

Дробные преобразования Фурье комплексного порядка в оптических схемах с гауссовыми диафрагмами

А.А.Малютин

Рассмотрено несколько оптических схем для осуществления дробного преобразования Фурье комплексного порядка. Показано, что подобные схемы, включающие в себя только гауссовы диафрагмы или их комбинацию с линзами, имеют в качестве собственных пучков моды Эрмита–Гаусса с поперечными индексами $m, n \leq 1$ и моды Лагерра–Гаусса с $p = 0, l = 1$. Волновой фронт собственных пучков, как правило, сферический.

Ключевые слова: гауссова диафрагма, дробное преобразование Фурье комплексного порядка, собственные пучки, моды Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса.

1. Введение

Традиционные схемы оптического фурье-преобразования (ФП), как было показано в [1], могут быть легко трансформированы для осуществления дробного ФП (ДФП). При этом, как для целочисленного (простого) ФП, так и для ДФП оптическая схема описывается $ABCD$ -матрицей вида

$$M = \begin{pmatrix} AB \\ CD \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & F^* \sin \psi \\ -\sin \psi / F^* & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где угол ψ дает величину фазы Гуи, накопленной при прохождении собственного пучка по системе, и определяет порядок осуществляемой операции $a = 2\psi/\pi$ (для простого ФП $\psi = \pi/2$ и $a = 1$); $F^* = \pi w_0^2/\lambda$ – рэлеевская длина собственного пучка; w_0 – радиус его перетяжки. Простейшими собственными пучками ДФП действительного порядка являются моды Эрмита–Гаусса (ЭГ) u_{nm}^{HG} [2].

Ничто не противоречит подстановке в (1) комплексных величин ψ и F^* . При этом основные свойства ДФП (аддитивность, коммутативность и др.) сохраняются [3]. Роль элемента, изменяющего порядок оптического ДФП с действительного на комплексный, выполняют гауссовы диафрагмы (ГД) [4]. Одна из таких схем, приведенная в [3], представляет собой ретранслятор (масштаб отображения 1 : 1) с тремя ГД, установленными в общем фокусе линз, на входе и выходе.

Условия выполнения ДФП комплексного порядка оптической схемой, описываемой $ABCD$ -матрицей, в общем виде приводятся в [5] как

$$\text{Arg}(A) = \text{Arg}(D), \quad (2)$$

$$|\text{Arg}(B) - \text{Arg}(C)| = \pi. \quad (3)$$

А.А.Малютин. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; тел.: (095)135 03 27, факс: (095)135 20 55, e-mail: amal@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 2 июля 2004 г.

Заметим, однако, что соотношение (3) в случае комплексных ψ и F^* не выполняется. Как следствие, авторы работы [5], используя (3), приходят к единственной схеме, являющейся аналогом простого оптического ФП (типа 2 работы [1]), в которой две ГД совмещены с линзами. Этой схеме соответствует комплексный порядок ДФП с действительной частью, равной единице.

Поскольку применение ДФП для анализа сигналов и обработки изображений обсуждается все более широко, в скором времени можно ожидать и его конкретных применений. С этой точки зрения представляет интерес рассмотрение более широкого ряда оптических схем ДФП комплексного порядка, в том числе с использованием только ГД (без применения линз). Это может оказаться полезным для тех областей спектра излучения, где преломляющая оптика малоэффективна. Кроме того, т.к. ДФП комплексного порядка связано с изменением энергии пучка [6], полезно выяснить величину потерь излучения. Немаловажно также установить структуру собственных пучков оптических схем ДФП комплексного порядка.

2. Свойства схем ДФП на основе гауссовых диафрагм

Оптическое преобразование схемой ДФП действительного порядка можно рассматривать как операцию переноса перетяжки собственного пучка из одной опорной плоскости (ОП) в другую. В этих плоскостях собственный пучок характеризуется определенным размером перетяжки и плоским волновым фронтом. Рассмотрим, каковы свойства собственного пучка для схем рис.1, а, б, аналогичных обычным ДФП, в которых линзы замещены ГД.

