PACS 42.65.Ky; 42.70.Qs

Когерентная длина и уточненные уравнения для ГВГ в нелинейных кристаллах с регулярной доменной структурой

В.Г.Дмитриев, Ю.В.Юрьев

Получено выражение для когерентной длины при больших волновых расстройках и найден критерий применимости понятия «обобщенная расстройка» для ГВГ в нелинейных кристаллах с регулярной доменной структурой. Получены уточненные уравнения, описывающие процесс ГВГ для квазисинхронного взаимодействия в кристаллах с регулярной доменной структурой.

Ключевые слова: *генерация второй гармоники, регулярная доменная структура, квазисинхронизм.*

1. Введение

Для ГВГ традиционно используются однородные нелинейные кристаллы, в которых выполнено условие фазового синхронизма [1]; взаимодействие в этих кристаллах можно назвать синхронным. В последнее время широкое применение находят также периодически-нелинейные среды, в большинстве своем являющиеся кристаллами с регулярной доменной структурой (РДС) [2]. В общем случае РДС-кристаллы представляют собой периодическую структуру, состоящую из последовательно расположенных сегнетоэлектрических доменов. Для эффективной ГВГ в таких кристаллах в случае большой волновой расстройки Δk длина доменов должна быть равна нечетному числу когерентных длин $l_{\rm c}$. При переходе от одного домена к другому направление спонтанной поляризации и знак квадратичной нелинейной восприимчивости меняются на противоположные, что эквивалентно изменению обобщенной фазы взаимодействующих волн на π. Такие взаимодействия в РДС-кристаллах называются квазисинхронными. В качестве РДС-кристаллов можно использовать нелинейные среды, не обладающие обычным фазовым синхронизмом, в частности оптически изотропные материалы. Кроме того, появляется возможность использовать нелинейные взаимодействия, например ee – e-типа, которые невозможны в однородных кристаллах. При этом в РДС-кристаллах эффективные нелинейности, соответствующие новым типам взаимодействий, могут во много раз превышать эффективные нелинейности для однородного кристалла.

В [2] было получено выражение для амплитуды второй гармоники в РДС-кристаллах в приближении заданного поля основного излучения, а в [3] – его обобщение для нелинейного режима преобразования в случае, когда РДС-кристалл состоит из доменов, длина которых в точности равна когерентной длине $l_{\rm c}$ (случай точного квазисинхронизма). В нашей работе [4] были получены уравнения для ГВГ в РДС-кристаллах и показано, что при соответствующей замене переменных эти уравнения в точности совпадают с уравнениями для ГВГ в обычных однородных кристаллах. В настоящей работе выведены более точные (учитывающие следующий порядок малости) уравнения для ГВГ в РДС-кристаллах. Кроме того, приведено уточненное выражение для когерентной длины $l_{\rm c}$ при больших волновых расстройках Δk и определены границы применимости понятия «обобщенная расстройка» для ГВГ в РДС-кристаллах.

2. Основные уравнения и предположения

Процесс ГВГ в обычном однородном нелинейном кристалле описывается системой уравнений [1]

$$\frac{{\rm d}\upsilon}{{\rm d}\xi} = (1-\upsilon^2)\sin\Psi, \tag{1}$$

$$\frac{{\rm d}\Psi}{{\rm d}\xi} = 2\varDelta_1 + \frac{(1-3\upsilon^2)}{\upsilon}\cos\Psi, \tag{2}$$

где $\xi = \sigma_1 U z$ – приведенная длина в направлении распространения волн z; $U^2 = a_1^2\sigma_2/\sigma_1 + a_2^2$ – интеграл системы уравнений (1), (2); σ_1 и σ_2 – коэффициенты нелинейной связи; a_1 и a_2 – амплитуды волн на основной частоте и второй гармонике; $\Psi = 2\varphi_1 - \varphi_2 + \Delta k z$ – обобщенная фаза; $\Delta k = k_2 - 2k_1$; φ_1, φ_2 и k_1, k_2 – фазы и волновые числа волн на основной частоте и второй гармонике соответственно; $\varDelta_1 = \Delta k/(2\sigma_1 U)$ – приведенная волновая расстройка; $\upsilon = a_2/U$ – приведенная амплитуда второй гармоники.

