

# Инвариантность преобразования мод астигматическим $\pi/2$ -конвертером при смещении и наклоне входного пучка

А.А.Малютин

*Теоретически и экспериментально показано, что преобразование мод астигматическим  $\pi/2$ -конвертером инвариантно относительно смещения и наклона входного пучка. Рассмотрена возможность использования этого свойства при манипулировании микрообъектами и для одновременного получения мод Лагерра–Гаусса различных порядков с помощью одного и того же астигматического  $\pi/2$ -конвертера.*

**Ключевые слова:** астигматический  $\pi/2$ -конвертер, моды Лагерра–Гаусса, свойство инвариантности дробного преобразования Фурье.

## 1. Введение

В последнее десятилетие было показано, что использование лазерных пучков Лагерра–Гаусса (ЛГ) открывает новые возможности в самых различных областях науки и техники – от бесконтактного манипулирования микрообъектами и биологическими клетками до квантовой криптографии и экспериментов с бозе-эйнштейновским конденсатом.

Для получения пучков ЛГ применяют преимущественно дифракционные методы, которые различаются, главным образом, типом фазового элемента. Это могут быть как достаточно сложные киноформы, позволяющие концентрировать энергию исходного излучения в фиксированный порядок дифракции, соответствующий некоторому распределению ЛГ [1], так и дифракционные элементы, дающие одновременно множество различных мод ЛГ, каждая из которых располагается в своем порядке дифракции [2]. Используются также спиральные фазовые пластины [3–5], оптическая задержка которых обеспечивает угловую зависимость фазы вида  $\exp(i/\varphi)$ , как у соответствующей моды ЛГ. Наиболее часто применяют синтезированные с помощью компьютера голограммы [6, 7], представляющие собой аналог интерференционной картины, получаемой при когерентном сложении моды ЛГ с опорной волной того или иного вида.

В целом для большинства дифракционных методов характерно то, что они позволяют получить одновременно набор мод с одним и тем же угловым индексом  $l$  и различными значениями радиального индекса  $p$  ( $p \geq 0$ ) [3, 8]. При этом эффективность преобразования в лучшем случае не превышает 60%–70% [1, 9] и, кроме того, имеются существенные ограничения на мощность излучения (за исключением, быть может, спиральных фазовых пластин, технология изготовления которых в последнее время значительно улучшилась [10]). К недостат-

кам этих методов относится также то, что для достижения оптимальной эффективности преобразования необходима довольно точная настройка положения исходного пучка относительно дифракционного элемента [1, 9], что особенно важно для фазовых элементов с особой точкой (спиральной пластины и голограммы).

Альтернативой дифракционным методам получения мод ЛГ является применение астигматического  $\pi/2$ -конвертера [11], в оптической схеме которого используется набор сферических и цилиндрических линз. Исходным излучением для  $\pi/2$ -конвертера служат моды Эрмита–Гаусса (ЭГ), параметры которых (волновой фронт, радиус пучка и ориентация осей распределения поля) должны быть определенным образом согласованы с параметрами оптических элементов конвертера [11]. Было показано [12], что астигматическая оптика этого устройства осуществляет в двух взаимно ортогональных плоскостях фурье-преобразования (ФП), количество которых различается на единицу. В общем случае эти ФП могут характеризоваться дробным (в том числе иррациональным) порядком, что предоставляет достаточно широкий выбор конфигураций устройства [13, 14], отличных от предложенной в [11]. К тому же имеется возможность перестройки параметров  $\pi/2$ -конвертера при одном и том же наборе оптических компонентов [15]. К преимуществам относится также возможность получения мод ЛГ с различными значениями углового индекса  $\pm l$  с помощью одного и того же конвертера при использовании разных мод ЭГ ( $u_{0m}^{\text{HG}}$  или  $u_{n0}^{\text{HG}}$ ). Остается, однако, вопрос, который не был затронут ни в одной из упомянутых публикаций [11–15]: насколько чувствительна схема астигматического  $\pi/2$ -конвертера к смещению и наклону оси входного пучка ЭГ относительно оптической оси устройства? Этот вопрос тем более интересен в плане упомянутых выше требований к настройке дифракционных устройств, используемых для получения мод ЛГ.

## 2. Дробное фурье-преобразование пучка при наличии наклона и смещения

Рассмотрим общий случай использования в астигматическом  $\pi/2$ -конвертере дробных ФП (ДФП) порядка  $a$

А.А.Малютин. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова 38; тел. (095) 135 03 27, факс: (095) 135 20 55, e-mail: amal@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 2 июля 2004 г.

