

Яркие и темные импульсы в оптических волокнах в окрестности длины волны нулевой дисперсии

И.А.Молотков, М.А.Бисярин

Изучено влияние дисперсии третьего порядка на распространение коротких импульсов в оптических волокнах. Описано возникновение связанных нелинейных структур, состоящих из темных и ярких солитонов огибающей. Установлен интервал длин волн в окрестности длины волны нулевой дисперсии, в пределах которого воздействие дисперсии третьего порядка на процесс распространения импульса оказывается определяющим. Показано, что в этом случае формируется нелинейная структура в виде встроеного солитона.

Ключевые слова: оптическое волокно, короткий оптический импульс, дисперсия, дисперсия третьего порядка, длина волны нулевой дисперсии, яркий солитон, темный солитон, встроенный солитон, нелинейное уравнение Шредингера, уравнение Кортевега–де Фриза.

1. Введение

Естественный способ минимизации уширения импульсов, обусловленного групповой дисперсией, состоит в использовании длин волн, для которых групповая дисперсия близка к нулю. В связи с этим поведение оптических импульсов в окрестности длины волны λ_0 нулевой групповой дисперсии (НГД) широко обсуждалось в литературе (см., напр., [1–8]), причем наибольшее внимание уделялось случаю аномальной дисперсии вещества световода. Однако если интенсивность излучения существенно ниже порога самофокусировки, то солитонный режим распространения в волокне возможен и при нормальной дисперсии среды [9]. Аналогичные вопросы для спиновых волн в магнетиках рассматривались в [10, 11].

Малость члена с групповой дисперсией заставляет при выводе уравнения для огибающей короткого импульса учитывать дисперсионный член следующего порядка. Соответствующее обобщенное нелинейное уравнение Шредингера (НУШ)

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} - \frac{1}{2} k'' \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} - \frac{i}{6} k''' \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \tau^3} + \frac{1}{2} \frac{\omega_0 n_2}{c} |\Phi|^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

(обозначения стандартные) легко может быть приведено к безразмерной форме:

$$i \frac{\partial u}{\partial x} - a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - ib \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 2|u|^2 u = 0. \quad (2)$$

В (2) будем полагать, что $a \geq 0$, $b \geq 0$. Неотрицательность коэффициента a соответствует средам с нормальной дисперсией. С другой стороны, принятый знак этого коэффициента обеспечивает отсутствие модуляционной неустойчивости [4].

Вблизи точки НГД $\lambda = \lambda_0$ коэффициенты a и b в уравнении (2) малы. При этом между ними возможны различные соотношения. При переходе от размерного уравнения (1) к безразмерному (2) естественно возникает конкуренция величин a и $b^{2/3}$, в связи с чем в дальнейшем целесообразно выделить две характерные области:

$$a > b^{2/3}, \quad (3)$$

и

$$a < b^{2/3}. \quad (4)$$

Выполнение неравенства (3) или (4) зависит от степени близости длины волны λ к длине волны НГД λ_0 . Используя оценки [1] и продолжая их, нетрудно показать, что для одномодового волокна величины a и $b^{2/3}$ равны при $\lambda \approx 0.55\lambda_0$. В случае

$$\lambda < 0.55\lambda_0 \quad (5)$$

имеем дело с неравенством (3). При

$$0.55\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 \quad (6)$$

– с неравенством (4). Наконец, при $\lambda > \lambda_0$ располагается не рассматриваемая нами зона аномальной дисперсии.

Решения уравнения (2) возможны не только для ярких, но и для темных солитонов. Влияние дисперсии третьего порядка и самообострения импульса на форму и параметры яркого солитона было исследовано в [12, 13].

Цель настоящей работы состоит в описании связанных нелинейных структур, для чего необходимо получить явные формулы для солитонов обоих типов в случае как (3), так и (4). Построение таких формул мы начнем с

М.А.Бисярин. Санкт-Петербургский государственный университет, Научно-исследовательский институт радиофизики, Россия, 198504 С.-Петербург, Петродворец; тел.: (812) 428 43 57; факс: (812) 428 72 89; e-mail: bisyarin@niirf.spbu.ru
И.А.Молотков. Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн, Россия, 42190 Московская обл., Троицк; тел.: (095) 330 82 43, факс: (095) 334 01 24; e-mail: imolotkov@mtu-net.ru

рассмотрения неравенства (3), а затем – (4). Этот случай требует принципиально иного анализа, поскольку в области (6) возможны лишь малоамплитудные импульсы.

2. Яркий и темный импульсы при $a > b^{2/3}$

Ищем решение уравнения (2) в виде комбинации решений для яркого (v) и темного (w) солитонов

$$u = e^{-i\Phi}(v + iw) \quad (7)$$

с фазой

$$\Phi = ct - dx, \quad (8)$$

где c и d – постоянные. Предполагаем, что искомые вещественные функции v и w зависят не от x и t в отдельности, а лишь от их комбинации

$$X = \alpha t - \beta x, \quad (9)$$

которую естественно называть амплитудной фазой (АФ).

Далее мы ищем сосредоточенные (локализованные) решения для v и w . Сосредоточенность решений означает, что они отличны от констант лишь в малых окрестностях некоторых точек или кривых. В данном случае речь идет о сосредоточенности функций v и w по переменной (9) в окрестности точки $X = 0$.