Поскольку пропускание ГД $T = \exp(-x^2/w_g^2)$ (где x – радиальная координата, а w_g – радиус гауссова пучка, формируемого диафрагмой при падении на нее пучка бесконечного размера с постоянной по пространству интенсивностью [4]), то $ABCD$ -матрица ГД аналогична матрице линзы

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i/f_g & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

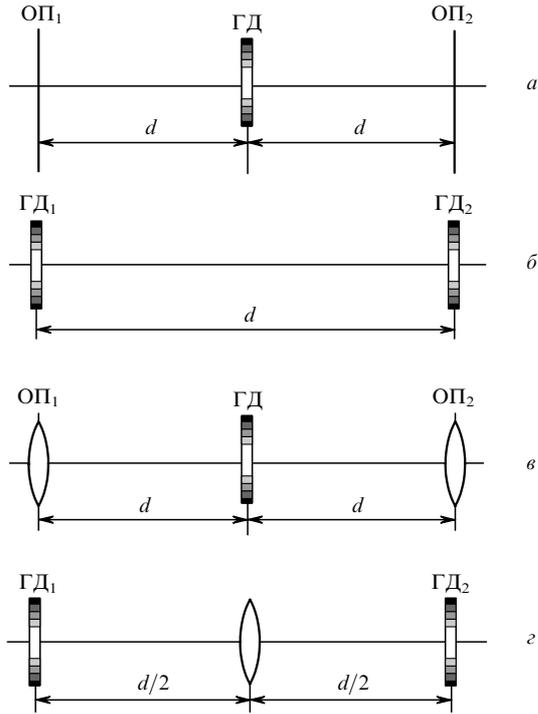


Рис.1. Оптические схемы для осуществления дробного фурье-преобразования комплексного порядка с использованием только гауссовых диафрагм (а, б) и в комбинации с линзами (в, г).

где $f_g = \pi w_g^2 / \lambda$ имеет смысл комплексного фокусного расстояния или рэлеевской длины формируемого диафрагмой пучка. Легко получить [7], что для произвольного гауссова пучка (далее просто «пучка») радиуса w_{g1} , падающего на ГД без смещения центра, на выходе имеем пучок радиусом w_{g2} , связанным с ω_g соотношением

$$w_{g2}^{-2} = w_{g1}^{-2} + w_g^{-2}. \quad (5)$$

При этом кривизна волнового фронта входного пучка не трансформируется.

Используя (4) и матрицу распространения в свободном пространстве длиной d для схем рис.1,а, б имеем

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 - id/f_g & 2d - id^2/f_g \\ -i/f_g & 1 - id/f_g \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$M_b = \begin{pmatrix} 1 - id/f_g & d \\ -d/f_g^2 - i2/f_g & 1 - id/f_g \end{pmatrix}.$$

Соответствие этих матриц схемам ДФП комплексного порядка, очевидно, предполагает, что замена реальных линз в схемах ДФП на ГД допускает представление (6) в виде (1). Для этого необходимо, чтобы в (6) имело место $A = \cos \psi$ и $-C/B = (1/F^*)^2$, что, как легко убедиться, выполнимо, если ψ и F^* являются комплексными величинами. Хотя вид матриц (6) различен, их собственные значения задаются одним и тем же уравнением

$$A^2 - 2A \left(1 - \frac{id}{f_g}\right) + 1 = 0, \quad (7)$$

корнями которого являются

$$A_{1,2} = 1 - \frac{id}{f_g} \pm \left(-\frac{d^2}{f_g^2} - \frac{i2d}{f_g}\right)^{1/2} = \cos \psi \pm i \sin \psi = \exp(\pm i\psi). \quad (8)$$

Обозначая $\psi = \psi_{re} + i\psi_{im}$, имеем

$$A_{1,2} = \exp(\pm i\psi_{re}) \exp(\mp \psi_{im}). \quad (9)$$

Поскольку знак «+» для второй экспоненты в (9) означает возрастание поля (что в нашем случае исключено), то, отбросив второе решение, для потерь в системе получим

$$\mathcal{L} = 1 - |A|^2 = 1 - \exp(-2\psi_{im}). \quad (10)$$

При этом ψ_{re} характеризует накопленную фазу Гуй (НФГ) собственного пучка: $\theta = \psi_{re}$.

