

Деформация огибающей сигнала из-за сильной дисперсии показателя преломления в области усиления

Н.С.Бухман

Показано, что при распространении узкополосного сигнала с негауссовой огибающей в сильно диспергирующей среде происходит искажение этой огибающей за счет дисперсии усиления (или поглощения) среды. Тем не менее амплитудно-модулированный сигнал с симметричной (четной) огибающей интенсивности продолжает оставаться таковым, причем скорость перемещения «средней точки» (т. е. центра симметрии) сигнала совпадает с вещественной групповой скоростью волны с данной частотой несущей в данной среде и может быть досветовой, сверхсветовой или отрицательной. Таким образом, понятие вещественной групповой скорости (в том числе сверхсветовой и отрицательной) сохраняет свой смысл и в средах с сильной дисперсией усиления (или поглощения).

Ключевые слова: сверхсветовая групповая скорость, искажение сигнала при его распространении, дисперсия.

1. В последнее время значительно возрос интерес к изучению условий распространения волнового пакета в сильно диспергирующей среде (см., напр., [1–3] и цитированную там литературу). Это связано прежде всего с исследованием таких эффектов, как перемещение максимума волнового пакета со сверхсветовой групповой скоростью (в результате чего время задержки сигнала оказывается меньше «светового» времени) и с отрицательной групповой скоростью (в результате чего время задержки сигнала оказывается отрицательным)¹, а также «саморегенерация» частично переданного сигнала (как при отрицательной, так и при сверхсветовой групповой скорости распространения сигнала)².

Для практической реализации перечисленных эффектов необходимо, чтобы дисперсия среды была велика [1], т. е. чтобы показатель преломления среды сильно менялся с изменением частоты излучения. Между тем сильная зависимость показателя преломления среды от частоты волны не может не сопровождаться (в соответствии с соотношениями Крамерса – Кронига [4]) сильной же зависимостью от частоты и показателя поглощения (или усиления) среды. В связи с этим сильно диспергирующая среда, строго говоря, всегда является селективно (по частоте) поглощающей или усиливающей, и при изучении рас-

пространения волнового пакета в ней необходимо учитывать не только дисперсию вещественного показателя преломления среды, но и дисперсию ее показателя поглощения или усиления.

Проще всего это можно сделать, используя понятие комплексного времени задержки сигнала [2, 3, 5]³. Учет вещественной и мнимой частей времени задержки при распространении сигнала в сильно диспергирующей среде представляется практически неизбежным в общем случае, когда вещественная и мнимая части комплексного показателя преломления среды одинаково сильно зависят от частоты волны. При этом вещественная и мнимая части времени задержки сигнала оказываются одного порядка, и мы приходим к следующей альтернативе: либо они обе малы в сравнении с длительностью сигнала и тогда ими можно пренебречь, либо они обе сравнимы с длительностью сигнала и должны быть учтены.

Подчеркнем, что наличие мнимого времени задержки, сравнимого с длительностью сигнала, неизбежно приводит к его сильному искажению⁴. Исключением из этого правила является сигнал с гауссовой огибающей, для которого [2, 3, 5] мнимое время задержки не приводит к из-

¹ Качественной разницы между первым и вторым эффектом нет – в любом случае речь идет (см., напр., [2, 3]) о «прогнозировании» средой сигнала, прибывающего в точку наблюдения со «световым» временем задержки, и выбор между этими эффектами зависит от соотношения между временем «световой» задержки (которое определяется только геометрической толщиной слоя вещества) и длительностью интервала «прогноирования» (которая зависит также и от дисперсии).

² Этот эффект тоже является побочным результатом «прогноирования»: восстановление переданной части сигнала можно рассматривать как неизбежную ошибку («спрогнозировать» внезапное прекращение передачи невозможно, пока и поскольку информация об этом прекращении отсутствует в переданной части сигнала).

Н.С.Бухман. Самарская государственная архитектурно-строительная академия, Россия, 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 194; e-mail: buhman@ssaba.smr.ru

Поступила в редакцию 19 марта 2003 г., после доработки – 26 августа 2003 г.

