

К расчету процесса ГВГ в РДС-кристаллах методом задания пространственно-периодической зависимости квадратичной нелинейности в монодоменном кристалле

В.Г.Дмитриев, Р.Сингх

Развит метод расчета процесса ГВГ в линейно-однородных кристаллах с регулярной доменной структурой (РДС) с заданием пространственно-неоднородного периодического распределения параметра квадратичной нелинейности в виде «мелкомасштабного» эллиптического синуса, полупериод которого формирует один домен с характерным «микроплато» параметра нелинейности и междоменными стенками. Установлено, что поскольку при выполнении условия квазисинхронизма длина домена должна быть равна когерентной длине и если последняя вычислена в приближении заданного поля, то зависимость амплитуды гармоники от продольной координаты имеет вид «крупномасштабного» эллиптического синуса с широким «макроплато», соответствующим определенному (в квазисинхронизме – практически 100 %-ному) преобразованию, однако расстройка в домене ни при каких параметрах не компенсируется полностью обратным вектором решетки. Фазовые траектории внутри одного домена при этом имеют вид последовательности: неустойчивый фокус, предельный цикл («макроплато»), устойчивый фокус; в следующем домене картина повторяется. Показано, что ширина кривой синхронизма при ГВГ в РДС-кристалле в режиме сильного энергообмена с учетом вторичных максимумов может оказаться существенно (в несколько раз) больше таковой, рассчитанной в приближении заданного поля.

Ключевые слова: генерация гармоник, РДС-кристалл, квазисинхронизм.

1. Введение

Кристаллы с регулярной доменной структурой (РДС-кристаллы) представляют значительный интерес для применения в нелинейно-оптических преобразователях частоты лазерного излучения [1, 2]. В РДС-кристаллах фазовое согласование волн основного (лазерного) излучения и второй гармоники реализуется за счет периодического изменения знака квадратичной нелинейности, или, что то же самое, периодического изменения на π обобщенной фазы; при этом должно выполняться равенство двух длин – когерентной длины (при данной расстройке) и длины домена, что соответствует выполнению условия так называемого квазисинхронизма, когда нелинейный уход обобщенной фазы от оптимального значения периодически компенсируется ее скачком на π при переходе от домена к домену [2].

Принцип квазисинхронизма в периодически нелинейном кристалле, предложенный еще на заре нелинейной оптики (1962 г.) Н.Бломбергенем с сотрудниками [3] и технологически реализованный лишь в последние 20 лет в виде РДС-кристаллов, вызывает значительный практический интерес исследователей и разработчиков в связи с целым рядом интересных, а во многом и уникальных свойств таких кристаллов (подробнее см. в [2]).

Теория процесса преобразования частоты лазерного излучения в РДС-кристаллах еще весьма далека от своего завершения даже в части ГВГ, не говоря уже о парамет-

рической генерации света или генераторах разностной и суммарной частот. Многие аспекты этой теории вообще не разработаны (это относится в первую очередь к теории влияния факторов, ограничивающих эффективность преобразования частоты; частично эти вопросы обсуждались в [4] (см. также библиографию в [1, 2])). Отсутствие законченной теории преобразования частоты в таких кристаллах связано прежде всего со значительными математическими трудностями расчетов по сравнению с теорией преобразования в монодоменных (однородных) кристаллах.

Методы расчета процесса преобразования частоты в РДС-кристаллах можно условно разделить на следующие основные группы:

- последовательный расчет процесса преобразования от домена к домену, когда выходные значения амплитуд и фаз волн предыдущего ($n - 1$ -го) домена являются граничными (входными) значениями для следующего (n -го) домена; то же самое, разумеется, относится и к пространственно-временным распределениям амплитуд и фаз в случае расчета для волновых пакетов (импульсов и пучков (см., напр., [5]));

- расчет процесса преобразования в линейно-однородном кристалле с заданием пространственно-неоднородного (периодического) распределения параметра квадратичной нелинейности (см., напр., [1]);

- расчет процесса преобразования в линейно-однородном кристалле с соответствующей заменой переменных на базе преобразования разностных уравнений для РДС-кристалла в дифференциальные уравнения для однородного кристалла [2, 6].

Во всех случаях применения методов расчета аналитические решения могут быть найдены только в простейших случаях (плоские волны, приближение заданного поля сильной волны), в связи с чем основным способом

В.Г.Дмитриев. ФГУП "НИИ «Полос» им. М.Ф.Степеляха", Россия, 117342 Москва, ул. Введенского, 3

Р.Сингх. Российский университет дружбы народов, факультет физико-математических и естественных наук, Россия, 117198 Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

получения результатов является компьютерное моделирование.

В настоящей работе мы будем использовать второй метод расчета – задание определенного периодического распределения коэффициента квадратичной нелинейности $\chi^{(2)}(z)$, причем сделаем попытку учесть в этом распределении междоменные стенки. Расчет проведем на примере ГВГ в приближении плоских волн на основе укороченных уравнений для однородного кристалла. Очевидно, что весьма важным является конкретный вид задаваемой функции $\chi^{(2)}(z)$. Традиционно эта функция задается в виде меандра, т. е. функции с амплитудой $\chi_0^{(2)}$, постоянной на длине домена и периодически меняющейся знак при переходе от домена к домену [1]. Вместе с тем в работах [7, 8] правомерность такого вида функции $\chi^{(2)}(z)$ подвергается сомнению. Так, в [7] экспериментально доказано существование междоменных стенок (с толщиной ~ 1 мкм при толщине домена 5–20 мкм), где пространственная зависимость $\chi^{(2)}$, равно как и поведение оптической оси кристалла, вообще говоря, не определены. В работе [8] сделана интересная попытка проанализировать реальную форму функции $\chi^{(2)}(z)$ в РДС-кристалле в эксперименте с использованием параметрической люминесценции и сделано предположение, что в междоменной стенке $\chi^{(2)}$ изменяется линейно от максимального значения $\chi_0^{(2)}$ в $n-1$ -м домене до значения $-\chi_0^{(2)}$ в n -м домене, а в следующей междоменной стенке наоборот – от $-\chi_0^{(2)}$ до $\chi_0^{(2)}$. Заметим также, что внутри междоменной стенки могут иметь место отличия коэффициентов преломления и поглощения от таковых внутри остальной части домена [7, 9, 10].

2. Теория ГВГ в РДС-кристалле, сформированном пространственно-периодическим распределением параметра $\chi^{(2)}$ с учетом междоменных стенок

Постановка задачи и основные уравнения. Рассмотрим распространение лазерного излучения в однородном (по коэффициенту преломления) квадратично-нелинейном кристалле, в котором параметр нелинейности $\chi^{(2)}$ является периодической функцией продольной координаты z , при этом для учета междоменных стенок примем, что это распределение имеет вид эллиптического синуса:

$$\chi^{(2)} = \chi_0^{(2)} \operatorname{sn}(u; \kappa), \quad (1)$$

где $\operatorname{sn}(u; \kappa)$ – двухпараметрический эллиптический синус Якоби [1], являющийся решением уравнения

$$\left[\frac{d \operatorname{sn}(u; \kappa)}{du} \right]^2 = [1 - \operatorname{sn}^2(u; \kappa)] [1 - \kappa^2 \operatorname{sn}^2(u; \kappa)], \quad (2)$$

где $u = \gamma z$; γ – некоторый коэффициент пропорциональности.

