

Влияние селективного насыщающегося поглотителя на динамику двухмодового лазера

Н.Д.Миловский, П.А.Хандохин, Я.И.Ханин

Рассматривается динамика двухмодового лазера при наличии селективного насыщающегося поглотителя, взаимодействующего только с одной из мод. Специфика системы обусловлена наличием противофазного релаксационного колебания, которое становится незатухающим, когда достаточно плотный насыщающийся поглотитель взаимодействует с более слабой из мод. Если поглотитель взаимодействует с более сильной модой, возбуждается синфазное релаксационное колебание и ситуация становится подобной той, которая реализуется в одномодовом лазере. Показано, что в случае малоинерционного поглотителя возможно адиабатическое исключение разности населенностей его рабочих уровней. Эта процедура заметно упрощает модель, не сказываясь на ее динамических характеристиках.

Ключевые слова: лазер, насыщающийся поглотитель, релаксационные колебания, бифуркация Хопфа.

1. Введение

Эффективное использование внутрирезонаторной лазерной спектроскопии (ВРЛС) основано на высокой чувствительности спектра генерации многомодового лазера к присутствию в его резонаторе элементов, вносящих селективные потери [1–3]. В работах [3–8] рассмотрены многие вопросы ВРЛС, однако возможность насыщения исследуемой спектральной линии излучением лазера во внимание не принималась. Между тем насыщение наблюдалось экспериментально [9, 10] и оно, в принципе, может существенно влиять на динамику лазера и на результаты измерений.

Поскольку в методе ВРЛС предполагается, что исследуемая среда является компонентом автоколебательной системы, теоретическая задача сводится к построению и исследованию динамической модели многомодового лазера с узкополосным насыщающимся поглотителем. В отличие от детально изученного одномодового случая [11–13], принципиально важной является спектральная селективность поглощающей среды, в том смысле, что ширина ненасыщенной линии много уже ширины спектра генерации лазера. В этой связи можно упомянуть работу [14], в которой затронуты некоторые вопросы стационарной теории многомодового лазера с селективным насыщающимся поглотителем. Рассматриваемая проблема представляет фундаментальный интерес для нелинейной динамики, поскольку мы имеем дело с уникальной колебательной системой – многомодовым лазером. Многомодовые лазеры с инерционной активной средой обладают двумя наборами собственных колебаний: набором колебаний оптических мод и набором релаксационных колебаний разных типов. Селективное воздействие дает возможность разобраться во взаимосвязи и взаимодействии того и другого.

Н.Д.Миловский, П.А.Хандохин, Я.И.Ханин. Институт прикладной физики РАН, Россия, 603950 Н.Новгород, ул. Ульянова, 46; e-mail: khando@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 9 января 2003 г.

В настоящей работе исследуются условия устойчивости стационарного режима генерации и иные особенности низкочастотной динамики многомодового лазера с селективным насыщающимся поглотителем в рамках простейшего балансного подхода.

2. Модель

Рассмотрим модель лазера, являющуюся обобщением системы балансных уравнений Танга–Статца–Де Марса [12, 15] на случай, когда в резонаторе многомодового лазера присутствуют две среды. Запишем эту систему, следуя [12, 13, 16], в безразмерном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dI_k}{d\tau} &= GI_k \left(g_k^a \int n^a \psi_k^2 dz - g_k^b \int n^b \psi_k^2 dz - 1 \right), \\ \frac{\partial n^a}{\partial \tau} &= A^a - n^a \left(1 + \sum_k \psi_k^2 g_k^a I_k \right), \\ \frac{\partial n^b}{\partial \tau} &= \delta A^b - n^b \left(\delta + \rho \sum_k \psi_k^2 g_k^b I_k \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\tau = t\gamma_{\parallel}^a$; $I_k(\tau)$ – интенсивность k -й моды; $n^{a,b}(\tau, z)$ – плотность инверсии в активной среде и поглотителе; $A^{a,b}$ – параметры накачки; g_k^a и g_k^b – функции формы линии усиления и поглощения соответственно; $\psi_k(z) = \sqrt{2} \times \sin(\pi q_k z/L)$ – собственная функция резонатора; $\pi q_k/L$ – волновое число; q_k – большое целое число полуволин k -й моды, укладываемых на длине резонатора L ; $k = 1, 2, \dots, K$; K – полное число генерируемых мод;

$$\delta = \frac{\gamma_{\parallel}^b}{\gamma_{\parallel}^a}; \quad \rho = \frac{B^b \psi^2(\mathbf{r}^b)}{B^a \psi^2(\mathbf{r}^a)}; \quad G = \frac{2\kappa}{\gamma_{\parallel}^a}; \quad (2)$$

$B^{a,b}$ – коэффициенты Эйнштейна для индуцированного перехода; κ , $\gamma_{\parallel}^{a,b}$ – скорость релаксации поля и разности населенностей соответственно.