³ Обзор [5] содержит не только ряд оригинальных результатов по сверхсветовой и отрицательной групповым скоростям сигнала в диспергирующей среде, но и подробный анализ смысла комплексной групповой скорости (а стало быть, и комплексного времени задержки сигнала). Разумеется, все, что измеряется реальными приборами, – вещественно. В настоящей работе (как и в [5]) речь идет о том, что вещественные амплитуда и фаза принимаемого сигнала примерно совпадают с вещественными модулем и аргументом комплексной функции, отличающейся от исходной временной огибающей только комплексным сдвигом аргумента. Таким образом, использование комплексного времени задержки сигнала оказывается удобным методом для изучения искажения его временной зависимости.

⁴ Разумеется, искажение сигнала может происходить не только за счет мнимой части времени задержки (возникающей в 1-м порядке классической теории дисперсии), но и за счет диффузии амплитуды (возникающей во 2-м порядке [5, 6]), а также за счет поправок более высокого порядка. Тем не менее 1-й порядок теории дисперсии (т. е. приближение комплексного времени задержки) имеет особый статус по сравнению с поправками более высокого порядка. Его качественное отличие от более высоких порядков связано с тем, что искажение сигнала в 1-м порядке (т. е. его задержка с комплексным временем задержки) не может быть устранено путем сужения спектра сигнала (т. е. увеличения его длительности), т. к. комплексное время задержки сигнала не стремится к нулю при сужении его спектра.

менению формы его комплексной огибающей. Именно поэтому в расчетах [2] не отмечалось заметных искажений гауссова сигнала при его распространении в селективно (по частоте) усиливающей среде, несмотря на комплексность времени задержки сигнала.

Настоящая работа восполняет указанный пробел и посвящена анализу характера искажений негауссова сигнала при его распространении в усиливающей среде. Используемый подход полностью аналогичен предложенному в [2, 3]. Единственное отличие заключается в том, что теперь мы рассматриваем не гауссовы, а Ш-образные сигналы (составленные, впрочем, из трех гауссовых сигналов). Оказывается, что даже этого изменения вполне достаточно для того, чтобы продемонстрировать характер искажений сигнала в усиливающей диспергирующей среде.

2. Рассмотрим распространение узкополосного сигнала

$$E(z, t) = A(z, t) \exp(-i\omega_1 t) + A^*(z, t) \exp(i\omega_1 t) \quad (1)$$

с частотой несущей ω_1 и комплексной огибающей $A(z, t)$ в однородной изотропной среде вдоль оси z . Пусть волновой пакет распространяется в среде с показателем преломления $n(\omega) = n_0 + \Delta n(\omega)$, где $\Delta n(\omega)$ – комплексная добавка к показателю преломления среды, обусловленная спектральной линией усиления с центральной частотой ω_0 , а n_0 – фоновый (нерезонансный) показатель преломления среды, слабо зависящий от частоты света вблизи ω_0 .

В [2] в приближении комплексного времени задержки получено следующее выражение для комплексной огибающей волнового пакета произвольной формы, прошедшего через слой диспергирующей среды толщиной z :

$$A(z, t) = \exp[ik_0 n(\omega_0)z + \xi g(\Omega_0)] A^{(0)}[t - \tau(z)], \quad (2)$$

где $k_0 = \omega_0/c$ – волновое число; $\xi = \alpha_0 z$ – оптическая толщина слоя вещества; $\alpha_0 = ik_0 \Delta n(\omega_0)$ – коэффициент усиления (по амплитуде) в центре спектральной линии с частотой ω_0 ; $g(\Omega) = ik_0 \alpha_0^{-1} \Delta n(\omega_0 + \Omega)$ – нормированный на единицу комплексный форм-фактор линии; $\Omega = \omega - \omega_0$ – отстройка частоты волны от ω_0 ; $\Omega_0 = \omega_1 - \omega_0$ – сдвиг частоты несущей; $A^{(0)}(t) \equiv A(0, t)$ – временная зависимость сигнала на границе слоя среды (т. е. при $z = 0$); комплексное время задержки сигнала $\tau(z)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \tau(z) &\equiv \tau_0 + \tau_r + i\tau_i, \quad \tau_0 \equiv \frac{z}{v_{ph}}, \quad v_{ph} \equiv \frac{c}{n_0}, \\ \tau_r &\equiv \xi \frac{\partial \operatorname{Im} g(\Omega_0)}{\partial \Omega_0}, \quad \tau_i \equiv -\xi \frac{\partial \operatorname{Re} g(\Omega_0)}{\partial \Omega_0}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) параметр τ_0 – вакуумное время задержки сигнала, которое всегда положительно. Параметр τ_r – дополнительное (по отношению к вакуумному) вещественное время задержки сигнала, которое может быть как положительным, так и отрицательным⁵. Если $\tau_r > 0$, то сигнал распространяется с досветовой групповой скоростью,