Кристалл с идеальной периодической структурой состоит из доменов, длина которых равна нечетному числу когерентных длин. При переходе от одного домена к другому коэффициенты нелинейной связи σ_1 и σ_2 меняют знак, что, как видно из уравнений (1), (2), эквивалентно увеличению обобщенной фазы Ψ на π. Это позволяет нам при дальнейших расчетах считать, что для всех доменов $\sigma_{1,2} > 0$, а при переходе от одного домена к другому обобщенная фаза получает приращение, равное

В.Г.Дмитриев. ФГУП «НИИ "Полюс" им. М.Ф.Стельмаха», Россия, 117342 Москва, ул. Введенского, 3
Ю.В.Юрьев. Московский физико-технический институт (государственный университет), Россия, 141700 Долгопрудный, Московская обл., Институтский пер., 9

Поступила в редакцию 21 апреля 2003 г., после доработки – 17 июля 2003 г.

π. Период РДС $\Lambda = 2ml_c$, где m – порядок квазисинхронизма. Для квазисинхронизма нечетного порядка длины всех доменов одинаковы и равны ml_c, а для квазисинхронизма четного порядка период РДС складывается из доменов разной длины (при этом каждый из доменов равен нечетному числу l_c).

Для РДС-кристаллов реализуется случай большой волновой расстройки, поэтому далее будем предполагать, что $\varDelta_1 \gg 1$. Предположим также, что потери на поглощение отсутствуют.

3. Когерентная длина

Найдем когерентную длину в однородном нелинейном кристалле в случае, когда $\varDelta_1 \gg 1$. Для этого запишем выражение для амплитуды второй гармоники в зависимости от длины взаимодействия [5]:

$$v^2 = y_1 + (y_2 - y_1)\mathrm{sn}^2[(y_3 - y_1)^{1/2}(\xi + \xi_0), f)], \tag{3}$$

где

$$f = \left(\frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}\right)^{1/2}; \tag{4}$$

y_1, y_2 и y_3 – корни кубического уравнения

$$y(1-y)^2 - (C - \varDelta_1 y)^2 = 0, \tag{5}$$

причем $y_1 \leqslant y_2 \leqslant y_3$, а постоянная

$$C = v(1 - v^2)\cos\Psi + \varDelta_1 v^2$$
$$= v(0)[1 - v^2(0)]\cos\Psi(0) + \varDelta_1 v^2(0) \tag{6}$$

– интеграл системы уравнений (1), (2). В формуле (3) постоянная ξ_0 определяется из граничных условий. Из (3) следует, что безразмерная когерентная длина

$$\xi_c = \frac{K(f)}{(y_3 - y_1)^{1/2}}, \tag{7}$$

где

$$K(f) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{[(1 - t^2)(1 - f^2t^2)]^{1/2}} \tag{8}$$

– полный эллиптический интеграл 1-го рода [6].

Пусть начальная амплитуда $v(0) = v_0$ соответствует начальной обобщенной фазе $\Psi(0) = 0$, тогда $C = v_0(1 - v_0^2) + \varDelta_1 v_0^2$. В этом случае корни уравнения (5) имеют вид [3]:

$$y_1 = v_0^2, \tag{9}$$

$$y_{2,3} = 1 + \frac{\varDelta_1^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \pm |\varDelta_1 - v_0|$$
$$\times\left(1 - \frac{3}{4}v_0^2 + \frac{1}{4}\varDelta_1^2 + \frac{1}{2}\varDelta_1 v_0\right)^{1/2}, \tag{10}$$

где знак минус соответствует корню y_2, а знак плюс – корню y_3. В пределе $\varDelta_1 \gg 1$ из (10) получим следующие приближенные значения для y_2 и y_3:

$$y_2 = v_0^2 + \frac{2v_0(1 - v_0^2)}{\varDelta_1}, \tag{11}$$

$$y_3 = \varDelta_1^2 + 2 - 2v_0^2. \tag{12}$$

При $\varDelta_1 \gg 1$ приближенное выражение для y_2, приведенное в работе [3], совпадает с (11), а приближенное выражение для y_3 из [3] имеет вид $y_3 = \varDelta_1^2$. Для правильного определения когерентной длины мы учли в (12) следующие члены разложения. Подставляя (9), (11) и (12) в (4), находим

$$f^2 = \frac{2v_0(1 - v_0^2)}{\varDelta_1^3}. \tag{13}$$

Для $f^2 \ll 1$, используя приближенное выражение для $K(f)$ из [6], получаем

$$K(f) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{f^2}{4}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \frac{v_0(1 - v_0^2)}{2\varDelta_1^3}\right]. \tag{14}$$