2.1. Одномодовый твердотельный лазер с насыщающимся поглотителем

При рассмотрении одномодовой генерации, как правило, ограничиваются пространственно однородными компонентами разности населенностей активной и поглощающих сред

$$n_0^{a,b} = \frac{1}{L} \int n^{a,b} dz, \tag{3}$$

а пространственными решетками

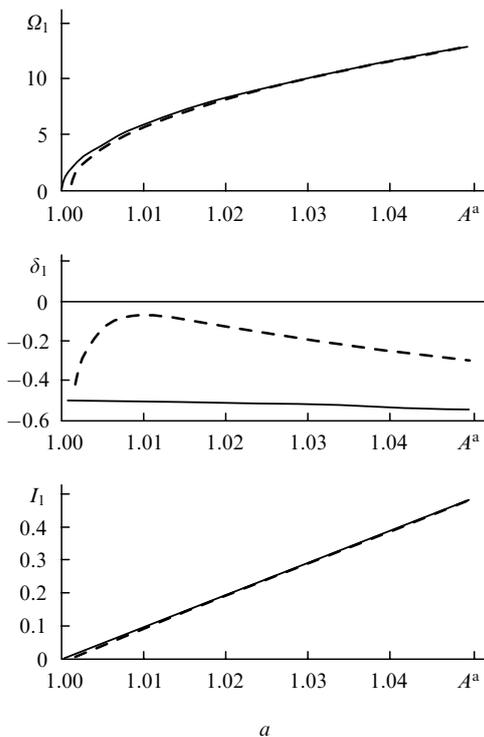
$$n_k^{a,b} = -\frac{1}{L} \int n^{a,b} \cos\left(\frac{2\pi q_k z}{L}\right) dz, \tag{4}$$

обусловленными пространственным выжиганием инверсии населенностей, пренебрегают. В этом случае система интегродифференциальных уравнений (1) переходит в систему дифференциальных уравнений в обыкновенных производных:

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{d\tau} &= GI_1(n_0^a - 1 - n_0^b), \\ \frac{dn_0^a}{d\tau} &= A^a - n_0^a(1 + I_1), \\ \frac{dn_0^b}{d\tau} &= \delta A^b - n_0^b(\delta + \rho I_1). \end{aligned} \tag{5}$$

При превышении параметром накачки порогового значения $A_{th} = 1 + A^b$ система (5) обладает стационарным состоянием:

$$\bar{I}_1 \approx A^a - 1, \quad \bar{n}_0^a = \frac{A^a}{1 + \bar{I}_1}, \quad \bar{n}_0^b = \frac{\delta A^b}{\delta + \bar{I}_1}, \tag{6}$$



полученным в предположении малости параметра $\tilde{\delta} = \delta/\rho \ll 1$. Линеаризация системы уравнений (5) вблизи стационарного состояния (6) приводит к характеристическому уравнению третьего порядка. Оно имеет два комплексно-сопряженных корня $\lambda_{1,2} = \delta_1 \pm i\Omega_1$ и один отрицательный действительный корень λ_3 . Мнимая часть комплексно-сопряженных корней дает хорошо известную в динамике твердотельных лазеров частоту релаксационных колебаний Ω_1 с декрементом затухания, равным действительной части δ_1 .

На рис.1 показано поведение частоты Ω_1 , декремента δ_1 и интенсивности I_1 моды при изменении параметра накачки A^a для трех значений параметра A^b насыщающегося поглотителя. Видно, что в отсутствие поглотителя или при малой его плотности режим генерации устойчив ($\delta_1 < 0$) во всей области изменения параметра накачки. Увеличение плотности поглотителя приводит к тому, что кривая $\delta_1(A^a)$ переходит в положительную полуплоскость в двух точках A_{HB1}^a и $A_{HB1}^{a'}$, соответствующих первой и второй бифуркациям Хопфа на частоте релаксационного колебания Ω_1 . В области $A_{HB1}^a < A^a < A_{BB1}^a$ устанавливается импульсный режим работы лазера. На рис.1,б приведены зависимости максимальной и минимальной интенсивностей моды от параметра A^a в области неустойчивой генерации. Точка A_{BB1}^a характеризуется тем, что при проходе через нее с увеличением параметра накачки происходит переход от импульсного режима генерации к стационарному (5). При обратном изменении параметра накачки (кривая из точек на рис.1,б) стационарный режим становится неустойчивым в точке $A_{HB1}^{a'}$. Таким образом, в области $A_{HB1}^{a'} < A^a < A_{BB1}^a$ наблюдается бистабильный режим работы лазера. На рис.2 приведены все данные о возможных режимах одномодового лазера в виде бифуркационной диаграммы на плоскости параметров A^b, A^a . Слева от границы $A_{th1}^b =$