⁵ Именно это время можно считать длительностью дисперсионной задержки (в случае положительного τ_r) или опережения (в случае отрицательного τ_r). Вещественная часть времени задержки обычным образом ($\tau_0 + \tau_r = z/v_{gr}$) связана с вещественной групповой скоростью сигнала ($v_{gr} = (\partial \operatorname{Re} k(\omega)/\partial \omega)^{-1}$).

если $\tau_r < 0$, но $\tau_0 + \tau_r > 0$ – положительной сверхсветовой групповой скоростью, если $\tau_0 + \tau_r < 0$ – с отрицательной групповой скоростью. Параметр τ_i – мнимая часть времени задержки сигнала; как будет показано ниже, она описывает искажение сигнала за счет дисперсии показателя поглощения (или усиления) среды.

3. Сформулируем некоторые общие особенности искажения огибающей сигнала $A(t)$ за счет чисто мнимого временного сдвига, когда функция $A(t)$ заменяется на функцию $A_1(t) \equiv A(t - i\Delta)$, которая отличается от $A(t)$ только чисто мнимым временем задержки⁶ $i\Delta$.

Ограничимся случаем, когда исходный сигнал является амплитудно-модулированным (т. е. $A(t)$ – аналитическая функция, принимающая вещественные значения при вещественном аргументе t). Можно утверждать следующее:

а) Функция $A_1(t)$ не обязательно вещественна при вещественном аргументе t . Это означает, что амплитудно-модулированный сигнал, испытавший мнимый сдвиг, в общем случае приобретает и фазовую модуляцию.

б) Если функция $A(t)$ не имеет особенностей в полосе комплексной плоскости между прямыми $\operatorname{Im} t = 0$ и $\operatorname{Im} t = -\Delta$, а также достаточно быстро уменьшается при $t \rightarrow \infty$ в пределах этой полосы, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} A_1(t) dt,$$

т. е. площадь под огибающей сигнала⁷ сохраняется.

в) $A(t + i\Delta) = A^*(t - i\Delta)$, т. е. изменение знака мнимого сдвига приводит к замене огибающей на комплексно-сопряженную и не приводит к изменению огибающей интенсивности сигнала: $|A(t - i\Delta)|^2 = |A(t + i\Delta)|^2$.

г) $|A(t - i\Delta)|^2 = |A(t)|^2 + O(\Delta^2)$, т. е. при малом мнимом сдвиге искажение временной зависимости интенсивности амплитудно-модулированного сигнала является малой величиной более высокого порядка малости. Это означает, что искажение огибающей интенсивности в результате мнимого сдвига сначала незаметно, но затем резко нарастает.

д) Если $|A(t)|^2 = |A(-t)|^2$, т. е. если функция $A(t)$ является четной или нечетной относительно $t = 0$, то $|A_1(t)|^2 = |A_1(-t)|^2$, т. е. «сдвинутая» функция обладает теми же свойствами. Это означает, что в приближении комплексного времени задержки сигнала мнимая часть времени задержки характеризует только деформацию огибающей сигнала (мнимый сдвиг приводит лишь к искажению сигнала, но не к сдвигу или исчезновению центра его симметрии, если изначально этот центр у него был).

4. Ограничимся, как и в [2], случаем лоренцевского профиля спектральной линии усиления с шириной $\Delta\Omega_{1/2}$ и временем когерентности $\tau_{coh} \equiv 2/\Delta\Omega_{1/2}$. При этом

$$g(\Omega) = (1 - i2\Omega/\Delta\Omega_{1/2})^{-1}. \quad (4)$$

Рассмотрим (в отличие от [2]) распространение Ш-образного сигнала

⁶ В общем случае время задержки является комплексным. Смысл его вещественной части очевиден, поэтому сейчас мы обсуждаем только смысл его мнимой части.