Эллиптический синус Якоби $\operatorname{sn}(u; \kappa)$ представляет собой периодическую функцию параметра u с периодом, равным $4K$, где

$$K(\kappa) = \int_0^1 [(1-y^2)(1-\kappa^2 y^2)]^{-1/2} dy \quad (3)$$

– полный эллиптический интеграл первого рода [11, 12]. Из формулы (3) следует, что период эллиптического синуса однозначно определяется параметром κ . При $\kappa = 0$

эллиптический синус Якоби превращается в обычный (тригонометрический круговой) синус, а при $\kappa = 1$ – гиперболический тангенс:

$$\operatorname{sn}(u; 0) = \sin u, \quad \operatorname{sn}(u; 1) = \tanh u. \quad (4)$$

Соответственно при $\kappa = 0$ имеем $K = \pi/2$ (полный период синуса $4K = 2\pi$), а при $\kappa \rightarrow 1$ получаем $K \rightarrow \infty$. Заметим также, что

$$\operatorname{sn}(u; 2mK) = 0, \quad \operatorname{sn}[u; (4m+1)K] = 1,$$

где $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Задавая квадратичную нелинейность в виде пространственно-периодической функции, мы тем самым формируем периодически нелинейный кристалл, однородный в линейном приближении (т. е. по коэффициенту преломления), но неоднородный по квадратичной нелинейности. Мы здесь абстрагируемся от конкретной технологии реализации такого неоднородно-нелинейного кристалла на практике (см., напр., [9]). Задание этой периодической неоднородности нелинейности именно в виде эллиптического синуса Якоби позволяет реализовать структуру, содержащую плато параметра $\chi^{(2)}$ и некоторую область, которую условно можно назвать междоменной стенкой между соседними доменами, т. е. между соседними полу-периодами функции Якоби, в которых знаки параметра $\chi^{(2)}$ различны (рис. 1). Внутри стенки параметр $\chi^{(2)}$ уменьшается по абсолютной величине, проходя через нуль в точках $u/K = 0, 2, 4, \dots$. Таким образом, периодическая структура нелинейности формирует своеобразную «доменную» структуру с постоянной по длине кристалла длиной домена $L_d = 2K/\gamma$, а также междоменные стенки. Другими словами, в нашем случае мы формируем РДС-кристалл.

Возникает вопрос о том, как корректно учесть периодическую структуру квадратичной нелинейности при расчетах процессов преобразования частоты в таких периодически нелинейных кристаллах. Традиционное описание этих процессов базируется на использовании волнового уравнения [2]

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (5)$$

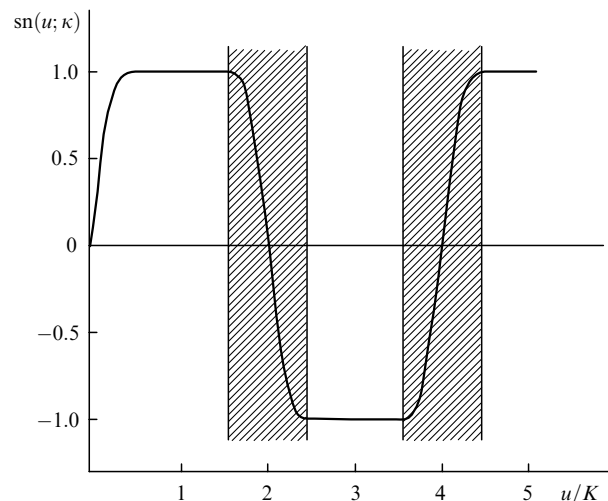


Рис. 1. Формирование РДС-кристалла заданием периодической квадратичной нелинейности в виде эллиптического синуса. Междоменные стенки заштрихованы. Длина домена $L_d = 2K/\gamma$.

где

$$P = \chi^{(1)}E + \chi^{(2)}E^2 + \dots \quad (6)$$

– поляризованность диэлектрика; $\chi^{(1)} = (\epsilon_0 - 1)/(4\pi)$ – линейная восприимчивость; $\epsilon_0 = n^2$ – линейная диэлектрическая проницаемость; n – коэффициент преломления; $\chi^{(2)}$ – квадратичная восприимчивость, заданная формулой (1). Поскольку в правой части (5) содержится производная только по времени t , можно просто подставить (1) в (6), а линейную часть поляризованности (6) включить в левую часть (5).

Нетрудно видеть, что рассматриваемая периодическая неоднородная по $\chi^{(2)}$ нелинейная среда является однородной по коэффициенту преломления n как в линейном, так и в следующем (квадратично-нелинейном) приближении. Это обусловлено тем, что добавка к коэффициенту преломления Δn в квадратично-нелинейной среде равна нулю в среднем за период светового колебания ($\Delta n = n_1 E$, где $n_1 = \chi^{(2)}/2n_0$, n_0 – линейная часть коэффициента преломления). Неоднородность по n может проявиться только в следующем, кубически-нелинейном, приближении ($\Delta n = n_2 E^2$, где $n_2 = \chi^{(3)}/2n_0$), в котором среднее за период светового колебания значение Δn уже не равно нулю. Мы здесь ограничимся рассмотрением только квадратично-нелинейной среды, а слабыми изменениями коэффициента преломления, связанными с кубической нелинейностью, равно как и изменениями, обнаруженными, в частности, экспериментально в [7], пренебрежем.

Пренебрегая также анизотропией и рассматривая пространство (по z) лазерного излучения и второй гармоники в одноосном кристалле в виде плоских волн, можно переписать (5) совместно с (6) в виде

$$-\Delta E + \frac{\epsilon_0}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \text{sn}(u; \kappa) \chi_0^{(2)} \frac{\partial^2 E^2}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Проведя традиционную процедуру вывода укороченных уравнений [2], получим, например, для случая ГВГ при взаимодействиях типа оое, еео, ооо, еее (волны основного излучения поляризованы одинаково)* систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dz} &= -\sigma_1 \text{sn}(\gamma z; \kappa) a_1 a_2 \sin \psi, \\ \frac{da_2}{dz} &= \sigma_2 \text{sn}(\gamma z; \kappa) a_1^2 \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dz} &= \Delta k + \left(\sigma_2 \frac{a_1^2}{a_2} - 2\sigma_1 a_2 \right) \text{sn}(\gamma z; \kappa) \cos \psi, \end{aligned} \quad (8)$$

где $a_{1,2}$ – действительные амплитуды волн лазерного излучения и второй гармоники соответственно; $\Delta k = k_2 - 2k_1$ – волновая расстройка; $\psi = \Delta k z + 2\varphi_1 - \varphi_2$ – обобщенная фаза процесса; $\varphi_{1,2}$ – парциальные фазы волн; $\sigma_{1,2}$ – коэффициенты нелинейной связи [2] (теперь в выражения для них войдет только амплитуда нелинейности, т. е. $\chi_0^{(2)}$).