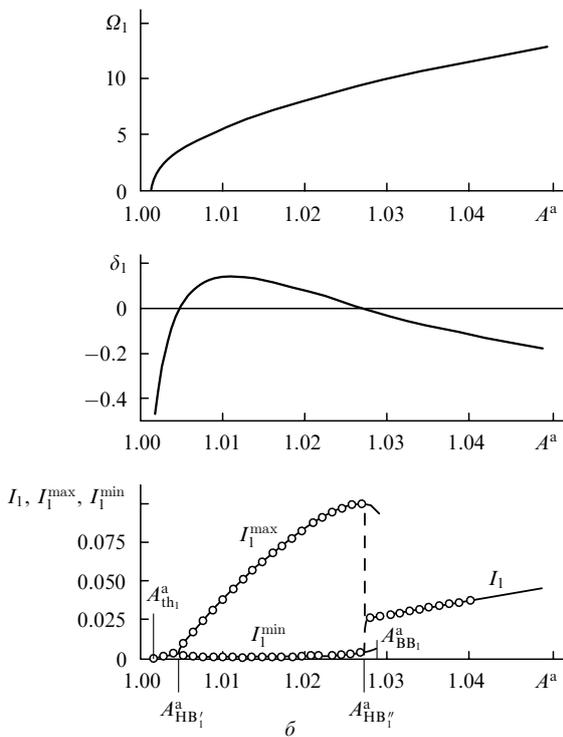


Рис.1. Зависимости частоты Ω_1 и декремента δ_1 релаксационного колебания, а также интенсивности моды от параметра накачки A^a для параметра насыщающегося поглотителя $A^b = 0$ (сплошные линии), 0.001 (штриховые линии) (а) и 0.002 (б) при $G = 3500, \rho = 10000, \delta = 100$. На рис.1,б кривые из точек и штриховая кривая соответствуют обратному изменению параметра накачки.

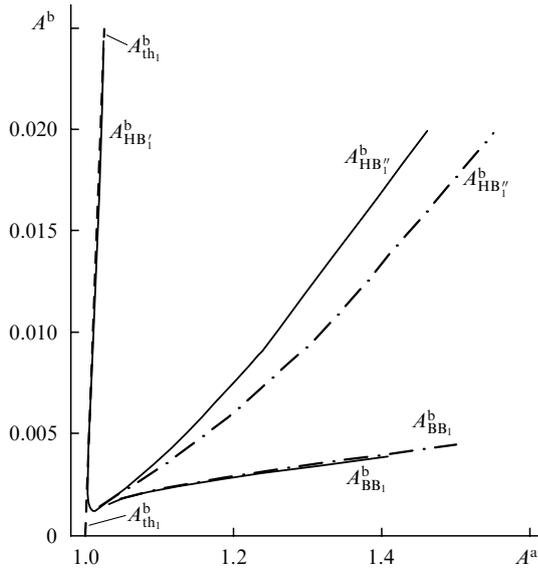


Рис.2. Бифуркационная диаграмма одномодового лазера на плоскости параметров A^b, A^a при $G = 3500, \rho = 10000, \delta = 100$.

$A^a - 1$ генерация отсутствует. Эта граница практически совпадает с границей первой бифуркации Хопфа:

$$A_{HB1}^a = A^a - 1 - \frac{\tilde{\delta}}{G(A^a - 1)}. \quad (7)$$

Вторая бифуркация Хопфа имеет место при

$$A_{HB1}^{a'} = \frac{A^a (\tilde{\delta} + A^a - 1)^2}{G\tilde{\delta}(A^a - 1)}. \quad (8)$$

Это выражение переходит в выражение (7.36) работы [14] в пределе малых значений параметра $\tilde{\delta}$. В отличие от границ A_{HB1}^b и $A_{HB1}^{b'}$, найденных аналитически, бифуркационная граница A_{BB1}^b , при пересечении которой бистабильный режим сменяется единственным устойчивым стационарным режимом, получена путем численного интегрирования системы (5).

Штрих-пунктирными линиями на рис.2 показано изменение положения границ $A_{HB1}^{b'}$ и A_{BB1}^b при учете эффекта выжигания инверсии населенностей (т.е. при учете пространственных решеток $n_k^{a,b}$ (4)). Как и следовало ожидать, учет решеток инверсии населенностей в одномодовом случае, не меняя качественного поведения границ неустойчивости, вносит некоторые количественные изменения. Совершенно по иному обстоит дело при описании многомодовой (по продольному индексу) генерации: главной ее причиной в лазерах со спектрально-однородными активными средами является эффект пространственного выжигания инверсии населенностей, и его необходимо учитывать.