⁷ Но не под временной зависимостью интенсивности. Даже если интенсивность является аналитической функцией, вследствие неаналитичности операции отыскания абсолютной величины комплексный сдвиг комплексной огибающей сигнала приводит не к тем последствиям, к которым ведет комплексный сдвиг огибающей интенсивности сигнала.

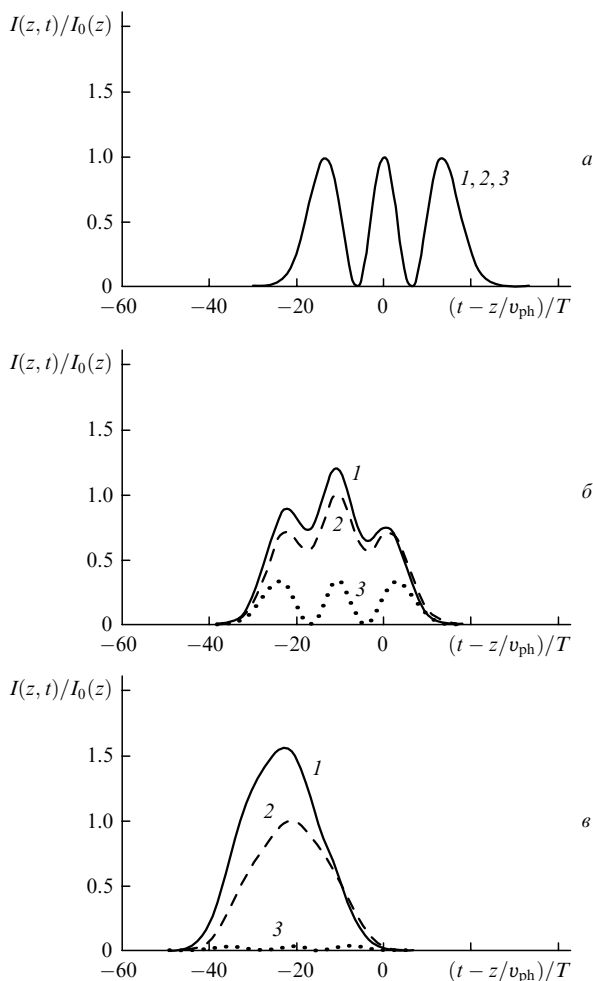


Рис.1. Деформация исходного Ш-образного сигнала (5) ($T = 10\tau_{\text{coh}}$, $x_0 = \Omega_0\tau_{\text{coh}} = 5$) при прохождении усиливающей среды для $\xi = 0$, $\tau = 0$ (а), $\xi = 300$, $\tau = (-10.651 + 4.438i)\tau_{\text{coh}}$ (б) и $\xi = 600$, $\tau = (-21.302 + 8.876i)\tau_{\text{coh}}$ (в). Кривые 1 – численный расчет, кривые 2 – расчет по формулам (2) и (3), кривые 3 – расчет по формуле (2) с дополнительным условием $\tau_i = 0$.

$$A^{(0)}(t) = \frac{5}{4} \exp\left[-\frac{(t-T)^2}{T^2}\right] - \frac{7}{4} \exp\left(-\frac{t^2}{T^2}\right) + \frac{5}{4} \exp\left[-\frac{(t+T)^2}{T^2}\right] \quad (5)$$

с характерной длительностью T . Этот сигнал представляет собой составленный из трех гауссовых функций «трезубец» (рис.1,а).

Воспользуемся теми же значениями параметров сигнала и протяженности трассы, что и в [2]⁸: длительность сигнала $T = 10\tau_{\text{coh}}$, нормированный на ширину спектральной линии сдвиг несущей относительно центра спектральной линии $x_0 = \Omega_0\tau_{\text{coh}} = 5$. Результаты расчетов временной зависимости интенсивности сигнала $I(z, t) \equiv |A(z, t)|^2$ при различной протяженности трассы ξ (и, следовательно, при различном комплексном времени задержки сигнала τ) показаны на рис.1. Расчеты проводились численно, а также в приближении комплексного времени задержки (т.е. с помощью аналитических фор-

мул (2), (3) и в приближении вещественной групповой скорости (т.е. с помощью формулы (2) с дополнительным условием $\tau_i = 0$). Для сопоставимости результатов, полученных при различной оптической толщине слоя, все они нормировались на вычисленную в приближении комплексного времени задержки интенсивность в середине сигнала⁹.