*Напомним [2], что в одноосных РДС-кристаллах возможны все шесть типов синхронизма. Для оставшихся двух типов взаимодействия (еое и оео), в которых две волны основной частоты имеют ортогональные поляризации, следует использовать уравнения для генерации суммарной частоты [2, 13]. Это не ограничивает общности уравнений (8).

Из уравнений (8) видно, что, несмотря на наличие в правой части пространственно-периодического множителя (эллиптического синуса), первые два уравнения системы (8) имеют тот же первый интеграл, что и аналогичные уравнения для традиционной ГВГ в однородном (монокристалле) кристалле (этот интеграл соответствует выполнению соотношений Мэнли – Роу):

$$\sigma_2 a_1^2(z) + \sigma_1 a_2^2(z) \equiv \sigma_2 a_1^2(0) + \sigma_1 a_2^2(0) = \sigma_2 a_0^2, \quad (9)$$

где величина a_0 определяется граничными значениями амплитуд волн (при $z = 0$). Используя (9), перепишем систему (8) в виде

$$\begin{aligned} \frac{da}{dz} &= \text{sn}(\gamma z; \kappa) (\sigma_2 a_0^2 - \sigma_1 a_2^2) \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{dz} &= \Delta k + \frac{\sigma_2 a_0^2 - 3\sigma_1 a_2^2}{a_2} \cos \psi \text{sn}(\gamma z; \kappa). \end{aligned} \quad (10)$$

Наконец, вводя безразмерные переменные

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^{1/2} \frac{a_2}{a_0}, \quad \xi = (\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} a_0 z, \quad \Delta = \frac{\Delta k}{2(\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} a_0}, \\ \alpha &= \frac{\gamma}{(\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} a_0}, \end{aligned} \quad (11)$$

из (10) получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{d\xi} &= \text{sn}(\alpha \xi; \kappa) (1 - v^2) \sin \psi, \\ \frac{d\psi}{d\xi} &= 2\Delta + \frac{1 - 3v^2}{v} \text{sn}(\alpha \xi; \kappa) \cos \psi. \end{aligned} \quad (12)$$

Систему уравнений (12) будем решать с граничными условиями $v(0) = 0$, $\psi(0) = \pi/2$ [2].

Квазисинхронизм. При $L_d = l_{\text{coh}}$ (где $l_{\text{coh}} = \pi/\Delta k$ – когерентная длина взаимодействия в приближении заданного поля лазерного излучения [2]), т. е. при $\pi\gamma/\Delta k = 2K$, наступит своеобразный «пространственный резонанс», который в теории РДС-кристаллов носит название квазисинхронизма [2]. В этом режиме волновая расстройка Δk компенсируется обратным вектором решетки нелинейной восприимчивости $\chi^{(2)}$, т. е. выполняются следующие равенства:

$$\Delta k = \frac{\pi\gamma}{2K(\kappa)}, \quad (13)$$

$$\Delta = \frac{\pi\alpha}{4K(\kappa)}. \quad (14)$$

Аппроксимация эллиптического синуса квадратичной нелинейности. Для повышения скорости расчетов при компьютерном моделировании уравнений (12) в пакетах Mathcad вместо эллиптического синуса $\text{sn}(u; \kappa)$ мы использовали его приближенную аппроксимацию в виде суммы [11]:

$$\begin{aligned} \text{sn}(u; \kappa) &= \frac{2\pi}{\kappa K(\kappa)} \sum_{n=1}^p \left\{ \exp \left[-\frac{\pi M(n-1/2)}{K(\kappa)} \right] \right. \\ &\times \left. \frac{\sin \left\{ (2n-1)\pi u / [2K(\kappa)] \right\}}{1 - \exp \left[-\pi M(2n-1) / K(\kappa) \right]} \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

где p – число членов приближения; $M = K(\sqrt{1 - \kappa^2})$.

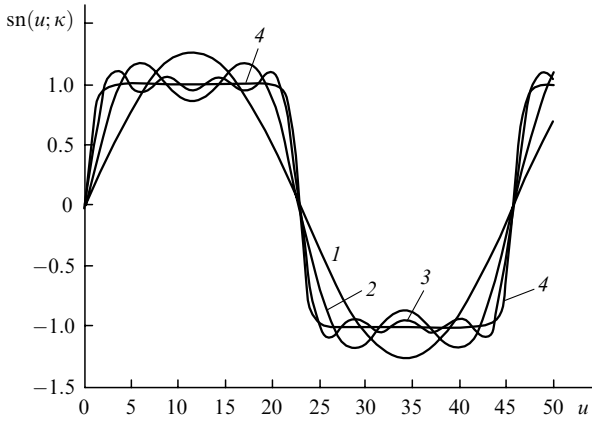


Рис.2. Аппроксимация эллиптического синуса по формуле (15) при $\kappa = 1 - 10^{-9}$, $K = 11.401$ для $p = 1$ (1), 2 (2), 5 (3) и 10 (4).

Кривые на рис.2 показывают, что для значений параметра κ , близких к единице ($\kappa = 1 - 10^{-9}$), практически же для области $0.99 < \kappa < 1$, формула (15) вполне удовлетворительно аппроксимирует $\text{sn}(u; \kappa)$ уже при $p > 5$.

Последовательность расчетов. Прежде всего необходимо найти параметр γ . Одним из возможных методов является использование того факта, что безразмерная толщина междоменной стенки по координате u для области $0.99 < \kappa < 1$, т.е. величина u_w , всегда равна примерно 4. Это, в свою очередь, следует из того, что в данной области значений κ на этапе нарастания $\chi^{(2)}$ от нуля до максимума эллиптический синус $\text{sn}(u; \kappa)$ можно заменить на $\text{sn}(u; 1)$, т.е. на $\tanh u$, а из таблиц для $\tanh u$ [12] можно найти, что эта функция выходит на плато при $u \simeq 2$. Таким образом, $u_w = \gamma l_w = 4$ (см. рис.1), откуда $\gamma = 4/l_w$, где l_w – толщина междоменной стенки. Поскольку ширина плато должна быть значительно больше толщины междоменной стенки, то полупериод функции $\text{sn}(u; \kappa)$, т.е. величина $2K$, должен удовлетворять условию $2K \gg 4$, или $K \gg 2$. Отсюда следует, что параметр κ должен весьма мало отличаться от единицы [11, 12]. Например, для $l_w = 1$ мкм при $\kappa = 1 - 10^{-9}$ получим $\gamma = 4 \times 10^4 \text{ см}^{-1}$.