2.2. Двухмодовый твердотельный лазер с селективным насыщающимся поглотителем

Двухмодовый лазер описывается системой уравнений

$$\frac{dI_1}{d\tau} = GI_1 [n_0^a + n_1^a - 1 - (n_0^b + n_1^b)],$$

$$\frac{dI_2}{d\tau} = GI_2 [g^a (n_0^a + n_2^a) - 1],$$

$$\frac{dn_0^a}{d\tau} = A^a - n_0^a (1 + I_1 + g^a I_2) - n_1^a I_1 - g^a n_2^a I_2,$$

$$\frac{dn_1^a}{d\tau} = -n_1^a (1 + I_1 + g^a I_2) - \frac{1}{2} I_1 n_0^a, \quad (9)$$

$$\frac{dn_2^a}{d\tau} = -n_2^a (1 + I_1 + g^a I_2) - \frac{1}{2} g^a I_2 n_0^a,$$

$$\frac{dn_0^b}{d\tau} = \delta A^b - n_0^b (\delta + \rho I_1) - \rho n_1^b I_1,$$

$$\frac{dn_1^b}{d\tau} = -n_1^b (\delta + \rho I_1) - \frac{1}{2} \rho n_0^b I_1$$

в случае, когда насыщающийся поглотитель находится в первой моде, и системой уравнений

$$\frac{dI_1}{d\tau} = GI_1 (n_0^a + n_1^a - 1),$$

$$\frac{dI_2}{d\tau} = GI_2 [g^a (n_0^a + n_2^a) - 1 - (n_0^b + n_2^b)],$$

$$\frac{dn_0^a}{d\tau} = A^a - n_0^a (1 + I_1 + g^a I_2) - n_1^a I_1 - g^a n_2^a I_2,$$

$$\frac{dn_1^a}{d\tau} = -n_1^a (1 + I_1 + g^a I_2) - \frac{1}{2} I_1 n_0^a, \quad (10)$$

$$\frac{dn_2^a}{d\tau} = -n_2^a (1 + I_1 + g^a I_2) - \frac{1}{2} g^a I_2 n_0^a,$$

$$\frac{dn_0^b}{d\tau} = \delta A^b - n_0^b (\delta + \rho I_2) - \rho n_2^b I_2,$$

$$\frac{dn_2^b}{d\tau} = -n_2^b (\delta + \rho I_2) - \frac{1}{2} \rho n_0^b I_2$$

в случае, когда насыщающийся поглотитель взаимодействует со второй модой. Здесь и далее $g_1^a = 1, g_2^a = g^a$. В отличие от одномодового случая здесь учтен эффект пространственного выжигания инверсии населенностей, описываемый пространственными решетками $n_k^{a,b}$ (4). Параметр $g^a \leq 1$ позволяет управлять порогом генерации второй моды, которая в общем случае предполагается более слабой (эта мода вступает в генерацию, как правило, второй). Мода с номером 1 находится в центре линии усиления и в отсутствие поглотителя имеет порог $A_{th1}^a = 1$; она первой вступает в генерацию, что дает основание называть ее сильной. Надо, правда, сказать, что это не является ее универсальным свойством. При взаимодействии с селективным поглотителем (см. (9)) увеличение его плотности может сделать эту моду слабой.

Линейный анализ систем уравнений (9), (10) приводит к характеристическому уравнению, корнями которого будут уже две пары комплексно-сопряженных корней. Дополнительная пара корней описывает низкочастотные релаксационные колебания, отвечающие за противофазную динамику мод лазера. На рис.3 показано поведение частот Ω_1, Ω_2 и декрементов δ_1, δ_2 релаксацион-