Далее имеем

$$(y_3 - y_1)^{-1/2} = \frac{1}{\varDelta_1}\left(1 + \frac{3v_0^2 - 2}{2\varDelta_1^2}\right). \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (7), находим приближенное выражение для безразмерной когерентной длины при $\varDelta_1 \gg 1$:

$$\xi_c = \frac{\pi}{2\varDelta_1}\left(1 + \frac{3v_0^2 - 2}{2\varDelta_1^2}\right). \tag{16}$$

Выражение для размерной когерентной длины (16) имеет вид

$$l_c = \frac{\pi}{\Delta k}\left(1 + \frac{3v_0^2 - 2}{2\varDelta_1^2}\right). \tag{17}$$

4. Обобщенная расстройка и длина доменов РДС

Рассмотрим РДС-кристалл, у которого период структуры Λ незначительно отличается от величины $2ml_c$, причем

$$\frac{|\Lambda - 2ml_c|}{\Lambda} \ll 1. \tag{18}$$

Введем обобщенную расстройку [2]

$$\Delta\tilde{k} = \Delta k - K_m, \tag{19}$$

где $K_m = 2\pi m/\Lambda$ – волновое число обратной решетки РДС; m – порядок квазисинхронизма, взятый со знаком плюс, если $\Delta k > 0$, и со знаком минус, если $\Delta k < 0$. Не теряя общности, будем считать, что $\Delta k, K_m > 0$. Условие (18) означает, что $\Delta k \approx K_m \gg |\Delta\tilde{k}|$. Рассмотрим случай нечетного m, тогда все домены имеют одинаковую длину l_d, выражение для которой с учетом (19) имеет вид

$$l_d = \frac{\Lambda}{2} = \frac{\pi m}{K_m} = \frac{\pi m}{\Delta k - \Delta\tilde{k}} = \frac{\pi m}{\Delta k}\left(1 - \frac{\Delta\tilde{k}}{\Delta k}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\pi m}{\Delta k}\left[1 + \frac{\Delta\tilde{k}}{\Delta k} + \left(\frac{\Delta\tilde{k}}{\Delta k}\right)^2\right]. \tag{20}$$

Запишем (20) в безразмерном виде:

$$\xi_{\rm d} = \frac{\pi m}{2\varDelta_1}\left[1 + \frac{\beta}{\varDelta_1} + \left(\frac{\beta}{\varDelta_1}\right)^2\right], \tag{21}$$

где $\beta = \varDelta_1\Delta\tilde{k}/\Delta k$ – приведенная обобщенная расстройка. Однако нетрудно видеть, что формулы (20) и (21), записанные с такой точностью, не имеют смысла. Действительно, полагая $\Delta\tilde{k} = 0$ (случай точного квазисинхронизма), из (20) получаем, что $l_{\rm d} = \pi m/\Delta k$. С другой стороны, с той точностью, с которой записаны формулы (20) и (21), длина доменов при $\Delta\tilde{k} = 0$ должна быть переменной и равной $ml_{\rm c}$, где когерентная длина $l_{\rm c}$ определяется выражением (17). Причина данного противоречия заключается в том, что обобщенная расстройка (19) была введена для анализа процесса ГВГ в РДС-кристаллах в приближении заданного поля основного излучения. Действительно, полагая в (19) $\Delta\tilde{k} = 0$, имеем $l_{\rm d} = \pi m/\Delta k$, т. е. длина домена равна m когерентным длинам в том же приближении. В общем случае нелинейного преобразования во вторую гармонику нужно либо иначе ввести обобщенную расстройку $\Delta\tilde{k}$ (выражение для которой переходит в пределе приближения заданного поля в формулу (19)), либо отбросить в (20) и (21) последние слагаемые в скобках. Идя по второму пути, получаем, что длину доменов (20) и (21) следует записывать в виде

$$l_{\rm d} = \frac{\pi m}{\Delta k}\left(1 + \frac{\Delta\tilde{k}}{\Delta k}\right) \text{ или } \xi_{\rm d} = \frac{\pi m}{2\varDelta_1}\left(1 + \frac{\beta}{\varDelta_1}\right), \tag{22}$$

т. е. в выражении для $\xi_{\rm d}$ мы должны отбросить величины $\sim 1/\varDelta_1^3$. Так как для зависимости амплитуды второй гармоники $\upsilon = \upsilon(\xi)$ масштабы по осям одного порядка, то пользоваться обобщенной расстройкой (19) можно лишь в том случае, если в выражениях для ξ и υ мы отбрасываем величины $\sim 1/\varDelta_1^3$ (на длинах порядка длины домена).