Из рассмотрения рис.1 (и его сопоставления с данными [2]) нетрудно сделать следующие выводы. При распространении сигнала в среде с дисперсией усиления действительно происходит искажение его первоначальной временной зависимости. Это искажение неплохо описывается в приближении комплексного времени задержки сигнала. Попытка игнорировать мнимую часть времени задержки приводит к результатам, весьма далеким от реальности не только для амплитуды (что не самое главное), но и для временной зависимости сигнала (что существенно хуже¹⁰). Искажение сигнала оказывается существенным тогда, когда мнимая часть времени задержки сравнима с длительностью сигнала. Так, например, в нашем случае для сигнала, прошедшего через слой вещества с оптической толщиной $\xi = 300$ ($\tau_i = 0.44T$) искажение существенно, но в форме сигнала еще можно угадать исходный «трезубец». При $\xi = 600$ ($\tau_i = 0.88T$) от «трезубца» не остается и следа и временная зависимость интенсивности сигнала напоминает гауссову.

Несмотря на искажение формы сигнала уже в первом порядке теории дисперсии, его временная зависимость продолжает сохранять исходную симметричную форму (разумеется, если есть что сохранять, как в нашем случае). При этом средняя точка сигнала перемещается в пространстве с вещественной групповой скоростью. При отрицательной вещественной групповой скорости средняя точка негауссова сигнала по-прежнему (как и для гауссова сигнала) появляется за слоем вещества раньше, чем перед ним, а при сверхсветовой групповой скорости время задержки по-прежнему оказывается меньше «светового» времени задержки.

Таким образом, в общем случае (при наличии дисперсии показателя поглощения на используемой частоте) при распространении сигнала в сильно диспергирующей среде происходит значительное искажение его формы из-за сложности времени задержки (или опережения) сигнала. Такое искажение отсутствует в случае специального выбора несущей частоты сигнала (например, в центре спектральной линии поглощения [1, 3] или посередине между двумя одинаковыми спектральными линиями усиления), а также в случае специального выбора формы сигнала (например, гауссовой¹¹).

⁹ Используемые нами значения оптической толщины соответствуют чрезвычайно большим коэффициентам усиления сигнала. В настоящей работе мы предполагаем, что эта проблема как-то решена, например путем введения неселективного или слабо селективного по частоте поглощения (дальнейшее обсуждение см. в [2]).

¹⁰ Или лучше – это как посмотреть. Действительно, искажение сигнала (в приближении комплексного времени задержки) сводится к сдвигу его комплексной огибающей в комплексной плоскости. Поэтому наблюдение искаженного таким образом сигнала можно рассматривать как экспериментальную реализацию операции аналитического продолжения функции с вещественной оси на комплексную плоскость. Такая возможность представляется интересной для систем обработки информации.

¹¹ С учетом этого обстоятельства выбор в работе [1] одновременно гауссова сигнала и центра линии поглощения можно рассматривать как двойную гарантию обеспечения стабильности формы сигнала при его распространении в сильно диспергирующей поглощающей среде.

⁸ Отметим, что при этих значениях параметров в работе [2] не отмечалось сколько-нибудь значительного искажения формы гауссова сигнала.