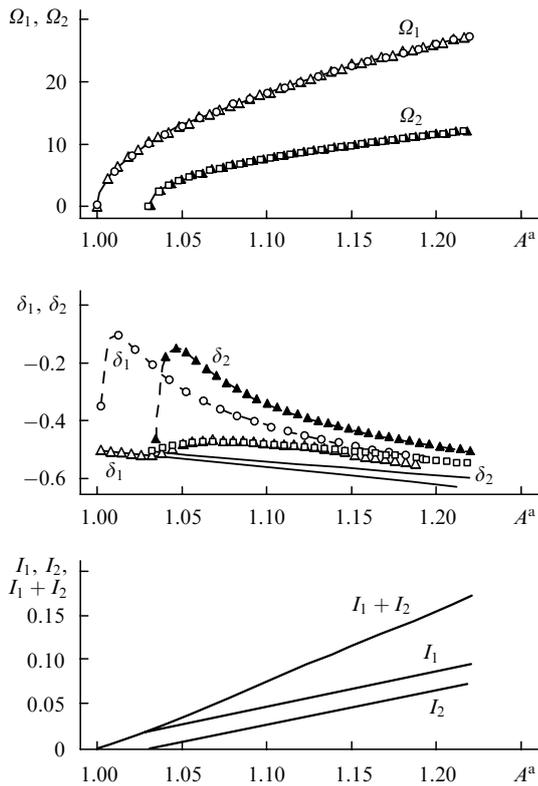


Рис.3. Зависимости частот Ω_1 (Δ, \circ), Ω_2 (\blacktriangle, \square) и декрементов δ_1 (Δ, \circ), δ_2 (\blacktriangle, \square) релаксационных колебаний, а также интенсивностей продольных мод I_1, I_2 от параметра накачки A^a при $G = 3500, \rho = 10000, \delta = 100, g^a = 0.99$. Для частот и декрементов сплошные кривые соответствуют отсутствию насыщающегося поглотителя ($A^b = 0$), а кривые из точек – наличию поглотителя в сильной (см. (9)) (\circ, \square) и слабой (см. (10)) (Δ, \blacktriangle) модах ($A^b = 0.001$).

ных колебаний, а также интенсивностей продольных мод при изменении параметра накачки A^a . Этот рисунок четко демонстрирует, что главное различие, обусловленное тем, с какой модой взаимодействует поглотитель, заключается только в поведении декрементов релаксационных колебаний δ_1 и δ_2 . Это отражено и на бифуркационных диаграммах.

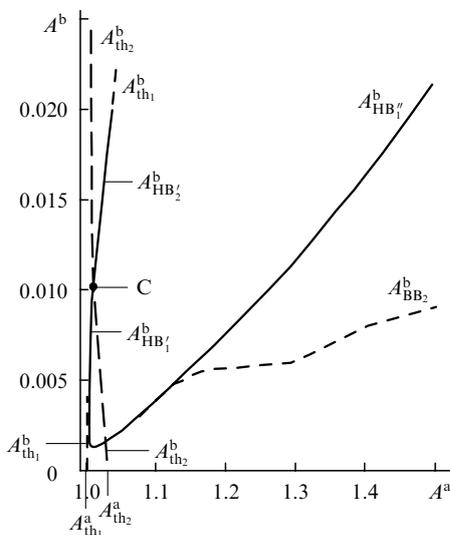


Рис.4. Бифуркационная диаграмма двухмодового лазера с нелинейным поглотителем в сильной моде на плоскости параметров A^b, A^a при $G = 3500, \rho = 10000, \delta = 100, g^a = 0.99$.

Если насыщающийся поглотитель взаимодействует с сильной модой (см. (9)), то качественно бифуркационная диаграмма (рис.4) выглядит так же, как и в одномодовом случае (см. рис.2), по крайней мере при малых плотностях поглотителя. Поглотитель можно считать умеренно плотным до тех пор, пока сильная мода остается доминирующей. Специфика двухмодовой генерации в этом случае состоит только в появлении границы, разделяющей области одномодовой и двухмодовой генерации. Однако, как и в одномодовом случае, неустойчивость возникает благодаря бифуркации Хопфа на частоте синфазного релаксационного колебания Ω_1 .

Внутри области неустойчивости вблизи границ интенсивности мод колеблются практически синфазно (рис.5). В центре этой области колебания выглядят более сложными, демонстрируя признаки хаотической динамики (рис.5,б). В точке С (см. рис.4) пороги генерации обеих мод выравниваются и дальнейшее увеличение плотности поглотителя приводит к тому, что первоначально слабая мода становится сильной. В данном случае благодаря бифуркации Хопфа неустойчивость возникает уже на частоте противофазного релаксационного колебания Ω_2 . Все сказанное относится только к первой границе бифуркации Хопфа. Вторая граница остается связанной с синфазным релаксационным колебанием как при малых, так и при больших значениях A^b .

Наиболее ярко специфика двухмодовой генерации проявляется при взаимодействии селективного поглотителя со слабой модой (см. (10)). В данном случае наличие второго (низкочастотного) релаксационного колебания на частоте Ω_2 приводит при увеличении плотности поглотителя к бифуркации Хопфа уже на этой частоте. На