Поскольку элементы B и C матриц (6) для схем рис.1,а, б различны, следует ожидать, что радиусы и кривизны волновых фронтов собственных пучков этих схем будут отличаться, поскольку

$$F^* = \left(-\frac{B}{C}\right)^{1/2} = \frac{B}{\sin \psi}. \quad (11)$$

Далее, т. к. $A = D$, для радиуса пучка и кривизны его волнового фронта получим

$$w_e = |F^*| \left(\frac{\lambda}{\pi |\operatorname{Re} F^*|}\right)^{1/2}, \quad \rho_e = -\frac{\operatorname{Im} F^*}{|F^*|^2}. \quad (12)$$

Таким образом, задача о нахождении собственных значений и собственных функций для схем рис.1,а, б ДФП комплексного порядка может быть решена достаточно формально.

Отметим, что в общем случае (при $\operatorname{Im} F^* \neq 0$) собственными для ДФП комплексного порядка являются пучки со сферическим волновым фронтом и в силу равенства потерь и одинаковой величины НФГ порядок выполняемого ДФП для обеих схем рис.1,а, б один и тот же,

$$a^* = \frac{2\psi}{\pi}. \quad (13)$$

Для простых схем рис.1 более наглядным, однако, представляется другой подход. Рассмотрим сначала схему рис.1,а.

Пусть искомый пучок с радиусом перетяжки w_0 , расположенной на расстоянии z от ОП₁, имеет в ОП₁ радиус w_e и кривизну волнового фронта ρ_e . Радиус пучка и его кривизну на входе в ГД обозначим соответственно w_{g1} и ρ_g . После ГД кривизна волнового фронта пучка не изменится, а его радиус w_{g2} задается соотношением (5).

Нам нужно найти такой пучок с радиусом w_0 , для которого и в опорной плоскости ОП₂ размер и кривизна будут равны w_e и ρ_e , т.е. нам следует найти пучок (рис.2,а), удовлетворяющий соотношениям

$$\begin{aligned} w_e &= w(z+d), \quad w_{g1} = w(z+2d), \quad w_{g2} = w(z), \\ \rho_e &= \rho(z+d), \quad \rho_g = \rho(z) = \rho(z+2d), \end{aligned} \quad (14)$$

что совместно с (5) сводится к простой системе уравнений, решение которой дает

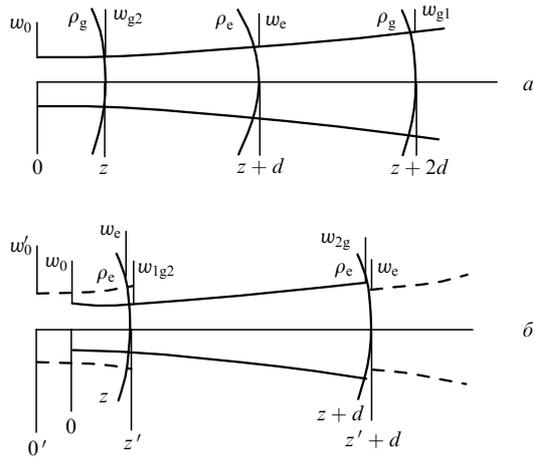


Рис.2. Диаграммы к расчету радиусов собственных пучков и кривизны их волновых фронтов схем дробного фурье-преобразования с использованием гауссовых диафрагм (рис.1,а, б).

$$w_0 = \left\{ \frac{\lambda d}{\pi\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{4f_g^2}{d^2} \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$z = d \left\{ \left[\left(1 + \frac{4f_g^2}{d^2} \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2} - 1 \right\}. \tag{15}$$

Дальнейшие вычисления тривиальны. Заметим только, что точки с координатами z и $z + 2d$ располагаются по разные стороны от точки $z_0 = \pi w_0^2 / \lambda$, где кривизна волнового фронта собственного пучка максимальна.

Для схемы рис.1,б собственный пучок с параметрами w_e и ρ_e должен существовать на входе в ГД₁ и на выходе из ГД₂. После ГД₁ и перед ГД₂ пучок должен иметь одинаковую кривизну (ρ_e), но, очевидно, разный размер. Поэтому можно записать

$$w_{1g2}^{-2} = w_e^{-2} + w_g^{-2}, \quad w_e^{-2} = w_{2g1}^{-2} + w_g^{-2}, \tag{16}$$