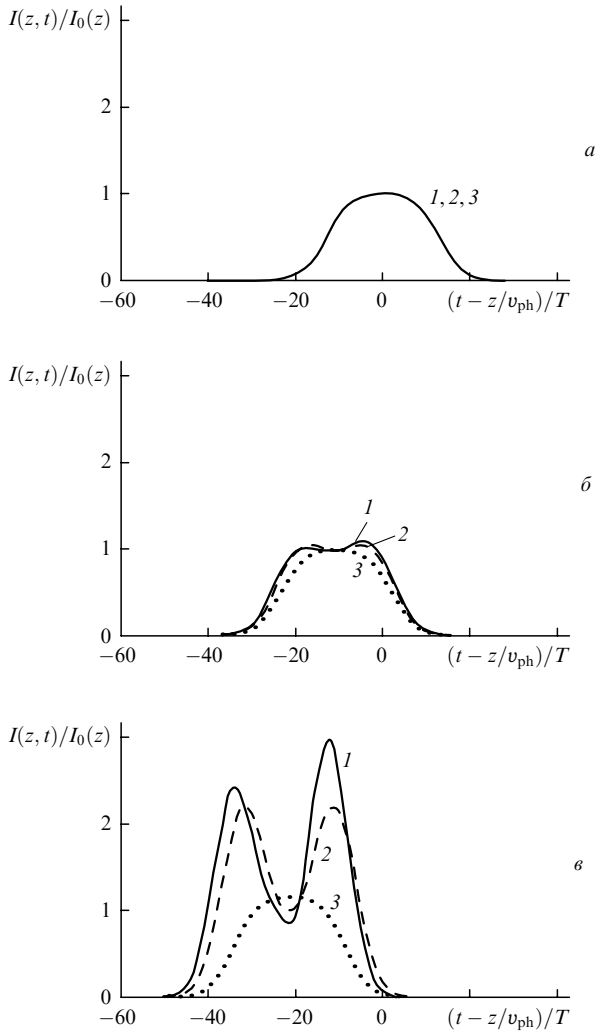


Рис.2. Деформация исходного колоколообразного сигнала (6) ($T = 10\tau_{\text{coh}}$, $x_0 = \Omega_0\tau_{\text{coh}} = 5$) при прохождении усиливающей среды для $\xi = 0$, $\tau = 0$ (а), $\xi = 300$, $\tau = (-10.651 + 4.438i)\tau_{\text{coh}}$ (б) и $\xi = 600$, $\tau = (-21.302 + 8.876i)\tau_{\text{coh}}$ (в). Обозначения кривых те же, что и на рис.1.

При рассмотрении рис.1 у читателя могло сложиться впечатление, что мнимая часть времени задержки вызывает искажение формы огибающей сигнала, качественно похожее на диффузию амплитуды во втором порядке классической теории дисперсии (т.е. «замывание» неоднородностей). Это не совсем так, поскольку мнимое время задержки сигнала может не только сглаживать имеющиеся, но и проявлять скрытые неоднородности. Последнее хорошо видно на рис.2, где приведены результаты расчета распространения сигнала

$$A^{(0)}(t) = \frac{5}{4} \exp \left[-\frac{(t-T)^2}{T^2} \right] + \exp \left(-\frac{t^2}{T^2} \right) + \frac{5}{4} \exp \left[-\frac{(t+T)^2}{T^2} \right] \quad (6)$$

в тех же условиях, что и для рис.1. Видно, что изображенная на рис.2 ситуация диаметрально противоположна изображенной на рис.1: исходный сигнал является колоколообразным, но по мере распространения становится U-образным.

Более того, искажение сигнала в рамках приближения комплексного времени задержки для некоторых типов сиг-