5. Вспомогательные соотношения

В работе [4] при выводе уравнений для ГВГ в РДС-кристаллах в выражениях для безразмерных амплитуды υ и длины ξ учитывались величины $\sim 1/\varDelta_1$ (на длинах порядка длины домена). Для получения более точных уравнений, описывающих процесс ГВГ в РДС-кристаллах, в выражениях для υ и ξ будем теперь учитывать величины $\sim 1/\varDelta_1^2$. В этом случае еще можно пользоваться понятием обобщенной расстройки (19). Для начала найдем ряд вспомогательных соотношений. Будем предполагать, что $\varDelta_1 \gg 1$ и $\upsilon \gg 1/\varDelta_1$.

Пусть при $\xi = 0$ амплитуда второй гармоники $\upsilon(0) = \upsilon_0$, а обобщенная фаза $\varPsi(0) = 0$. Из (3) получим выражение $\upsilon = \upsilon(\xi)$ с учетом величин $\sim 1/\varDelta_1^2$. Для этого нужно уточнить выражение (11) для y_2 и определить следующий член разложения $\sim 1/\varDelta_1^2$. Из (10) находим

$$y_2 = \upsilon_0^2 + \frac{2\upsilon_0(1-\upsilon_0^2)}{\varDelta_1} + \frac{3\upsilon_0^4 - 4\upsilon_0^2 + 1}{\varDelta_1^2}. \tag{23}$$

Учитывая (13), а также то, что при $f^2 \ll 1$ справедливо приближенное асимптотическое разложение [7]

$$\mathrm{sn}(x,f) = \sin x - \frac{f^2}{4}(x - \sin x\cos x)\cos x, \tag{24}$$

получаем, что если пренебречь величинами $\sim 1/\varDelta_1^3$, то эллиптический синус в (3) можно заменить обычным синусом. Принимая это во внимание и подставляя (9), (12) и (23) в (3), имеем

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{1-\upsilon_0^2}{\varDelta_1}\sin^2(\varDelta_1\xi) + \frac{2\upsilon_0^4 - 2\upsilon_0^2 + (1-\upsilon_0^2)^2\cos^2(\varDelta_1\xi)}{2\upsilon_0\varDelta_1^2}\sin^2(\varDelta_1\xi). \tag{25}$$

Выражение (25) справедливо для $\xi \sim 1/\varDelta_1$, т. е. для длин порядка длины домена.

Найдем зависимость обобщенной фазы $\varPsi = \varPsi(\xi)$ для длин $\xi \sim 1/\varDelta_1$. Подставляя (25) в интеграл (6) системы уравнений (1), (2) и разлагая $\varPsi$ по степеням $1/\varDelta_1$, получаем

$$\varPsi = 2\varDelta_1\xi + \frac{1-3\upsilon_0^2}{2\upsilon_0\varDelta_1}\sin(2\varDelta_1\xi). \tag{26}$$

В этой формуле отброшены величины $\sim 1/\varDelta_1^2$, т. к. если в выражении для ξ учитывать их, то первое слагаемое в (26) будет содержать величины $\sim 1/\varDelta_1$.

Определим теперь зависимость амплитуды второй гармоники от обобщенной фазы при произвольных начальных условиях. Пусть начальная амплитуда второй гармоники υ_1 соответствует обобщенной фазе $\varPsi_1$. Для длин $\xi \sim 1/\varDelta_1$ найдем выражение для амплитуды υ_2, соответствующее обобщенной фазе $\varPsi_2$. Разлагая υ_2 по степеням $1/\varDelta_1$ и подставляя это разложение в (6), получаем следующее выражение:

$$\upsilon_2 = \upsilon_1 + \frac{(1-\upsilon_1^2)(\cos\varPsi_1 - \cos\varPsi_2)}{2\varDelta_1} + (1-\upsilon_1^2) \times \frac{(\cos\varPsi_1 - \cos\varPsi_2)(5\upsilon_1^2\cos\varPsi_2 + \upsilon_1^2\cos\varPsi_1 - \cos\varPsi_1 - \cos\varPsi_2)}{8\upsilon_1\varDelta_1^2}. \tag{27}$$