где, как и выше, цифры 1 и 2 после индекса «г» обозначают вход и выход из ГД, а цифры перед индексом – номер ГД. Для пояснения дальнейшего обратимся к рис.2,б, на котором w_0 (и другие величины без штриха) относятся только к пучку, существующему между ГД₁ и ГД₂. Учитывая вышесказанное, можно записать

$$w_{1g2} = w(z), \quad w_{2g1} = w(z + d),$$

$$\rho_e = \rho(z) = \rho(z + d), \tag{17}$$

что совместно с (16) образует полную систему уравнений для нахождения параметров пучка между ГД и ρ_e . Остальные параметры, поскольку элементы B и C матриц (6) различаются, будут в случае схемы рис.1,б другими. Так, например,

$$w_0 = \left\{ \frac{\lambda d}{\pi 2\sqrt{2}} \left[\left(1 + \frac{4f_g^2}{d^2} \right)^{1/2} - 1 \right]^{1/2} \right\}^{1/2},$$

$$z = \frac{d}{2\sqrt{2}} \left\{ \left[\left(1 + \frac{4f_g^2}{d^2} \right)^{1/2} + 1 \right]^{1/2} - \sqrt{2} \right\}. \tag{18}$$

Для определения w_e можно взять любое из соотношений (16) и далее, зная w_e и ρ_e и используя

$$\tan \psi(z) = \frac{\pi w^2(z) \rho(z)}{\lambda} = \frac{z \lambda}{\pi w_0^2}, \tag{19}$$

вычислить радиус перетяжки пучка, входящего в ГД₁, и ее положение (величины на рис.2,б, обозначенные штрихом).

Напомним, что потери для собственного пучка, входящего в ГД₁ на рис.1,б, в соответствии с (6)–(10), несмотря на то что в этой схеме использованы две ГД, а не одна, те же, что и для схемы с одной ГД на рис.1,а, т.е.

$$\mathcal{L} = 1 - |A|^2 = 1 - \exp(-2\psi_{im})$$

$$= 1 - \left(\frac{w_{g2}}{w_{g1}} \right)^2 = 1 - \left(\frac{w_{1g2}}{w_{2g1}} \right)^2. \tag{20}$$

Точно так же неизменными оказываются НФГ собственного пучка и комплексный порядок ДФП, который может быть выражен через накопленную фазу Гуи и потери. Это соблюдается, естественно, при условии, что в обеих схемах используется одна и та же длина волны, одинаковые ГД и оптическая длина схемы на рис.1,б вдвое меньше, чем для схемы на рис.1,а.

Нормированные значения радиусов собственных пучков и кривизны их волновых фронтов, а также зависимости потерь и НФГ от отношения f_g/d приведены для схем рис.1,а,б (помечены знаком ∞) соответственно на рис.3 и 4.

3. Свойства некоторых схем ДФП на основе гауссовых диафрагм и линз

Рассмотрим теперь оптические схемы рис.1,а, в, г, представляющие собой комбинации схем ДФП комплексного порядка (рис.1,а, б) со схемами ДФП действительного порядка (на основе линз). Заметим, что схемы рис.1,в, г отличны от оптических схем, рассмотренных в [3, 5].

Для схем рис.1,в, г вычисления элементов $ABCD$ -матриц дают

$$A_c = D_c = \left(1 - \frac{2d}{f} \right) - \frac{id}{f_g} \left(1 - \frac{d}{f} \right), \quad B_c = 2d - \frac{id^2}{f_g}, \tag{21}$$

$$C_c = -\frac{2}{f} \left(1 - \frac{d}{f} \right) - \frac{i}{f_g} \left(1 - \frac{d}{f} \right)^2,$$

и

$$A_d = D_d = \left(1 - \frac{d}{2f} \right) - \frac{id}{f_g} \left(1 - \frac{d}{4f} \right), \quad B_d = d \left(1 - \frac{d}{4f} \right), \tag{22}$$

$$C_d = -\frac{1}{f} - \frac{d}{f^2} \left(1 - \frac{d}{4f} \right) - \frac{2i}{f_g} \left(1 - \frac{d}{2f} \right),$$

что при $f \rightarrow \infty$ соответствует переходу к матрицам (6). Как видим, элементы главной диагонали матриц (21) и (22) в отличие от (6) не совпадают. Поэтому естественно ожидать, что при одинаковых параметрах линз собственные пучки и потери для схем рис.1,в, г будут различаться.