Далее следует определить параметр $\beta = (\sigma_1 \sigma_2)^{1/2} a_0$. Напомним, что при $a_2(0) = 0$, $a_1(0) = a_{10}$ имеем $a_0 = a_{10}$, где a_{10} – входная ($z = 0$) амплитуда волны основного (лазерного) излучения. Величина a_{10} (в В/см) может быть вычислена по формуле [2]

$$a_{10} = \left(\frac{752}{n} S_{10} \right)^{1/2},$$

где S_{10} – плотность мощности лазерного излучения на входе в кристалл (в Вт/см²); n – коэффициент преломления на длине волны лазерного излучения. В выражениях для коэффициентов нелинейной связи $\sigma_{1,2}$ входит параметр d_{eff} – так называемая эффективная нелинейность [2], пропорциональная амплитуде $\chi_0^{(2)}$ (мы полагаем, что все компоненты тензора третьего ранга χ_{ijk} имеют одну и ту же пространственно-периодическую зависимость в виде эллиптического синуса). Например, при $\sigma_{1,2} \approx 2 \times 10^{-5} \text{ В}^{-1}$, $a_{10} \approx 2 \times 10^5 \text{ В/см}$ имеем $\beta = 4 \text{ см}^{-1}$. Значение параметра β , в зависимости от конкретного кристалла и плотности мощности лазерного излучения, обычно лежит в диапазоне $0.5 - 5 \text{ см}^{-1}$.

Для расчета параметров нелинейной связи $\sigma_{1,2}$ следует использовать формулу

$$\sigma_{1,2} = \frac{8\pi^2}{\lambda_1 n_{1,2}} d_{\text{eff}}, \tag{16}$$

где λ_1 – длина волны основного излучения. Приведем также расчетные формулы для d_{eff} для двух наиболее распространенных РДС-кристаллов.

В случае ниобата лития (LiNbO_3 , группа симметрии $3m$) имеем

$$d_{\text{eee}} = (2d_{15} + d_{31}) \cos^2 \theta \sin \theta + d_{33} \sin^3 \theta + d_{22} \cos^3 \theta \sin 3\varphi, \tag{17}$$

$$d_{\text{ooo}} = -d_{22} \cos 3\varphi, \tag{18}$$

$$d_{\text{eoo}} = d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi, \tag{19}$$

$$d_{\text{oeo}} = d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi, \tag{20}$$

$$d_{\text{eoe}} = d_{31} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi, \tag{21}$$

$$d_{\text{oee}} = d_{\text{eoe}} = d_{22} \cos^2 \theta \cos 3\varphi, \tag{22}$$

$$d_{\text{ooo}} = d_{15} \sin \theta - d_{22} \cos \theta \sin 3\varphi, \tag{23}$$

а в случае титанил-фосфата калия (КТР, группа симметрии $mm2$) –

$$d_{\text{sss}} = \cos \delta \sin \theta \{ - [(2d_{24} + d_{32}) \cos^2 \varphi + (2d_{15} + d_{31}) \sin^2 \varphi] \sin^2 \delta - \{ d_{33} \sin^2 \theta + [(2d_{15} + d_{31}) \cos^2 \varphi + (2d_{24} + d_{32}) \sin^2 \varphi] \cos^2 \theta \} \cos^2 \delta + (2d_{15} - 2d_{24} + d_{31} - d_{32}) \cos \delta \cos \theta \sin \delta \sin 2\varphi \}, \tag{24}$$

$$d_{\text{ffs}} = \sin \delta \sin \theta [- d_{33} \sin^2 \delta \sin^2 \theta - 2d_{15} (\cos \theta \cos \varphi \sin \delta + \cos \delta \sin \varphi)^2 - d_{31} (\cos \theta \cos \varphi \sin \delta + \cos \delta \sin \varphi)^2 - 2d_{24} (\cos \delta \cos \varphi - \cos \theta \sin \delta \sin \varphi)^2 - d_{32} (\cos \delta \cos \varphi - \cos \theta \sin \delta \sin \varphi)^2], \tag{25}$$

$$d_{\text{ffs}} = \sin \theta \{ \cos \delta \{ - [d_{24} + (d_{32} - d_{31} \cos^2 \theta) \sin^2 \delta] \cos^2 \varphi - d_{33} \sin^2 \delta \sin^2 \theta - [d_{15} + (d_{31} - d_{32} \cos^2 \theta) \times \sin^2 \delta] \sin^2 \varphi \} + \frac{1}{2} [-d_{15} + d_{24} (d_{31} - d_{32}) \cos 2\delta] \times \cos \theta \sin \delta \sin 2\varphi \}, \tag{26}$$

$$d_{\text{sfs}} = \sin \theta \{ - [d_{24} + (d_{32} - d_{31} \cos^2 \theta) \cos^2 \delta] \cos^2 \varphi \sin \delta + \cos \delta [d_{15} - d_{24} + (d_{31} - d_{32}) \cos 2\delta] \cos \theta \cos \varphi \sin \varphi - \sin \delta \{ d_{15} \sin^2 \varphi + [d_{33} \sin^2 \theta + (d_{31} - d_{32} \cos^2 \theta) \sin^2 \varphi] \cos^2 \delta \}. \tag{27}$$

Табл.1.