6. Уточненные уравнения для ГВГ в РДС-кристаллах

Пусть в начале $(i+1)$-го домена амплитуда второй гармоники равна υ_i, причем $\upsilon_i \gg 1/\varDelta_i$, а обобщенная фаза равна $\varPsi_i$. Рассмотрим квазисинхронизм нечетного порядка m. При переходе через границы доменов обобщенная фаза испытывает скачок на π, поэтому в начале $(i+2)$-го домена $\varPsi_{i+1} = \varPsi_i + (m+1)\pi + \delta\varPsi_i$. Отбрасывая величину $(m+1)\pi$, имеем $\varPsi_{i+1} = \varPsi_i + \delta\varPsi_i$, т. е. под $\varPsi_i$ будем понимать значение обобщенной фазы с точностью до целого числа, умноженного на 2π. Получим систему дифференциальных уравнений для непрерывных функций υ и $\varPsi$, значения которых совпадают со значениями дискретных функций υ_i и $\varPsi_i$ в соответствующих точках. Для этого надо в точках υ_i и $\varPsi_i$ найти производные $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}\xi$ и $\mathrm{d}\varPsi/\mathrm{d}\xi$.

Для квазисинхронизма нечетного порядка все домены имеют одинаковую длину $\xi_{\rm d}$, определяемую формулой (22). Если в выражении для разности амплитуд $\upsilon_{i+1} - \upsilon_i$ учитывать величины $\sim 1/\varDelta_1^2$ и использовать для производной $\mathrm{d}\upsilon/\mathrm{d}\xi$ в точке υ_i приближенную формулу [8]

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\upsilon_{i+1}-\upsilon_i}{\xi_{\mathrm{d}}}, \tag{28}$$

то правая часть в (28) будет содержать величины $\sim 1/\varDelta_1$, но погрешность самой формулы (28) будет $\sim\xi_{\mathrm{d}}$, т. е. тоже $\sim 1/\varDelta_1$. Таким образом, вместо формулы (28) нужно применять более точные формулы численного дифференцирования, простейшая из которых имеет вид [8]

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\upsilon_{i+1}-\upsilon_{i-1}}{2\xi_{\mathrm{d}}}. \tag{29}$$

Погрешность формулы (29) составляет $\sim\xi_{\mathrm{d}}^2$, т. е. $\sim 1/\varDelta_1^2$.

Как было отмечено выше, на длинах $\xi\sim 1/\varDelta_1$ учет в выражениях для υ и ξ величин $\sim 1/\varDelta_1^2$ соответствует тому, что для разности обобщенных фаз $\delta\varPsi_i=\varPsi_{i+1}-\varPsi_i$ учитываются величины $\sim 1/\varDelta_1$. Поэтому для производной $\mathrm{d}\Psi/\mathrm{d}\xi$ в точке $\varPsi_i$ можно использовать приближенную формулу, аналогичную формуле (28), т. е.

$$\frac{\mathrm{d}\varPsi}{\mathrm{d}\xi}=\frac{\varPsi_{i+1}-\varPsi_i}{\xi_{\mathrm{d}}}. \tag{30}$$

Действительно, правая часть формулы (30) является величиной порядка единицы, а погрешность формулы (30) составляет $\sim\xi_{\mathrm{d}}$, т. е. $\sim 1/\varDelta_1$.

Используя формулу (26) и учитывая (22), нетрудно получить следующее выражение для разности обобщенных фаз:

$$\delta\varPsi_i=\varPsi_{i+1}-\varPsi_i=\frac{m\pi\beta}{\varDelta_1}-\frac{1-3\upsilon_i^2}{\varDelta_1\upsilon_i}\sin\varPsi_i. \tag{31}$$