(плоскость  $xz$ ) и  $a + 1$  (плоскость  $yz$ ). Для некоторой оптической системы, осуществляющей ДФП порядка  $a$  функции  $u(x)$ , имеем интегральное представление

$$\mathcal{F}(\xi) = \mathcal{F}_\xi^a[u(x)] = \frac{\exp(i\psi/2)}{(i\lambda f \sin \psi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) \times \exp \left[ i\pi \frac{(x^2 + \psi^2) \cos \psi - 2\xi x}{\lambda f \sin \psi} \right] dx, \quad (1)$$

где  $x$  и  $\xi$  – координаты входной и выходной опорных плоскостей;  $\psi = a\pi/2$ ;  $\lambda$  – длина волны излучения;  $f$  – некий масштабный коэффициент, характеризующий оптическую систему, который связан с радиусом  $w$  используемого пучка соотношением  $f = \pi w^2/\lambda$ . Для получения обыкновенного ФП (первого порядка) подставим  $a = 1$  в (1). Далее обозначим  $\sin \psi$  через  $S$ ,  $\cos \psi$  через  $C$  и опустим несущественный для нас множитель перед интегралом (1).

Поскольку распределение поля моды ЭГ  $u_{nm}^{HG}(x, y)$  может быть представлено в виде произведения независимых функций от  $x$  и  $y$ , ограничим рассмотрение только плоскостью  $xz$ , в которой смещение и наклон пучка представим как

$$u = u(x - \delta x) \exp \left[ i \frac{2\pi x \vartheta_x}{\lambda} \right]. \quad (2)$$

После подстановки в (1) и преобразований получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) = & \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} \xi \left( C\vartheta_x - \frac{S\delta x}{f} \right) \right] \\ & \times \exp \left[ i \frac{2\pi}{\lambda} \left( CS \frac{\delta x^2 - f^2 \vartheta_x^2}{2f} + S^2 \delta x \vartheta_x \right) \right] \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} u(x - \delta x) \exp \left\{ i\pi \frac{[(x - \delta x)^2 + (\xi - \delta x C - Sf\vartheta_x)^2] C}{\lambda f S} \right. \\ & \left. - \frac{2(x - \delta x)(\xi - \delta x C - Sf\vartheta_x)}{\lambda f S} \right\} dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Анализ показывает, что выражение под интегралом (3) является ДФП смещенного распределения поля  $u = u(x - \delta x)$  в координатах на выходе оптической схемы, измененных в соответствии с матричным преобразованием

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi' \\ \vartheta_\xi' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & Sf \\ -S/f & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\delta x \\ \vartheta_x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \xi - C\delta x - Sf\vartheta_x \\ -\delta x S/f + C\vartheta_x \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{pmatrix} C & Sf \\ -S/f & C \end{pmatrix}$$

есть  $ABCD$ -матрица оптической системы в плоскости  $xz$ . При этом выходное поле распространяется под углом  $C\vartheta_x - S\delta x/f$  к оптической оси (первый экспоненциальный множитель перед интегралом) и приобретает дополнительный фазовый сдвиг, зависящий от величины смеще-

ния и угла наклона на входе (второй экспоненциальный множитель)\*.

Согласно (2)–(4) результат для плоскости  $yz$  рассматриваемого  $\pi/2$ -конвертера очевиден. Смещению и наклону входного пучка в этой плоскости на выходе будет соответствовать аналогичное изменение координат, наклон и дополнительный (не зависящий ни от координат, ни от конкретного вида поля  $u_{nm}^{HG}(x, y)$ ) сдвиг фаз. Единственное отличие от плоскости  $xz$  определяется только другим порядком ДФП, равным  $a + 1$  в плоскости  $yz$ , т. е. необходимостью замены в (3) и (4)  $S \rightarrow -S$  и  $C \rightarrow S$ .

Таким образом, дополнительный сдвиг фаз, возникающий при смещении и наклоне исходного пучка относительно оси  $\pi/2$ -конвертера, оставляет инвариантным соотношение между накопленными фазами Гуй мод  $u_{nm}^{HG}(x, y)$  в плоскостях  $xz$  и  $yz$ , которое по-прежнему определяется [13] как

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x^a \{ \mathcal{F}_y^{a+1} [u_{nm}^{HG}(x, y)] \} \\ = \exp \left( -iNa \frac{\pi}{2} - im \frac{\pi}{2} \right) u_{nm}^{HG}(x, y), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $N = m + n$  – порядок моды.