Для схемы рис.1,в нормированные значения радиусов собственных пучков и кривизны их волновых фронтов, а также зависимости потерь и НФГ от отношения f_g/d приведены на рис.3 (вычисления сделаны в соответствии с (1), (9)–(12)). Отметим, что матрица с элементами (21)

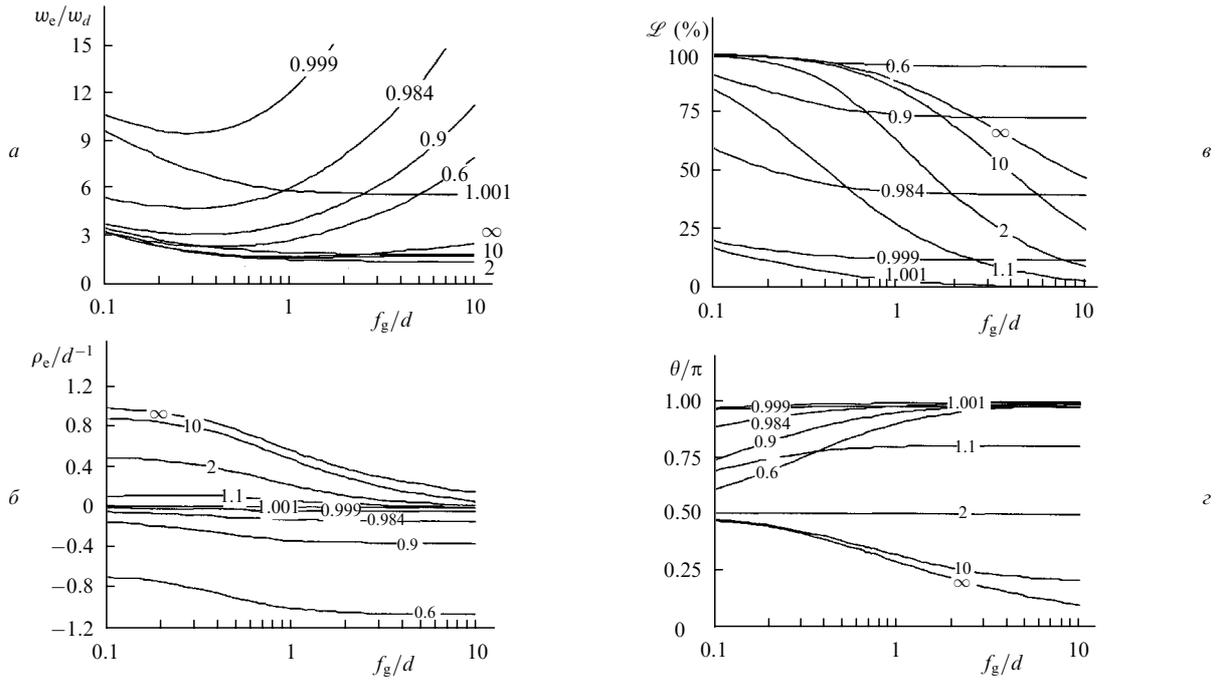


Рис.3. Нормированные значения радиусов собственных пучков (а), их радиусов кривизны (б), потерь излучения (в) и накопленной фазы Гуи (г) в зависимости от параметра гауссовой диафрагмы f_g/d для различных фокусных расстояний линз f/d в схеме рис.1,а, а также а (помечены знаком ∞). Цифры у кривых указывают значение нормированного фокусного расстояния линз f/d ; $\omega_d = (\lambda d/\pi)^{1/2}$.

имеет две особые точки. Так, при $f = d$ она вырождается в матрицу, соответствующую отрезку комплексной длины,

$$M_c' = \begin{pmatrix} 1 & 2f - if^2/f_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

и собственных пучков не имеет, т. е. при $f = d$ оптическая система рис.1,б не является ДФП. При $f = 2d$ получим

$$M_c'' = \begin{pmatrix} -if/4f_g & f - if^2/4f_g \\ -1/f - i/4f_g & -if/4f_g \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Собственный пучок матрицы (24) имеет следующие параметры:

$$w_{c''} = \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda f (16f_g^2 + f^2)^{1/2}}{\pi f_g} \right]^{1/2}, \quad (25)$$

$$\rho_{c''} = (16f_g^2 + f^2)^{-1/2}. \quad (26)$$

НФГ для пучка с такими параметрами не зависит от отношения f_g/d (см. рис.3,г).