Полагая в (27), что $\upsilon_1=\upsilon_i$, $\varPsi_1=\varPsi_i$ и $\upsilon_2=\upsilon_{i+1}$, $\varPsi_2=\varPsi_i+m\pi+\delta\varPsi_i$, находим выражение для υ_{i+1} с учетом величин $\sim 1/\varDelta_1^2$:

$$\upsilon_{i+1}=\upsilon_i+\frac{(1-\upsilon_i^2)\cos\varPsi_i}{\varDelta_1}-\frac{(1-\upsilon_i^2)\sin\varPsi_i}{2\varDelta_1}\delta\varPsi_i$$
$$-\frac{(1-\upsilon_i^2)\upsilon_i\cos^2\varPsi_i}{\varDelta_1^2}. \tag{32}$$

В (32) разность $\delta\varPsi_i$ определяется выражением (31) и является величиной $\sim 1/\varDelta_1$. Полагая в (27), что $\upsilon_1=\upsilon_i$, $\varPsi_1=\varPsi_{i-1}+m\pi+\delta\varPsi_{i-1}$ и $\upsilon_2=\upsilon_{i-1}$, $\varPsi_2=\varPsi_{i-1}$, имеем

$$\upsilon_{i-1}=\upsilon_i-\frac{(1-\upsilon_i^2)\cos\varPsi_i}{\varDelta_1}-\frac{(1-\upsilon_i^2)\sin\varPsi_i}{2\varDelta_1}\delta\varPsi_{i-1}$$
$$-\frac{(1-\upsilon_i^2)\upsilon_i\cos^2\varPsi_i}{\varDelta_1^2}. \tag{33}$$

Беря разность выражений (32), (33) и принимая во внимание, что согласно (31) разность $\delta\varPsi_i-\delta\varPsi_{i-1}=0$ (с учетом величин $\sim 1/\varDelta_1$), получаем

$$\upsilon_{i+1}-\upsilon_{i-1}=\frac{2(1-\upsilon_i^2)\cos\varPsi_i}{\varDelta_1}. \tag{34}$$

Выражение (34) записано с учетом величин $\sim 1/\varDelta_1^2$.

Подставляя в (29) и (30) соотношения (22), (31) и (34), находим

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2}{m\pi}(1-\upsilon^2)\cos\varPsi\left(1-\frac{\beta}{\varDelta_1}\right), \tag{35}$$

$$\frac{\mathrm{d}\varPsi}{\mathrm{d}\xi}=\frac{2}{m\pi}\left(m\pi\beta-\frac{1-3\upsilon^2}{\upsilon}\sin\varPsi\right). \tag{36}$$

Введя так же, как и в [4], новые переменные

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\varPsi,\quad \zeta=\frac{2}{m\pi}\xi,\quad \tilde{\beta}=-\beta, \tag{37}$$

перепишем (35) и (36) в виде

$$\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}\zeta}=(1-\upsilon^2)\left(1+\frac{\tilde{\beta}}{\varDelta_1}\right)\sin\theta, \tag{38}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\zeta}=m\pi\tilde{\beta}+\frac{1-3\upsilon^2}{\upsilon}\cos\theta. \tag{39}$$

Система уравнений (38), (39) была получена для квазисинхронизма нечетного порядка. Можно показать, что эта система справедлива и для квазисинхронизма четного порядка (при этом нужно рассматривать только два соседних домена, образующих период структуры $\varLambda$).

7. Обсуждение и выводы

Система уравнений (38), (39) является более точной по сравнению с полученной ранее в [4] и отличается от нее сомножителем $1+\tilde{\beta}/\varDelta_1$ в правой части (38). Без учета этого сомножителя процесс ГВГ в РДС-кристаллах происходил бы так же, как и в однородных нелинейных кристаллах, а для его описания необходимо было бы провести следующую замену переменных [4]:

$$\xi\to\frac{2}{m\pi}\xi,\quad \varDelta_1\to-\frac{m\pi}{2}\beta. \tag{40}$$

Начальные условия для системы уравнений (38), (39) имеют такой же вид, как и для системы в [4]:

$$\upsilon(0)=\upsilon_0,\quad \theta(0)=\frac{\pi}{2}-\varPsi_0, \tag{41}$$

где $\varPsi_0$ – экстраполированное значение функции $\varPsi$ в точке $\xi=0$. В частности, в отсутствие второй гармоники на входе РДС-кристалла [4]