### 3. Использование свойства инвариантности астигматического $\pi/2$ -конвертера

Инвариантность преобразования мод ЭГ астигматическим  $\pi/2$ -конвертером позволяет простым образом осуществить перемещение пучков ЛГ на выходе конвертера. Достаточно изменять положение или наклон входного пучка. В отличие от этого в ряде схем оптических «пинцетов» перемещают либо захватываемый объект (кювету с микрочастицами) [17, 18], либо пучок после конвертера [19].

Заметим, что при использовании в плоскости  $xz$  одного ФП ( $a = 1$ ) имеем  $C \equiv 0$ , и смещение пучка на входе в конвертер в этой плоскости никак не проявляется. В плоскости  $yz$  при двух ФП никак не проявляются соответствующие наклоны оси пучка ( $S \equiv 0$ ). Поэтому для перемещения положения пучка ЛГ по всему операционному полю объектива, установленного на выходе конвертера, удобнее всего использовать  $\pi/2$ -конвертер с ДФП полуцелого порядка ( $a = 0.5$ ,  $\psi = \pi/4$ ). Если расстояние  $L$  от точки изменения угла входного пучка до конвертера много больше фокусного расстояния объектива  $F$ , то легко показать, что

$$dx \sim -\frac{\gamma_x L}{F}, \quad dy \sim \frac{\gamma_y L}{F}, \quad (6)$$

где  $\gamma_{x,y}$  – углы наклона пучка в соответствующих плоскостях на входе в конвертер. Тем самым получаем близкие по абсолютному значению перемещения  $dx, dy$  в фокальной плоскости объектива.

Описанная возможность управления положением пучка в плоскости фокусирующего объектива при изменении угла наклона пучка на входе в конвертер была про-

\* В работе [16] формула (15), описывающая влияние на результат ДФП умножения функции на комплексную экспоненту (в наших терминах – наклон входного пучка), приведена с ошибкой в фазовом члене перед интегралом.

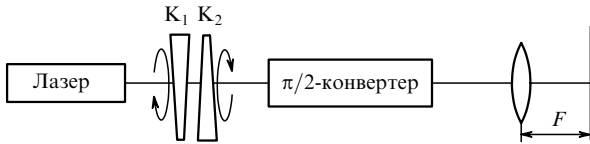


Рис.1. Схема эксперимента по управлению положением пучка моды ЛГ в фокальной плоскости линзы при изменении наклона и смещения пучка Эрмита–Гаусса на входе в  $\pi/2$ -конвертер ( $K_1$ ,  $K_2$  – оптические клинья).

демонстрирована экспериментально с помощью схемы, приведенной на рис.1. Использовались лазер, генерирующий моду  $TEM_{01}$ , перетяжка которой ( $w_0 \approx 0.7$  мм) располагалась на плоском выходном зеркале лазера, и упрощенный вариант  $\pi/2$ -конвертера [20]. Изменение координаты и угла во входной плоскости конвертера достигалось вращением двух оптических клиньев (угол  $5^\circ$ ). Зарегистрированное в фокальной плоскости линзы положение моды ЛГ при различных поворотах вокруг оптической оси конвертера (шаг  $\sim 50^\circ$ ) одного из клиньев показано на рис.2. Наличие эллиптичности в распределениях интенсивности пучков ЛГ и всей картины в целом объясняется отсутствием сопрягающей оптики между выходным зеркалом лазера и конвертером, в результате чего волновой фронт на входе в конвертер оказывается не плоским, а сферическим.

Описанное свойство инвариантности может применяться также для одновременного получения двух и более независимым образом управляемых пучков ЛГ при использовании на входе в конвертер схемы типа интерферометра Маха – Цендера. При этом может быть реализован вариант как с не интерферирующими пучками разной поляризации, так и с интерферирующими пучками. Первый вариант может оказаться полезным для независимого управления движением двух частиц (или групп), второй – в схеме накопления или сортировки частиц, когда при переналожении двух мод ЛГ  $u_{01}^{LG}$ , имеющих на разных концах диаметра поле противоположного знака, происходит деструктивная интерференция (погашение) пересекающихся зон пучков (рис.3). Очевидно, что в этом случае необходим дополнительный контроль оптических путей взаимодействующих пучков.