Для схемы рис.1,г параметры собственных пучков,

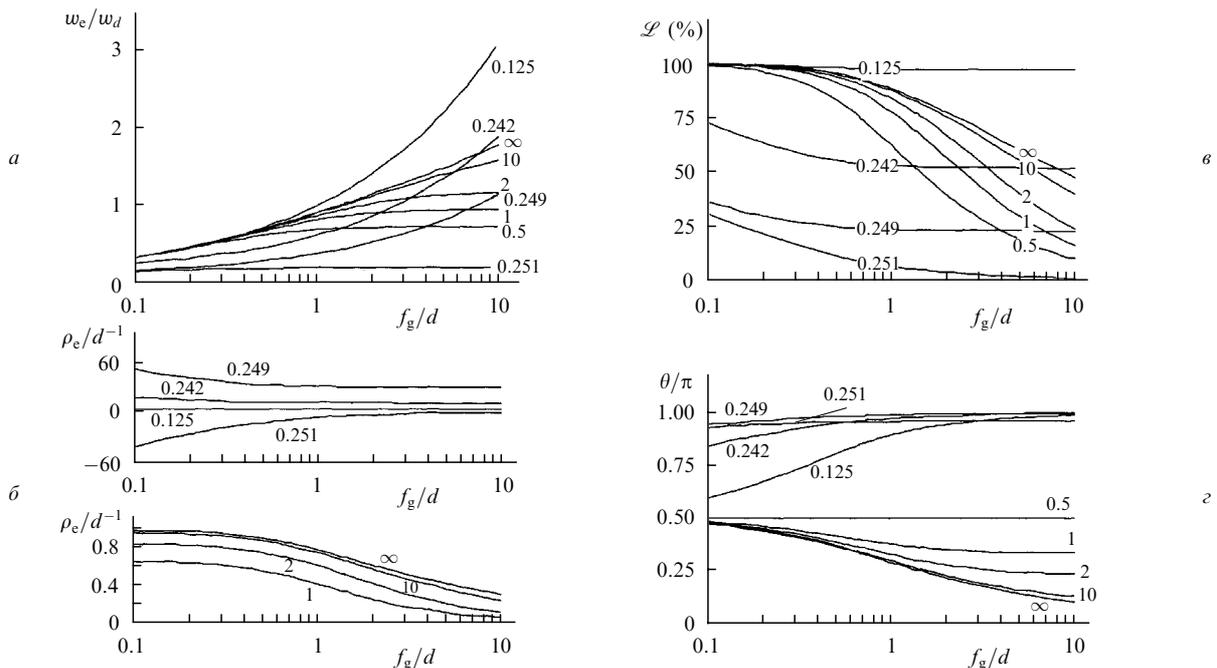


Рис.4. То же, что и рис.3, в схеме рис.1,г, а также б (помечены знаком ∞). Кривая при $f/d = 0.5$ на рис.4,б отсутствует, т. к. кривизна пучка произвольна.

потерь и НФГ в зависимости от f_g/d даны на рис.4. Как и для схемы рис.1,б, оптическая схема рис.1,з также имеет две особые точки. При $f = d/2$ имеем

$$M'_d = \begin{pmatrix} -if/f_g & f \\ -1/f - f/f_g^2 & -if/f_g \end{pmatrix}, \quad (27)$$

что дает радиус собственного пучка

$$w'_d = \left[\frac{\lambda f_g f}{\pi (f_g^2 + f^2)^{1/2}} \right]^{1/2}$$

и произвольную кривизну волнового фронта. Схема рис.1,з в данном случае, как уже отмечалось в [5], представляет собой ДФП мнимого порядка. Для пучка с плоским волновым фронтом он равен

$$a'_d = i \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \ln \left[\frac{(f_g^2 + f^2)^{1/2} - f}{(f_g^2 + f^2)^{1/2} + f} \right]^{1/2} \right\}. \quad (28)$$

В случае $f = d/4$ линза отображает ОП₁ на ОП₂ и матрица (22) вырождается в матрицу линзы с комплексным фокусным расстоянием

$$M''_d = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/f + 2i/f_g & -1 \end{pmatrix}, \quad (29)$$

т. е. оптическая схема рис.1,з перестает быть ДФП.

4. Структура собственных пучков ДФП комплексного порядка

Вышеприведенные рассуждения относительно схем ДФП комплексного порядка и полученные нами формулы безусловно верны для гауссова пучка, т. е. для моды Эрмита–Гаусса нулевого порядка u_{00}^{HG} . Что будет для мод более высокого порядка?