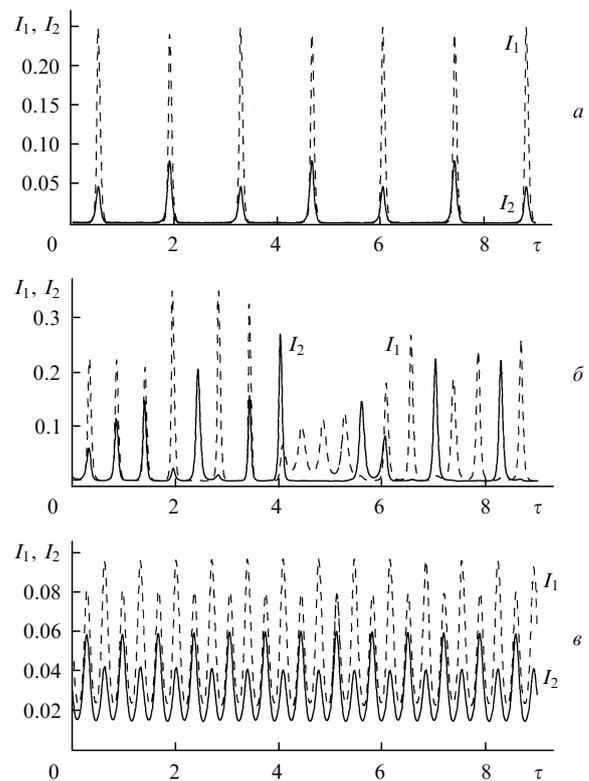


Рис.5. Временные зависимости интенсивностей мод в разных точках области неустойчивости стационарного режима при взаимодействии поглотителя с сильной модой при $G = 3500, A^b = 0.004, \rho = 10000, \delta = 100, g^a = 0.99, A^a = 1.046$ (а), 1.11 (б) и 1.16 (е).

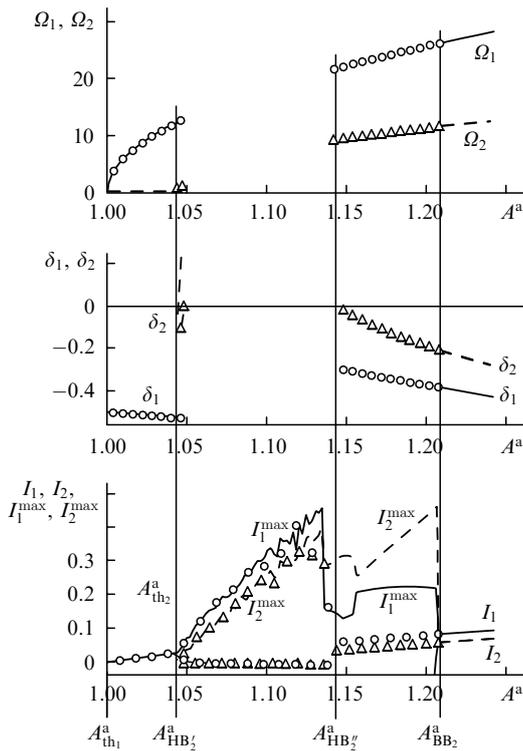


Рис.6. Зависимости частот Ω_1, Ω_2 и декрементов δ_1, δ_2 релаксационных колебаний, а также интенсивностей мод (сплошные кривые – сильная мода, штриховые – слабая) от параметра накачки A^a при взаимодействии поглотителя со слабой модой при $G = 3500, \rho = 10000, \delta = 100, g^a = 0.99$. Точки – поведение системы при обратном изменении параметра накачки.

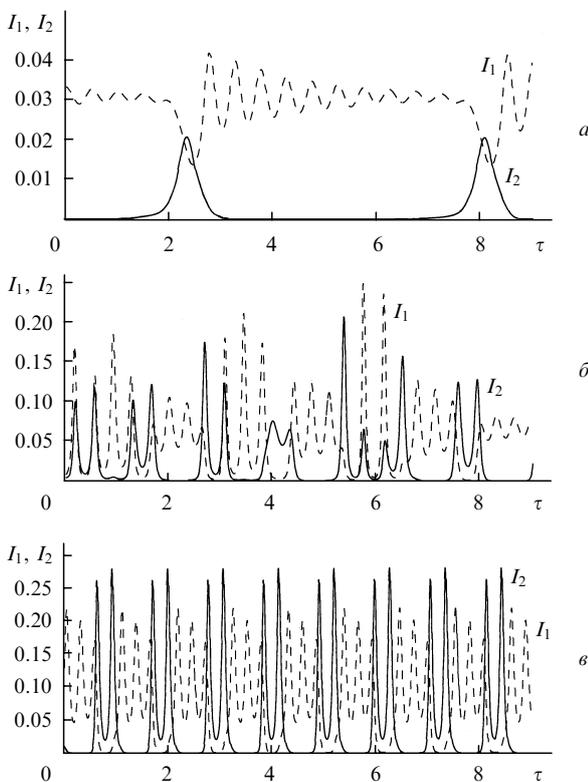


Рис.7. Временные зависимости интенсивностей мод в разных точках области неустойчивости стационарного режима при взаимодействии поглотителя со слабой модой при $G = 3500, A^b = 0.004, \rho = 10000, \delta = 100, g^a = 0.99, A^a = 1.026$ (а), 1.072 (б) и 1.102 (в).