Кристалл	Тип кристалла	Тип взаимодействия	Δk (см ⁻¹)	l_{coh} (мкм)
KDP	Одноосный ($\theta = 90^\circ$)	ооо	-2960.65	10.6
		ооо	2371.27	13.2
		еее	1442.39	21.8
		оео	4572.79	6.9
		еео	6774.30	4.6
		еоо	-759.13	41.4
LiNbO ₃	Одноосный ($\theta = 90^\circ$)	ооо	1175.89	26.7
		ооо	13117.41	2.4
		еее	11157.78	2.8
		оео	18108.36	1.7
		еео	23099.30	1.4
		еоо	6166.83	5.1
LiIO ₃	Одноосный ($\theta = 90^\circ$)	ооо	-13076.40	2.4
		ооо	5897.94	5.3
		еее	4563.51	6.9
		оео	14717.89	2.1
		еео	23537.85	1.3
		еоо	-4256.44	7.4
ВВО	Одноосный ($\theta = 90^\circ$)	ооо	1605.80	19.6
		ооо	2716.47	11.6
		еее	1943.85	16.2
		оео	14717.89	10.9
		еео	2885.49	10.3
		еоо	1774.83	17.7
КТР	Двухосный ($\theta = 90^\circ$)	ssf ($\varphi = 0$)	-4294.30	7.3
		ssf ($\varphi = 90^\circ$)	-5755.82	5.5
		ffs ($\varphi = 0$)	18628.59	1.7
		ffs ($\varphi = 90^\circ$)	19663.83	1.6
		sff ($\varphi = 0$)	865.82	36.3
		sff ($\varphi = 90^\circ$)	-78.08	402.3
		sfs ($\varphi = 0$)	13468.48	2.3
		sfs ($\varphi = 90^\circ$)	13986.10	2.2
		sss ($\varphi = 0$)	8308.36	3.8
		sss ($\varphi = 90^\circ$)	8308.36	3.8
		fff ($\varphi = 0$)	6025.93	5.2
		fff ($\varphi = 90^\circ$)	5599.65	5.6
LBO	Двухосный ($\theta = 90^\circ$)	ssf ($\varphi = 0$)	268.05	117.2
		ssf ($\varphi = 90^\circ$)	-3283.75	9.6
		ffs ($\varphi = 0$)	4044.75	7.8
		ffs ($\varphi = 90^\circ$)	7298.09	4.3
		sff ($\varphi = 0$)	1205.31	26.1
		sff ($\varphi = 90^\circ$)	-719.83	43.6
		sfs ($\varphi = 0$)	3107.49	10.1
		sfs ($\varphi = 90^\circ$)	4734.16	6.6
		sss ($\varphi = 0$)	2170.23	14.5
		sss ($\varphi = 90^\circ$)	2170.23	14.5
		fff ($\varphi = 0$)	2142.57	14.7
		fff ($\varphi = 90^\circ$)	1844.10	17.0
KNbO ₃	Двухосный ($\theta = 90^\circ$)	ssf ($\varphi = 0$)	27689.61	1.1
		ssf ($\varphi = 90^\circ$)	35701.21	0.9
		ffs ($\varphi = 0$)	-515.55	60.9
		ffs ($\varphi = 90^\circ$)	-5397.92	5.8
		sff ($\varphi = 0$)	21346.23	1.5
		sff ($\varphi = 90^\circ$)	26916.65	1.2
		sfs ($\varphi = 0$)	5827.83	5.4
		sfs ($\varphi = 90^\circ$)	5386.65	9.3
		sss ($\varphi = 0$)	12171.21	2.6
		sss ($\varphi = 90^\circ$)	12171.21	2.6
		fff ($\varphi = 0$)	15002.86	2.1
		fff ($\varphi = 90^\circ$)	18132.09	1.7

Компоненты тензора d_{ij} , входящие в выражения для d_{eff} , приведены в справочнике [13]. Для двухосных кристаллов в выражения для d_{eff} входит дополнительный (помимо полярного (θ) и азимутального (φ) углов) угол δ , определяемый выражением [2]

$$\cot 2\delta = \frac{\cot^2 \Omega \sin^2 \theta + \sin^2 \varphi - \cos^2 \theta \cos^2 \varphi}{\cos \theta \sin 2\varphi}, \quad (28)$$

где угол Ω задает угол наклона оптических осей к оси Z кристалла:

$$\cot^2 \Omega = \frac{n_x^2 n_y^2 - n_z^2}{n_z^2 n_x^2 - n_y^2}, \quad (29)$$

n_x, n_y, n_z – главные значения показателя преломления кристалла. Полный алгоритм расчета параметра эффективной нелинейности d_{eff} в двухосных кристаллах изложен в [2].

Следующим шагом является определение когерентной длины взаимодействия l_{coh} при заданной расстройке Δk . Как уже указывалось, она вычисляется в приближении заданного поля. В табл.1 приведены расчетные данные l_{coh} для семи типов нелинейных кристаллов при $\lambda_1 = 1.064$ мкм, $\theta = 90^\circ$ (плоскость XY кристалла) и всех шести возможных типов синхронизма, причем для двухосных кристаллов проведен расчет при двух углах φ (0 и 90°), т.е. в главных плоскостях кристалла. При расчете использовались данные для коэффициентов преломления, взятые из справочника [13].

Из табл.1 видно, что Δk может меняться в весьма широких пределах – от 78 см^{-1} (КТР, sff-синхронизм при $\varphi = 90^\circ$) до $3.6 \times 10^4 \text{ см}^{-1}$ (KNbO₃, ssf-синхронизм при $\varphi = 90^\circ$), при этом когерентная длина взаимодействия изменяется от 400 до 0.9 мкм. Вместе с тем наиболее типичные значения Δk лежат в диапазоне $1000 - 5000 \text{ см}^{-1}$, а для когерентной длины – в диапазоне $30 - 6$ мкм.

Зная параметры γ, β и Δk , по формуле (13) определяем полный эллиптический интеграл 1-го рода $K = \pi\gamma/(2\Delta k)$. Вместо величины $\text{sn}(\alpha\xi; \kappa)$ в правые части уравнений (12) подставляем аппроксимирующую функцию (15), где $u = \alpha\xi$. Заметим, что в диапазоне значений κ , весьма близких к единице (именно этот диапазон используется для расчетов как адекватный реальным РДС-кристаллам), в формуле (15) можно с большой степенью достоверности положить $\kappa = 1, K = M(\sqrt{1 - \kappa^2}) = \pi/2$ [11, 12]. Величина α определяется по формуле $\alpha = \gamma\beta^{-1}$. Тем самым мы полностью определяем функцию $\text{sn}(\alpha\xi; \kappa)$, входящую в правые части уравнений (12), и можем приступить к решению последних.

Результаты расчетов. На рис.3 представлены зависимости приведенной (безразмерной) амплитуды второй гармоники от приведенной координаты ξ при разных параметрах $l_{\text{coh}} = \pi/\Delta k$ для небольшого числа доменов, т.е. полупериодов функции $\text{sn}(\alpha\xi; \kappa)$, вблизи входной ($\xi = 0$) границы кристалла. Для этого варианта расчета принято, что $K = 20, \sigma_{1,2} = 2 \times 10^{-5} \text{ В}^{-1}, a_{10} = 2 \times 10^5 \text{ В/см}, \Delta k = 1500 \text{ см}^{-1}, \beta = 4 \text{ см}^{-1}, \alpha = 4.775 \times 10^3, \gamma = 1.91 \times 10^4 \text{ см}^{-1}, L_d = 2K/\gamma = 20.94 \text{ мкм}, l_w = 2.1 \text{ мкм}, p = 30$.

Для кривой 1 (рис.3) выполнено условие квазисинхронизма $l_{\text{coh}} = L_d$, что отвечает приведенной расстройке $\Delta = 187.5$ (линейный рост $v(\xi)$). Кривым 2, 3, 4 соответствуют «неквазисинхронные» значения $\Delta = 185.625, 183.75, 181.875$. В этих случаях интегральная зависимость $v(\xi)$ напоминает также эллиптический синус. Во избежание

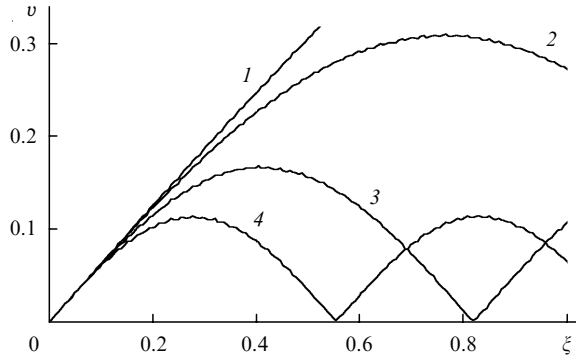


Рис.3. Расчетные зависимости приведенной амплитуды второй гармоники $v(\xi)$ для небольшого числа доменов вблизи входной грани РДС-кристалла при приведенной расстройке $\Delta = 187.5$ (квазисинхронизм) (1), 185.625 (2), 183.75 (3) и 181.875 (4).