В подобной схеме возможно также использование нескольких лазеров, генерирующих моды ЭГ разного порядка, и, следовательно, одновременное получение

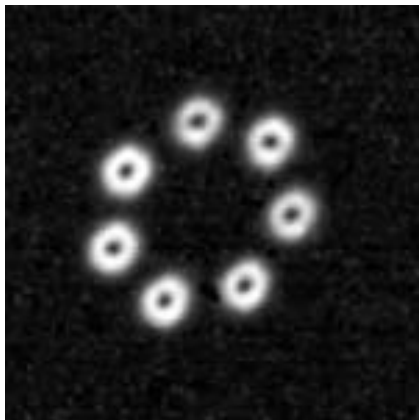


Рис.2. Зарегистрированное в фокальной плоскости линзы положение моды ЛГ при повороте одного из клиньев (рис.1) вокруг оптической оси (шаг  $\sim 50^\circ$ ).



Рис.3. Интерференция двух пучков моды ЛГ с одинаковыми поляризациями (расчет). Расстояние между пучками дано в долях  $w_0$ .

мод ЛГ с различающимися угловыми орбитальными моментами. Так, например, для манипулирования частицами с высоким показателем преломления могут одновременно использоваться моды  $TEM_{00}$ .

#### 4. Заключение

Мы показали, что преобразование мод ЭГ в моды ЛГ астигматическим  $\pi/2$ -конвертером в силу инвариантности дробного преобразования Фурье нечувствительно к наклону и смещению входного пучка. Это предоставляет дополнительную возможность управления пучком в схемах, где излучение мод ЛГ используется для оптического бесконтактного манипулирования микрообъектами. Наиболее подходят для этой цели схемы  $\pi/2$ -конвертеров на основе полупецевого (порядка  $1/2$  и  $3/2$ ) дробного ФП.

Автор выражает признательность В.Х.Багдасарову, С.В.Гарнову и Н.Н.Денисову за помощь при проведении экспериментов.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17718).

- Kennedy S.A., Szabo M.J., Teslow H., Porterfield J.Z., Abraham E.R.I. *Phys. Rev. A*, **66**, 043801 (2002).
- Khonina S.N., Kotlyar V.V., Skidanov R.V., Soifer V.A., Laakkonen P., Turunen J. *Opt. Commun.*, **175**, 301 (2000).
- Beijersbergen M.W., Coerwinkel R.P.C., Kristensen M., Woerdman J.P. *Opt. Commun.*, **112**, 321 (1994).
- Turnbull G.A., Robertson D.A., Smith G.M., Allen L., Padgett M.J. *Opt. Commun.*, **127**, 183 (1996).
- Curtis J., Grier D.G. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 133901 (2003).
- Баженов В.Ю., Васнецов М.В., Соскин М.С. *Письма в ЖЭТФ*, **52**, 1037 (1990).
- Heckenberg N.R., McDuff R., Smith C.P., Rubinsztein-Dunlop H., Wegener M.J. *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S951-S962 (1992).
- Clifford M.A., Arlt J., Courtial J., Dholakia K. *Opt. Commun.*, **156**, 300 (1998).
- Vaziri A., Weihs G., Zeilinger A. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **4**, S47 (2002).
- Oemrawsingh S.S.R., van Houwelingen J.A.W., Eliel E.R., Woerdman J.P., Versteegen E.J.K., Kloosterboer J.G., 't Hooft G.W. *Appl. Opt.*, **43**, 688 (2004).
- Beijersbergen M.W., Allen L., van der Veen H.E.L.O., Woerdman J.P. *Opt. Commun.*, **96**, 123 (1993).
- Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **33**, 235 (2003).
- Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **34**, 165 (2004).
- Malyutin A.A. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **4900**, 908 (2002).
- Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **34**, 172 (2004).
- Sahin A., Ozaktas H.M., Mendlovic D. *Appl. Opt.*, **37**, 2130 (1998).
- O'Neil A.T., Courtial J. *Opt. Commun.*, **193**, 45 (2001).
- Gahagan K.T., Swartzlander G.A. *Opt. Lett.*, **21**, 827 (1996).
- Simpson N.B., Dholakia K., Allen L., Pagett M.J. *Opt. Lett.*, **22**, 52 (1997).
- Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **33**, 1015 (2003).