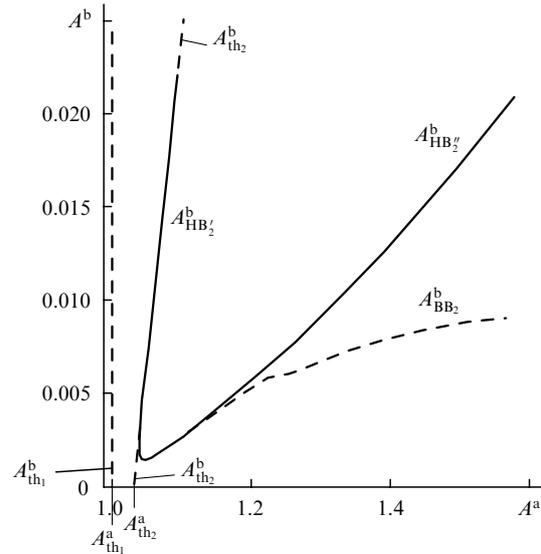


Рис.8. Бифуркационная диаграмма двухмодового лазера с нелинейным поглотителем в слабой моде на плоскости параметров A^b, A^a при $G = 3500, \rho = 10000, \delta = 100, g^a = 0.99$.

рис.6 показано поведение релаксационных колебаний и интенсивностей мод в зависимости от параметра накачки при взаимодействии поглотителя со слабой модой. Этот рисунок аналогичен рис.1,б. При обратном изменении параметра накачки вблизи границ внутри области неустойчивости интенсивности мод совершают практически противофазные колебания (рис.7). В центре этой области реализуется хаотическая динамика (рис.7,б). Бифуркационная диаграмма представлена на рис.8. Ее структура совпадает со структурой диаграммы в случае одномодовой генерации, за исключением того, что все граничные кривые $A_{HB_2^b}^b, A_{HB_2^c}^b$ и $A_{BB_2}^b$ смещены в область больших параметров накачки и примыкают к пороговой границе двухмодовой генерации $A_{th_2}^b$.

При расчетах желательно задать значения параметров ρ и δ , которые отвечают реальным экспериментам. К сожалению, такие данные пока отсутствуют. В работе [8] описан эксперимент, в котором наблюдалось насыщение линий D -дублета натрия в резонаторе струйного лазера на красителе. Однако значения указанных параметров в этой статье не приводятся, поэтому остается обратиться к более или менее реалистичным значениям параметров ρ и δ . Рассмотрим линию поглощения атомарного газа в резонаторе многомодового твердотельного лазера. В свете сказанного настоящая статья имеет характер предсказания, а не интерпретации уже полученных экспериментальных результатов.

Обратимся к формулам (2) и, считая, что $\psi^2(\mathbf{r}^b) = \psi^2(\mathbf{r}^a)$, перепишем выражение для ρ , учитывая, что $B^{a,b} \propto |\mathbf{d}^{a,b}|^2$, в следующем виде:

$$\rho = \frac{|\mathbf{d}^b|^2}{|\mathbf{d}^a|^2},$$

где $\mathbf{d}^{a,b}$ – дипольные моменты перехода. Оценка ρ не составляет труда. Если рабочий переход в активной среде считать запрещенным, а переход в поглотителе – разрешенным, то максимальное различие дипольных моментов достигает четырех порядков [13] и, следовательно, $\rho = |\mathbf{d}^b/\mathbf{d}^a|^2 \leq 10^8$. Что касается параметра δ , то при $\gamma_{||}^a \sim 10^3 \text{ c}^{-1}, \gamma_{||}^b \sim 10^7 \text{ c}^{-1}$ получаем $\delta \sim 10^4$.