недоразумений, чтобы отличить этот эллиптический синус ($v(\xi)$) от эллиптического синуса квадратичной нелинейности $\chi^{(2)}(z)$, назовем первый «крупномасштабным» эллиптическим синусом, а второй – «мелкомасштабным» (тем самым мы подчеркиваем, что зависимость $v(\xi)$ имеет характерные масштабы порядка длины всего нелинейного кристалла, в то время как характерные масштабы зависимости $\chi^{(2)}(z)$ – порядка длины домена). «Крупномасштабный» эллиптический синус есть результат своеобразной интерференции действий «мелкомасштабного» эллиптического синуса квадратичной нелинейности $\text{sn}(\alpha\xi; \kappa)$ и кругового синуса обобщенной фазы $\sin \psi$ в уравнениях (12). Кривые $v(\xi)$ промодулированы пространственными колебаниями, соответствующими биениям амплитуды второй гармоники в приближении заданного поля внутри каждого домена ($v \sim \sin(\Delta kz/2) = \sin(\xi\Delta)$) [2]. Заметим также, что поскольку безразмерная амплитуда v является амплитудой второй гармоники, нормированной на входную амплитуду лазерного излучения, то величина v – это фактически коэффициент эффективности преобразования во вторую гармонику по амплитуде (соответственно величина v^2 есть эффективность преобразования по плотности мощности).

Очевидно, что пространственные биения, соответствующие зависимости $\sin(\xi\Delta)$ внутри доменов, на больших длинах ξ и при больших амплитудах $v(\xi)$ не будут видны на кривых $v(\xi)$. Это подтверждает рис.4, где показано несколько кривых $v(\xi)$ вблизи выполнения условий квазисинхронизма (13), (14) для разных приведенных рас-

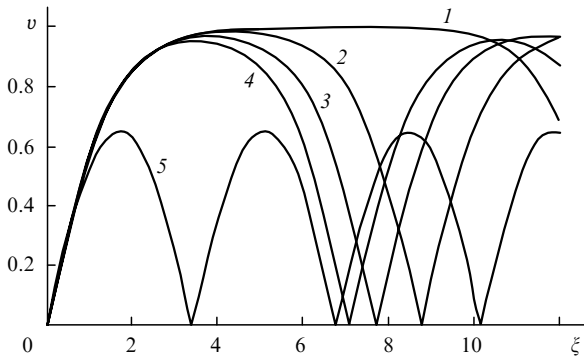


Рис.4. Расчетные зависимости приведенной амплитуды второй гармоники $v(\xi)$ для полной длины РДС-кристалла при приведенной расстройке $\Delta = 187.5$ (квазисинхронизм) (1), 187.519 (2), 187.538 (3), 187.556 (4) и 188.063 (5).

строек Δ . Кривые $v(\xi)$ представляют собой практически точный «крупномасштабный» эллиптический синус. Наиболее интересно здесь то, что даже при точном выполнении условия квазисинхронизма $l_{\text{coh}} = L_d$, или, что то же самое, при выполнении условий (13), (14), зависимость $v(\xi)$ отличается от гиперболического тангенса, как это имело бы место при традиционной ГВГ в однородном (монокристалльном) кристалле при точном выполнении условия синхронизма [2]. Другими словами, даже при квазисинхронизме зависимость $v(\xi)$ сохраняет форму, близкую к традиционному эллиптическому синусу Якоби [11, 12] с характерным плато. Такое поведение $v(\xi)$ свидетельствует о наличии некоторой ненулевой обобщенной расстройки, ни при каких параметрах процесса не компенсируемой вектором обратной решетки кристалла. В свою очередь, это связано с тем, что, как показано в [4, 6] (см. также [2]), когерентная длина взаимодействия l_{coh} в следующем приближении является функцией амплитуды волны второй гармоники:

$$l_{\text{coh}} = \frac{\pi}{\Delta k} \left(1 + \frac{3v^2 - 2}{2\Delta^2} \right). \tag{30}$$

Из формулы (19) следует, что истинная длина когерентности, во-первых, отличается от принятой в наших расчетах ($\pi/\Delta k$), и, во-вторых, меняется от $l_{\text{coh}}^{(1)} = (\pi/\Delta k) \times (1 - 1/\Delta^2)$ для первых доменов вблизи входной границы кристалла до $l_{\text{coh}}^{(2)} = (\pi/\Delta k)[1 + 1/(2\Delta^2)]$ в точке, где $v(\xi)$ достигает максимума ($v = 1$). Разность этих значений равна $3\pi/(2\Delta k \Delta^2)$, что при $\Delta \approx 200$ составляет поправку к нашей когерентной длине порядка $3/(2\Delta^2) \approx 4 \times 10^{-5}$. Тем не менее именно пренебрежение этой малой поправкой приводит к периодическому рассогласованию обобщенной фазы.

Замечания к фазовому портрету процесса. Из уравнений (12) видно, что второй интеграл системы (т.е. уравнение фазовой плоскости [2]) в общем случае отсутствия синхронизма в домене ($\Delta \neq 0$) не может быть получен, поскольку в выражении для производной $dv/d\xi$ сохраняется зависимость от продольной координаты ξ ; такая зависимость исчезает только при $\Delta = 0$ (последний факт может представлять отдельный интерес, но его обсуждение выходит за рамки данной статьи). Наличие при $\Delta \neq 0$ в уравнении для фазовой плоскости зависимости от продольной координаты физически означает присутствие своеобразных потерь энергии волны гармоники, связанных с изменением знака $\chi^{(2)}(\xi)$ и, следовательно, знака производной $dv/d\xi$. Заметим, что такие потери (также периодические) будут иметь место уже при незначительном отличии длины домена $L_d = 2K/\gamma$ от когерентной длины взаимодействия $l_{\text{coh}} = \pi/\Delta k$. В связи с этим на фазовой плоскости в общем случае должны наблюдаться не замкнутые кривые, как для консервативной системы [2], а более сложные, в общем случае – самопересекающиеся, кривые, иллюстрирующие вышеупомянутую своеобразную периодическую интерференцию двух синусов – эллиптического ($\text{sn}(\alpha\xi; \kappa)$) и тригонометрического кругового ($\sin \psi$ (12)). Получение аналитических выражений для таких фазовых траекторий не представляется возможным. На отдельных небольших участках кристалла эти траектории могут представлять собой кривые типа устойчивого или неустойчивого фокуса либо неустойчивых предельных циклов даже при выполнении условий квазисинхронизма (13), (14).