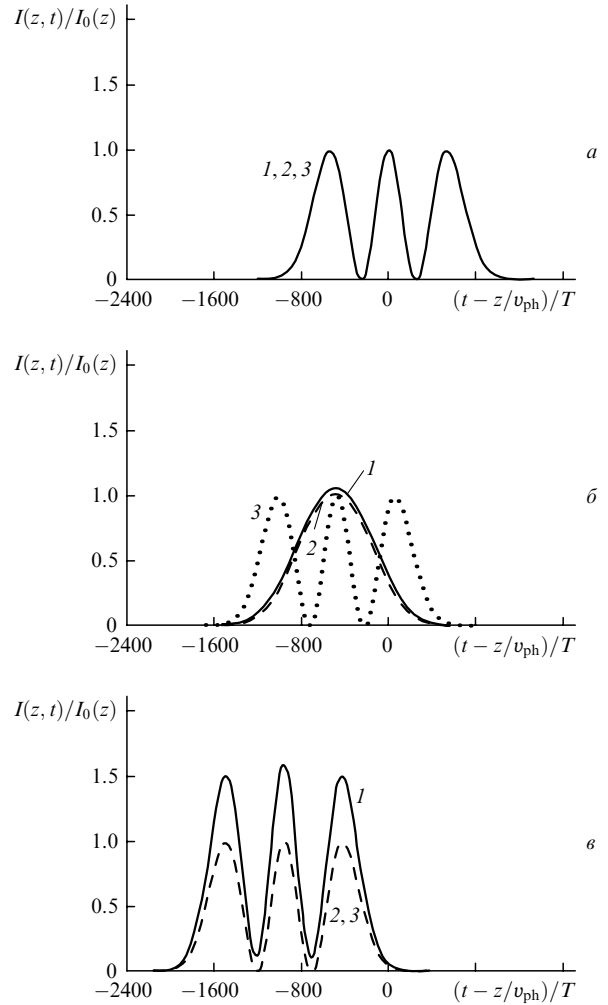


Рис.3. Деформация исходного U-образного сигнала (5) ($T = 400\tau_{\text{coh}}$, $x_0 = \Omega_0\tau_{\text{coh}} = 2$) при прохождении усиливающей среды для $\xi = 0$, $\tau = 0$ (а), $\xi = 4000$, $\tau = (-460 + 640i)\tau_{\text{coh}}$ (б) и $\xi = 8000$, $\tau = (960 + 1280i)\tau_{\text{coh}}$ (в). Обозначения те же, что и на рис.1,2. Кривая 3 дана в другом масштабе по сравнению с кривыми 1 и 2.

налов является возвратно-периодическим, т.е. с ростом длины трассы временная зависимость сигнала периодически возвращается к первоначальной. Эта ситуация иллюстрируется на рис.3 для сигнала (5). Обозначения на нем те же, что и на рис.1,2. Отметим, что кривая 3 на рис.3, рассчитанная в приближении вещественной групповой скорости, дана в другом масштабе¹² (для удобства сравнения временных зависимостей сигнала).

Видно, что исходный (см. рис.3,а) U-образный сигнал при длине трассы $\xi = 4000$ практически полностью «нормализуется», что не мешает ему при $\xi = 8000$ вновь приобрести U-образную форму. Ясно (см. (9)), что такое поведение сигнала в конечном счете связано с периодичностью экспоненты как функции мнимой части своего аргумента.

¹² На рис.1 и 2 все кривые нормированы на одну и ту же величину – интенсивность в середине сигнала, вычисленную в приближении комплексного времени задержки. На рис.3 так нормированы только зависимости, полученные численным счетом и в приближении комплексного времени задержки. Временная зависимость сигнала в приближении вещественной групповой скорости нормирована на свою собственную интенсивность в середине сигнала – иначе (см. рис.1 и 2) ее было бы трудно сравнивать с зависимостями, полученными в приближении комплексного времени задержки и численным счетом, из-за слишком большой разницы амплитуд.

5. Подведем итоги проведенного рассмотрения:

– Узкополосный негауссов сигнал при распространении в среде с сильной дисперсией усиления или поглощения значительно искажается. Такое искажение легко может быть учтено в приближении комплексного времени задержки. При этом вещественная часть времени задержки характеризует задержку (или опережение) сигнала, а мнимая часть – его искажение.

– Характер проявления одной и той же мнимой части времени задержки сигнала существенно зависит от формы его огибающей. В частности, амплитудно-модулированный сигнал, комплексная огибающая которого имеет центр симметрии, искажается, но продолжает оставаться симметричным, причем середина сигнала перемещается с вещественной групповой скоростью. Таким образом, вещественная групповая скорость (досветовая, сверхсветовая или отрицательная) в усиливающей или поглощающей диспергирующей среде сохраняет смысл скорости перемещения центра симметрии сигнала, который по мере распространения искажается, но остается симметричным.

– В приближении комплексного времени задержки гауссов волновой пакет (в отличие от негауссова) распространяется без изменения формы огибающей и длительности. Поэтому его распространение по некоторой трассе без искажений вовсе не гарантирует неискаженную передачу (по той же трассе) сигнала другой формы. Другими словами, скорость распространения гауссова сигнала (в том числе сверхсветовая и отрицательная) имеет самостоятельный смысл, заключающийся в том, что она может существовать даже тогда, когда говорить о групповой скорости перемещения сигнала с произвольной формой огибающей, строго говоря, нельзя.

Автор благодарен В.П.Макарову за полезные советы и замечания.

1. Акульшин А.М. и др. *Квантовая электроника*, **32** (7), 567 (2002).
2. Бухман Н.С. *Квантовая электроника*, **31** (9), 774 (2001).
3. Бухман Н.С. *ЖТФ*, **72** (1), 136 (2002).
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред* (М.: Наука, 1982).
5. Вайнштейн Л.А. *УФН*, **118** (2), 339 (1976).
6. Виноградова М.Б. и др. *Теория волн* (М.: Наука, 1979).