Расчеты показывают, что наиболее интересная динамика лазера как раз и реализуется в области параметров $\rho \gg \delta \gg 1$. В этом случае можно адиабатически исключить из уравнений (1) переменную n^b , относящуюся к поглотителю. Положив $\partial n^b / \partial \tau = 0$, получаем $n^b = \delta A^b \times (\delta + \rho \psi_p^2 I_p)^{-1}$. Это приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dI_k}{d\tau} &= GI_k \left(g_k^a \int n^a \psi_k^2 dz - \tilde{\delta} A^b \delta_{kp} \int \frac{\psi_k^2 dz}{\tilde{\delta} + \psi_p^2 I_p} - 1 \right), \\ \frac{\partial n^a}{\partial \tau} &= A^a - n^a \left(1 + \sum_j \psi_j^2 g_j^a I_j \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где δ_{kp} – символ Кронекера. Теперь ясно, что ключевую роль в динамике лазера с насыщающимся поглотителем играет параметр $\tilde{\delta} \ll 1$. Применительно к двухмодовой генерации с селективным поглотителем во второй моде система уравнений (11) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{dI_1}{d\tau} &= GI_1 (n_0^a + n_1^a - 1), \\ \frac{dI_2}{d\tau} &= GI_2 \left\{ g^a (n_0^a + n_2^a) - 1 - 2\tilde{\delta} A^b \frac{1}{I_2} \left[1 - \left(\frac{\tilde{\delta}}{1 + I_2} \right)^{1/2} \right] \right\}, \\ \frac{dn_0^a}{d\tau} &= A^a - n_0^a (1 + I_1 + g^a I_2) - n_1^a I_1 - g^a n_2^a I_2, \\ \frac{dn_1^a}{d\tau} &= -n_1^a (1 + I_1 + g^a I_2) - \frac{1}{2} I_1 n_0^a, \\ \frac{dn_2^a}{d\tau} &= -n_2^a (1 + I_1 + g^a I_2) - \frac{1}{2} g^a I_2 n_0^a. \end{aligned} \quad (12)$$

Как и следовало ожидать, исследование более простой системы уравнений (12) приводит к уже описанным выше результатам, полученным на основе уравнений (10).

3. Заключение

Таким образом, с использованием балансных уравнений исследована динамика двухмодового твердотельного лазера с селективным насыщающимся поглотителем. Показано, что увеличение плотности поглотителя приводит к неустойчивости через бифуркацию Хопфа.

При взаимодействии селективного поглотителя с сильной модой бифуркация Хопфа происходит на более высокочастотном релаксационном колебании, что выражается в возбуждении синфазных колебаний интенсивностей мод вблизи границ неустойчивости. Переход к взаимодействию со слабой модой вызывает смену типа релаксационного колебания, приводящего к бифуркации. В этом случае возбуждаются более низкочастотные (противофазные) колебания, и такой режим опять достигается через бифуркацию Хопфа. Обнаружена область бистабильности, в которой в зависимости от предыстории могут реализоваться как стационарная двухмодовая генерация, так и хаотические пульсации.

Система уравнений (12) легко обобщается на многомодовый случай. При этом ее размерность остается такой же, как и в модели Танга – Статца – Де Марса, что позволяет использовать весь накопленный опыт работы с многомодовыми системами для анализа влияния селективного насыщающегося поглотителя на динамику многомодового лазера.

Настоящая работа выполнена при поддержке фондов INTAS (грант 99-00794) и РФФИ (гранты № 00-15-96732, 00-02-16224 и 02-02-17046).

1. Пахомычева Л.А., Свириденков Э.А., Сучков А.Ф., Титова Л.В., Чурилов С.С. *Письма в ЖЭТФ*, **12**, 601 (1970).
2. Беликова Т.П., Свириденков Э.А., Сучков А.Ф., Титова Л.В., Чурилов С.С. *ЖЭТФ*, **62**, 2060 (1972).
3. Hansch T.W., Schawlow A.L., Toschek P.E. *IEEE J. Quantum Electron.*, **10**, 802 (1972).
4. Степанов Б.И., Рубинов А.Н., Белоконов М.В. *ЖПС*, **24**, 423 (1976).
5. Горчарук И.М., Котомцева Л.А., Самсон А.М. *ЖПС*, **28**, 238 (1978).
6. Баев В.М., Беликова Т.П., Свириденков Э.А., Сучков А.Ф. *ЖЭТФ*, **74**, 43 (1978).
7. Brunner W., Paul H. *Opt. Quantum Electron.*, **10**, 139 (1978).
8. Мироненко В.П., Пак И. *Квантовая электроника*, **5**, 2476 (1978).
9. Новиков В.П., Новиков М.А., Полушкин И.Н., Ханин Я.И., Щербачев А.И. *ЖТФ*, **50**, 1537 (1980).
10. Беспалов В.И., Якубович Е.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **8**, 909 (1965).
11. Каган А.Г., Ханин Я.И. *Квантовая электроника*, **10**, 149 (1983).
12. Khanin Ya. *Principles of Laser Dynamics* (Amsterdam, North-Holland: Elsevier, 1995).
13. Ханин Я.И. *Основы динамики лазеров* (М.: Физматлит, 1999).
14. Лившиц Б.Л., Цикунов В.Н. *Укр. физ. ж.*, **10**, 1267 (1965).
15. Tang C.L., Statz H., De Mars G. *J. Appl. Phys.*, **34**, 2289 (1963).
16. Меллер А.С., Хандохин П.А., Ханин Я.И. *Квантовая электроника*, **13**, 2278 (1986).