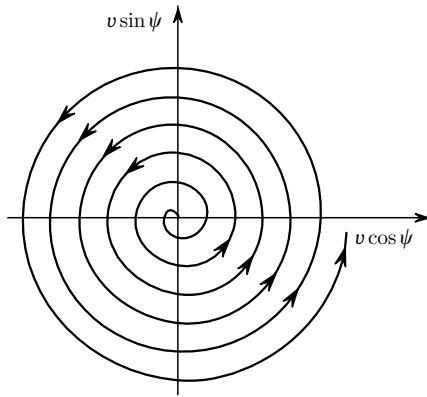


Рис. 5. Фазовая плоскость ГВГ (неустойчивый фокус) в РДС-кристалле при выполнении условия квазисинхронизма для первых пяти доменов вблизи входной грани кристалла. Поворот фазы на 2π соответствует прохождению светом одного домена.

Фазовая плоскость процесса, соответствующая выполнению условия квазисинхронизма (кривая 1 на рис.3) для нескольких первых (вблизи входной грани кристалла) доменов, представлена на рис.5. В отличие от ГВГ в однородном ($\chi^{(2)}(z) \equiv \chi_0^{(2)}$) кристалле при точном синхронизме ($\Delta k = 0$), когда нарастание амплитуды гармоники соответствует движению изображающей точки на фазовой плоскости v, ψ по сепаратрисе, выходящей из начала координат, при постоянной обобщенной фазе $\psi(\xi) \equiv \pi/2$ [2], в данном случае движение изображающей точки соответствует неустойчивому фокусу. Это связано с тем, что при точном выполнении условия квазисинхронизма на выходе каждого домена реализуется равенство $dv/d\xi = 0$ (т. е. $\psi = \pi$), при этом одновременно выполняется и условие $\xi = 2K/\alpha$, т. е. $\text{sn}(\alpha\xi; \kappa) = 0$. Для РДС-кристалла с периодической квадратичной нелинейностью в виде пространственного меандра ($\chi^{(2)}(z) = \pm\chi_0^{(2)}$) при переходе от домена к домену фаза ψ испытывает скачок на π . Однако в нашем случае такого скачка не происходит, фаза ψ однородно и линейно меняется (растет) с координатой ξ , поворачиваясь на 2π при распространении волны внутри домена. Число оборотов равно числу доменов. В работе [8] отмечается, что такая модель является более приближенной к реальной действительности, чем модель РДС-кристалла с меандром.

Таким образом, фазовая траектория рассматриваемого процесса ГВГ в РДС-кристалле с периодической зависимостью $\chi^{(2)}(z)$ в виде эллиптического синуса (учитывая наличие междоменных стенок) для небольшого числа доменов вблизи входной границы этого кристалла образует неустойчивый фокус даже при выполнении условия квазисинхронизма. В дальнейшем фазовые траектории выходят на предельный цикл, соответствующий максимальному коэффициенту преобразования 100% ($v = 1$) и плато на «крупномасштабном» эллиптическом синусе. Детальные расчеты показали, что, выйдя на предельный цикл ($v = 1$) и «продержавшись» на нем в течение времени, за которое волна проходит определенное расстояние в кристалле, фазовые траектории выходят из предельного цикла, образуя устойчивый фокус. Однако в отличие от поведения $v(\xi)$ в случае традиционного устойчивого фокуса [14], здесь величина $v(\xi)$, дойдя до нуля, тут же начинает возрастать – снова повторяется неустойчивый фокус, предельный цикл, устойчивый фокус и т. д.

Такой вид фазовых траекторий еще раз подчеркивает

колебательно-волновую общность нелинейных процессов в физике, или, другими словами, пространственно-временную аналогию между колебательными процессами в системах с сосредоточенными постоянными (например, в радиоконтурках) и волновыми процессами в системах с распределенными параметрами [2, 14]. В нашем случае нарастание амплитуды гармоники по координате ξ эквивалентно нарастанию колебаний и выходу именно на предельный цикл во времени для нелинейного осциллятора с насыщением и отрицательными потерями (т. е. с усилением); коэффициент усиления при этом характеризуется параметром β . Нам пока не удалось найти полную радиофизическую аналогию обнаруженного в настоящей работе периодического повторения серии неустойчивый фокус – предельный цикл – устойчивый фокус. Можно предположить, что аналогичные явления могут иметь место в радиочастотных генераторах с термистором в контуре или в цепи обратной связи. В нашем случае обнаруженная «перекачка» одних характерных фазовых траекторий в другие связана с наличием нескомпенсированной и принципиально некомпенсируемой ненулевой обобщенной расстройки A_{gen} даже при выполнении условия квазисинхронизма ($l_{\text{coh}} = L_d$). Если же взять когерентную длину не в приближении заданного поля, а в приближении, описываемом формулой (19), выполнение условий синхронизма будет иметь место только в некоторой единственной точке на длине кристалла, а на всей остальной длине ГВГ будет идти с некоторой небольшой, но реально ощутимой и меняющейся по длине z расстройкой.

Таким образом, строго регулярная доменная структура исследуемого кристалла (с постоянной по длине кристалла длиной домена $L_d = 2K/\gamma$) не является, вообще говоря, оптимальной для ГВГ, хотя с практической точки зрения требование наличия именно гиперболического тангенса в зависимости $v(\xi)$ представляется избыточным. Вместе с тем по виду кривой 1 на рис.4, соответствующей квазисинхронизму, можно определить ненулевую обобщенную расстройку A_{gen} в соответствии с формулами [2]

$$v_{\text{max}} = (\kappa')^{1/2} = \left[1 + \left(\frac{A_{\text{gen}}}{2} \right)^2 \right]^{1/2} - \frac{A_{\text{gen}}}{2}, \quad (31)$$

$$A_{\text{gen}} = \frac{1 - \kappa'}{(\kappa')^{1/2}} = \frac{1 - v_{\text{max}}^2}{v_{\text{max}}}. \quad (32)$$

Следовательно, зная v_{max} , можно найти параметры κ' (соответствующий интегральному расчетному «крупномасштабному» эллиптическому синусу $v(\xi)$) и A_{gen} . Так, при $v(\xi) = 0.997$ имеем $A_{\text{gen}} = 6 \times 10^{-3}$, что составляет всего $3 \times 10^{-3} \%$ от параметра A . На практике этой поправкой можно заведомо пренебречь.