$$\upsilon(0)=0,\quad \theta(0)=\frac{\pi}{2}. \tag{42}$$

Система уравнений в [4] была получена при учете в выражениях для амплитуды и обобщенной фазы величин $\sim 1/\varDelta_1$ (на длинах порядка длины домена). Уточненная система уравнений (38), (39) найдена с учетом в выражении для амплитуды величин $\sim 1/\varDelta_1^2$, а в выражении для фазы – величин $\sim 1/\varDelta_1$ (выше было отмечено, что на длинах $\xi\sim 1/\varDelta_1$ учет для амплитуды величин $\sim 1/\varDelta_1^2$ соответствует учету для обобщенной фазы величин $\sim 1/\varDelta_1$). Интересно отметить, что при выводе в [4] уравнения для обобщенной фазы, мы проинтегрировали уравнение (2) в пределах одного домена, при этом можно было считать амплитуду второй гармоники постоянной на всем домене. Теперь мы получили то же самое уравнение (39) с использованием соотношения (6), причем в выражении для амплитуды необходимо было учитывать величины $\sim 1/\varDelta_1^2$.

В случае точного квазисинхронизма $\tilde{\beta} = 0$ и система уравнений (38), (39) совпадает с системой, приведенной в [4], поэтому при нулевых начальных условиях амплитуда второй гармоники будет определяться соотношением [4]

$$\upsilon = \tanh\left(\frac{2}{m\pi}\xi\right). \tag{43}$$

Если на длинах порядка длины домена в выражениях для ξ и υ учитывать величины $\sim 1/\varDelta_1^2$, то в случае точного квазисинхронизма к зависимости (43) можно прийти проще. Пусть при нулевой обобщенной фазе амплитуда второй гармоники в начале $(i+1)$-го домена равна υ_i, тогда, извлекая корень из соотношения (23) и заменяя υ_0 на υ_i, имеем

$$\upsilon_{i+1} = \upsilon_i + \frac{1-\upsilon_i^2}{\varDelta_1} - \frac{\upsilon_i(1-\upsilon_i^2)}{\varDelta_1^2}. \tag{44}$$

Выражение для υ_{i-1} получается из (44), если в нем заменить $\varDelta_1$ на $-\varDelta_1$:

$$\upsilon_{i-1} = \upsilon_i - \frac{1-\upsilon_i^2}{\varDelta_1} - \frac{\upsilon_i(1-\upsilon_i^2)}{\varDelta_1^2}. \tag{45}$$

Взяв разность выражений (44), (45) и подставив ее вместе с длиной домена (22) при $\beta = 0$ в (29), находим уравнение для амплитуды второй гармоники в случае точного квазисинхронизма:

$$\frac{d\upsilon}{d\xi} = \frac{2}{m\pi}(1-\upsilon^2), \tag{46}$$

из которого при нулевых начальных условиях опять получаем зависимость (43).

Итак, в случае точного квазисинхронизма зависимость амплитуды второй гармоники от ξ будет отличаться от зависимости (43), если на длинах порядка длины домена в выражениях для безразмерных длины ξ и амплитуды второй гармоники υ учитывать величины $\sim 1/\varDelta_1^3$, а в выражении для обобщенной фазы $\varPsi$ – величины $\sim 1/\varDelta_1^2$. Однако, как указывалось выше, при учете в выражениях для ξ и υ величин $\sim 1/\varDelta_1^3$ нельзя пользоваться обобщенной расстройкой (19), введенной для анализа процесса ГВГ в РДС-кристаллах в приближении заданного поля основного излучения.

Таким образом, в настоящей работе получено выражение для когерентной длины при больших волновых расстройках и показано, что пользоваться обобщенной расстройкой (19) можно лишь в том случае, если на длинах порядка длины домена в выражениях для безразмерных длины и амплитуды второй гармоники пренебрегать величинами $\sim 1/\varDelta_1^3$. Выведены также более точные уравнения (38), (39), описывающие процесс ГВГ в нелинейных кристаллах с РДС.

1. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Радио и связь, 1982).
2. McMullen J.D. *J. Appl. Phys.*, **46**, 3076 (1975).
3. Rustagi K.C., Mehendale S.C., Meenakshi S. *IEEE J. Quantum Electron.*, **18**, 1029 (1982).
4. Дмитриев В.Г., Юрьев Ю.В. *Квантовая электроника,* **25**, 1033 (1998).
5. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962).
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции: формулы, графики, таблицы* (М.: Наука, 1964).
7. *Справочник по специальным функциям*. Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган (М.: Наука, 1979).
8. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов* (М.: Наука, 1986).