Опустив несущественные коэффициенты и фазовые множители и ограничившись одномерным рассмотрением, для структуры поля моды Эрмита–Гаусса после ГД можно записать

$$u_n^{HG}(x') = u_n^{HG}(x, w_{g1}) \exp\left(-\frac{x^2}{w_g^2}\right) \sim \exp\left(-\frac{x^2}{w_{g1}^2}\right) H_n\left(\frac{x\sqrt{2}}{w_{g1}}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w_g^2}\right), \quad (30)$$

где w_{g1} – радиус гауссовой огибающей пучка до ГД; H_n – полином Эрмита n -го порядка; x' – радиальная координата на выходе ГД радиуса w_g . Легко показать, что приведение правой части выражения (30) к виду $\sim u_n^{HG}(x', w_{g2})$, где w_{g2} задается соотношением (5), выполнимо только при $n = 0, 1$. Во всех остальных случаях полином Эрмита содержит более одного члена. Таким образом, собственные пучки ДФП комплексного порядка (13) мо-

гут иметь только структуру мод u_{mn}^{HG} с $m, n \leq 1$ (или Лагерра–Гаусса u_{01}^{LG}). При этом, поскольку для ДФП справедливо [8]

$$\mathcal{F}^a [u_{mn}^{HG}] = \exp\left[-ia(N+1)\frac{\pi}{2}\right] u_{mn}^{HG}, \quad (31)$$

где $N = m + n = 2p + l$, то для собственных мод u_{01}^{HG}, u_{11}^{HG} и u_{01}^{LG} при ДФП комплексного порядка $a^* = 2(\psi_{re} + i\psi_{im})/\pi$ имеем потери

$$\mathcal{L}_{nm,pl} = 1 - \exp[-2(N+1)\psi_{im}] \quad (32)$$

или

$$\mathcal{L}_{01} = 1 - (1 - \mathcal{L})^2, \quad \mathcal{L}_{11} = 1 - (1 - \mathcal{L})^3, \quad (33)$$

где \mathcal{L} вычисляется для собственного гауссова пучка (моды u_{00}^{HG}) согласно (10) или (20). В соответствии с (31) для собственных мод u_{01}^{HG}, u_{11}^{HG} и u_{01}^{LG} изменяется и НФГ, которую определяет величина действительной части порядка a^* .

5. Заключение

Мы рассмотрели возможность осуществления ДФП комплексного порядка с помощью нескольких оптических схем, представляющих собой либо аналоги известных схем ДФП с заменой линз на гауссовы диафрагмы, либо их комбинации с традиционными линзовыми схемами ДФП. В широком диапазоне изменения параметров ГД и линз определены значения радиусов собственных пучков, их радиусов кривизны, потеря излучения и накопленной фазы Гуи. Обнаружено, что при определенных параметрах линз комбинированных схем в одном случае существует вырождение в оптическую схему, эквивалентную отрезку комплексной длины, в другом – в схему, эквивалентную линзе с комплексным фокусным расстоянием. Показано, что собственными пучками ДФП комплексного порядка для рассмотренных схем являются только моды Эрмита–Гаусса u_{mn}^{HG} с $m, n \leq 1$ (или моды Лагерра–Гаусса u_{01}^{LG}).

Следует отметить, что при продольной диодной накачке активных сред усиление может быть аппроксимировано гауссовым распределением $G = (G_0 - 1) \exp(-x^2/w_g^2) + 1$ (G_0 – усиление на оси пучка), что аналогично ГД, поэтому использованный матричный метод может быть распространен и на этот случай.

1. Lohmann A.W. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 2181 (1993).
2. Mendlovic D., Ozaktas H.M. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 1875 (1993).
3. Shih Ch.-Ch. *Opt. Lett.*, **20**, 1178 (1995).
4. Yariv A., Yeh P. *Opt. Commun.*, **13**, 370 (1975).
5. Wang C., Lu B. *Opt. Commun.*, **203**, 61 (2002).
6. Dragoman D. *J. Mod. Opt.*, **45**, 2117 (1998).
7. Джеррард А., Берч Дж.М. *Введение в матричную оптику* (М.: Мир, 1978).
8. Alieva T., Bastiaans M.J., Calvo M.L. *Recent Res. Developments Opt.*, **1**, 105 (2001).