На рис.6 представлена кривая синхронизма $v(A)$ для ГВГ в рассматриваемом РДС-кристалле при постоянной его длине (кривая 1). Максимум амплитуды второй гармоники достигается в нашем случае при $A = 187.5$, что соответствует выполнению условия квазисинхронизма (см. также рис.3). На этом же рис.6 показана оптимизированная кривая $v_{\text{max}}(A)$, иллюстрирующая зависимость максимальной амплитуды гармоники (достигаемой, вообще говоря, на разных длинах ξ) от параметра A (кривая 2). Характерными для кривой 1 являются два фактора: неэквидистантность нулей (напомним, что в приближе-

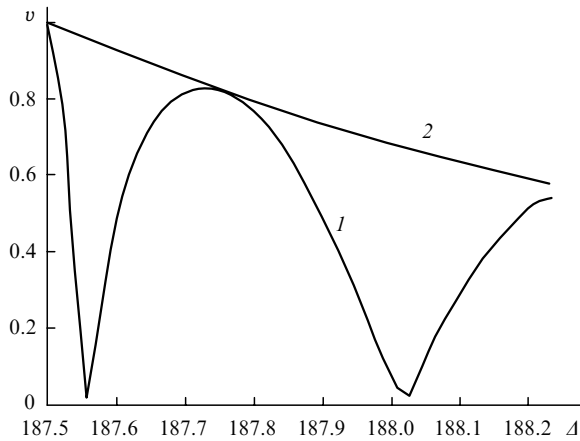


Рис.6. Кривая квазисинхронизма $v(\Delta)$ при постоянной длине кристалла (1) и оптимизированная кривая $v_{\max}(\Delta)$ при разных длинах кристалла (2) в существенно нелинейном режиме преобразования ($\beta = 4 \text{ см}^{-1}$). При $\Delta = 187.5$ реализуется квазисинхронизм.

нии заданного поля нули кривой синхронизма эквидистантны [2]) и большие, сравнимые с амплитудой центрального максимума амплитуды вторичных максимумов. Эти эффекты хорошо известны для ГВГ в режиме сильного энергообмена (см., напр., нашу работу [15]). Практически важный вывод, следующий из рассмотрения этих кривых состоит в том, что расчет ширины синхронизма в таком режиме только по ширине центрального максимума, как это принято в приближении заданного поля, даст весьма существенную ошибку. Необходимо учесть вторичные максимумы (второго и даже, возможно, третьего), в результате чего ширина кривой синхронизма при ГВГ в РДС-кристалле в режиме сильного энергообмена может оказаться существенно (в несколько раз) больше таковой, рассчитанной в приближении заданного поля. Учитывая узость центрального максимума кривой синхронизма, в некоторых случаях может оказаться целесообразным расстроить квазисинхронизм, выбрав обобщенную расстройку, соответствующую центру второго максимума (для рис.6 это отвечает $\Delta = 187.75$).

3. Заключение

В данной статье развит метод расчета процесса преобразования частоты (на примере ГВГ) в линейно-однородном кристалле с заданием пространственно-неоднородного (периодического) распределения параметра квадратичной нелинейности в виде эллиптического синуса, полупериод которого формирует один домен с характерным плато параметра нелинейности и междоменными стенками. Показано, что при выполнении условия квазисинхронизма, когда полупериод эллиптического синуса, т. е. длина одного домена, равен когерентной длине, зависимость амплитуды гармоники от продольной координаты имеет вид «крупномасштабного» эллиптического синуса с широким плато, соответствующим 100% -ному преобразованию, однако расстройка в домене ни при каких параметрах не компенсируется полностью обратным вектором решетки.

Параметры «крупномасштабного» эллиптического синуса позволяют рассчитать эту принципиально некомпенсируемую расстройку. Возникновение последней связано с отличием когерентной длины, принятой в расчете в приближении заданного поля, от истинной когерентной длины (30), зависящей от амплитуды гармоники и, следовательно, от продольной координаты. Вместе с тем соответствующая поправка на практике пренебрежимо мала. Фазовая траектория процесса ГВГ при квазисинхронизме на каждом полупериоде «крупномасштабного» эллиптического синуса образует неустойчивый фокус, предельный цикл (амплитуда гармоники на многих доменах остается постоянной, при этом обобщенная фаза внутри каждого домена изменяется на 2π) и устойчивый фокус; на втором полупериоде ситуация полностью повторяется. При расчете ширины кривой синхронизма необходимо учесть вторичные максимумы, в результате чего ширина кривой синхронизма при ГВГ в режиме сильного энергообмена может оказаться существенно (в несколько раз) больше таковой, рассчитанной в приближении заданного поля. Развитый в статье метод расчета процесса ГВГ в РДС-кристалле, позволяющий учесть наличие междоменных стенок, может быть эффективно использован для вычисления эффективности преобразования в расходящихся пучках лазерного излучения, для адекватного учета анизотропии («сноса») кристалла и влияния тепловых самовоздействий, равно как и для учета нестационарных явлений в различных режимах генерации суммарных и разностных частот и параметрической генерации света.

1. Feier M.M., Magel G.A., Jundt D.H., Byer R.L. *IEEE J. Quantum Electron.*, **28**, 2631 (1982); Rustagi K.C., Mehendale S.C., Meenakshi S. *IEEE J. Quantum Electron.*, **18**, 1029 (1982).
2. Дмитриев В.Г., Тарасов Л.В. *Прикладная нелинейная оптика* (М.: Физматлит, 2004).
3. Armstrong J.A., Bloembergen N., Ducuing J., Pershan P.S. *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962).
4. Юрьев Ю.В. *Канд. дис.* (М.: МФТИ, 2001).
5. Абашин М.В. *Магистерская дис.* (М.: МФТИ, 2003).
6. Дмитриев В.Г., Юрьев Ю.В. *Квантовая электроника*, **28** (3), 259 (1999).
7. Александровский А.А., Глико О.А., Наумова И.И., Прялкин В.И. *Квантовая электроника*, **23** (7), 657 (1996).
8. Китаева Г.Х., Пенин А.Н. *Квантовая электроника*, **34** (7), 597 (2004); Китаева Г.Х., Пенин А.Н. *ЖЭТФ*, **125** (2), 307 (2004).
9. Miller G.D. *Dissertation for the Degree of Doctor of Philosophy* (Stanford University, USA, 1998).
10. Голинищев-Кутузов А.В., Голинищев-Кутузов В.А., Каллимунлин Р.И. *Индукцированные доменные структуры в электро- и магнитоупорядоченных веществах* (М.: Физматлит, 2003).
11. Бетмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции Ламе и Матье)* (М.: Наука, 1967).
12. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. *Специальные функции* (М.: Наука, 1977).
13. Dmitriev V.G., Gurzadyan G.G., Nikogosyan D.N. *Handbook of Nonlinear Optical Crystals* (New York, Berlin: Springer-Verlag, 1999).
14. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. *Введение в теорию колебаний и волн* (М.: Изд-во НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000).
15. Гук Д.А., Дмитриев В.Г. *Квантовая электроника*, **18** (1), 106 (1991).