


Рис.3. Распространение и столкновение двух многокомпонентных солитонов, движущихся со скоростями $v/c = 4/5$ (в начальный момент солитон находится слева) и $v/c = 1/3$, рассчитанные для моментов времени $\tau = 0, 40, 48$ и 96 .

и длительность импульса, состоящего из всех компонент оптического поля,

$$\tau = \frac{2\pi}{\delta\omega_m} \approx 3 \frac{R - R_0 - (R^2 - 2R_0R + R_z)^{1/2}}{\Omega(R - R_0)}.$$

4. Заключение

Анализ системы уравнений, описывающей четырехфотонное комбинационно-параметрическое взаимодействие, показал существование солитонных состояний поля, распространяющихся со скоростью, меньшей скорости света в среде. С помощью численного решения рассматриваемых уравнений получены солитоны, содержащие множество стоксовых и антистоксовых компонент, число которых определяется начальными условиями солитонного решения. Интенсивность компоненты солитона изменяется с изменением ее номера незначительно. Согласованность фаз и амплитуд компонент открывает возможность получения импульсов с длительностью, меньшей периода оптического поля и сравнимой с ним.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-17138) и программы «Университеты России» (грант УР.01.03.001).

1. Лосев Л.Л., Луценко А.П. *Квантовая электроника*, **20**, 1054

- (1993).
2. Losev L.L., Lutsenko A.P. *Opt. Commun.*, **132**, 489 (1996).
 3. Морозов В.Б., Тункин В.Г., Оленин А.Н. *ЖЭТФ*, **115** (2), 479 (1999).
 4. Беспалов В.Г., Крылов В.Н., Михайлов В.Н., Парфенов В.А., Стаселько Д.И. *Оптика и спектроскопия*, **70** (2), 332 (1991).
 5. Драбович К.Н., Ключаков И.Л., Орлов Р.Ю., Скидан И.Б., Телегин Л.С. *Ученые записки Казанского государственного педагогического института*, вып.125, 93 (1973).
 6. Андреев А.В., Валеев А.А., Морозов В.Б., Оленин А.Н., Тункин В.Г. *Квантовая электроника*, **32** (1), 54 (2002).
 7. Wilke V., Schmidt W. *Appl. Phys.*, **18**, 177 (1979).
 8. Jarvis G.B., Mathew S., Kenny J.E. *Appl. Opt.*, **33**, 4938 (1994).
 9. Baldwin K.G.H., Harangos J.P., Burgess D.D. *Opt. Commun.*, **52**, 351 (1985).
 10. Грасюк А.З., Зубарев И.Г., Котов А.В., Михайлов С.И., Смирнов В.Г. *Квантовая электроника*, **3**, 1062 (1976).
 11. Sokolov A.V., Walker D.R., Yavuz D.D., Yin G.Y., Harris S.E. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 562 (2000).
 12. Wittmann M., Nazarkin A., Korn.G. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 5508 (2000).
 13. Андреев А.В. *ЖЭТФ*, **113** (2), 747 (1998).
 14. Kaplan.A.E. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 1243 (1994).
 15. Fork R.L., Brito Cruz C.H., Becker P.C., Shank C.V. *Opt. Lett.*, **12**, 483 (1987).
 16. Platonenko V.T., Strelkov V.V. *J. Opt. Soc. Am. B*, **16**, 435 (1999).
 17. Платоненко В.Т., Стрелков В.В. *Квантовая электроника*, **24**, 799 (1997).
 18. Шен И.Р. *Принципы нелинейной оптики* (М.: Наука,1989).