Переходя в (2) к дифференцированию по X (далее обозначается штрихом) и подставляя (7), получаем вещественную систему уравнений

$$(a + 3bc)\alpha^2 v'' + (d - ac^2 - bc^3)v - \beta w' + (2ac + 3bc^2)\alpha w' - b\alpha^3 w''' - 2(v^2 + w^2)v = 0, \quad (10)$$

$$(a + 3bc)\alpha^2 w'' + (d - ac^2 - bc^3)w + \beta v' - (2ac + 3bc^2)\alpha v' + b\alpha^3 v''' - 2(v^2 + w^2)w = 0, \quad (11)$$

где a и b – малые параметры, удовлетворяющие условию (3). Мы стремимся получить нетривиальное решение системы (10), (11) и одновременно наиболее полно учесть как нелинейность, так и дисперсию второго и третьего порядков. Представим коэффициенты b , α , β в виде заранее не известных степеней малого параметра a и положим, что отношение v/w также пропорционально некоторой степени a . Сравнивая порядки отдельных членов уравнений (10), (11), нетрудно установить, что единственная непротиворечивая возможность при решении указанной системы состоит в том, что при $a \rightarrow 0$

$$b \sim a^2, \quad v \sim wa^{1/2}, \quad \beta \sim a^{1/2}, \quad \alpha \sim a^{1/2}.$$

Тогда главные члены (11) образуют уравнение

$$w_0'' + 2w_0 - \frac{4}{d}w_0^3 = 0.$$

Оно имеет нечетное сосредоточенное решение

$$w_0 = \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \tanh X, \quad (12)$$

описывающее темный солитон.

Аналогично из уравнения (10) получаем

$$v_0 = \frac{3d}{4} \frac{b}{a^{3/2}} \frac{1}{\cosh^2 X}, \quad (13)$$

$$\alpha = \left(\frac{d}{2a}\right)^{1/2}, \quad \beta = \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \left(2ca^{1/2} + \frac{bd}{a^{3/2}}\right). \quad (14)$$

Формула (13) определяет вид яркого солитона.

Линеаризация уравнений (10) и (11) в окрестности найденных главных частей решений v_0 и w_0 ,

$$v = v_0 + av_1, \quad w = w_0 + aw_1,$$

приводит к паре линейных неоднородных уравнений для v_1 и w_1 . Из поправок v_1 и w_1 старшей является поправка w_1 . Для нее получаем следующее уравнение:

$$w_1'' + \left(\frac{6}{\cosh^2 X} - 4\right)w_1 = \frac{2c^2}{d} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \tanh X + \left(\frac{6bc}{a^2} + \frac{9b^2d}{4a^4}\right) \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{\sinh X}{\cosh^3 X} - \frac{63b^2d}{4a^4} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{\sinh X}{\cosh^5 X}. \quad (15)$$

Соответствующее (15) однородное уравнение имеет общее решение

$$w = c_1 \frac{1}{\cosh^2 X} + c_2 \left(\sinh 2X + 3 \tanh X + \frac{3X}{\cosh^2 X} \right),$$

в котором требованию сосредоточенности удовлетворяет лишь первое слагаемое. Поэтому для w_1 получаем следующее уравнение:

$$w_1 = c_1 \frac{1}{\cosh^2 X} - \frac{c^2}{2d} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \tanh X - \left(\frac{c^2}{2d} + \frac{3bc}{2a^2} + \frac{9b^2d}{4a^4}\right) \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{X}{\cosh^2 X} + \frac{21b^2d}{8a^4} \left(\frac{d}{2}\right)^{1/2} \frac{\sinh X}{\cosh^3 X}, \quad (16)$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Функция w_1 имеет четную и нечетную по X части. Четная часть $c_1 \cosh^{-2} X$ дает малую мнимую добавку к яркому импульсу, нечетная – определяет поправку к темному импульсу (12). Формулы (12) и (13) показывают, что в рассматриваемом случае (3) уровень возбуждения темного импульса в $a^{3/2}/b$ раз выше такого же уровня для яркого импульса. Более точно отношение амплитуд яркого и темного солитонов при $X = 0$ представляет собой некоторую функцию $g(\lambda)$, описывающую возбуждение примесного (яркого) солитона на фоне главного (темного). Используя формулы работы [1] для дисперсии второго и третьего порядков, нетрудно установить, что $g(\lambda) = 0.74 \times (\lambda_0/\lambda - 1)^{-3/2}$; зависимость $g(\lambda)$ представлена на рис.1. Движение обоих солитонов происходит синфазно с конечной фазовой скоростью. Скорость этих движений по амплитудной фазе гораздо выше и имеет порядок a^{-1} . Последнее следует из формулы

$$X = \left(\frac{d}{2a}\right)^{1/2} \left[t - \left(2ca + \frac{bd}{a}\right)x \right],$$

вытекающей из (9) и (14).

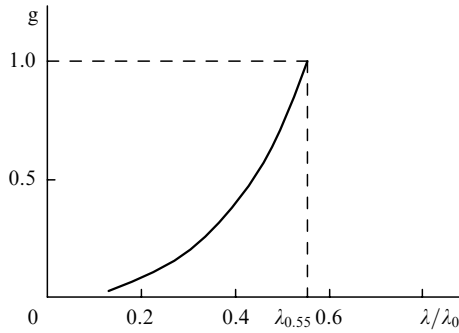


Рис.1. Коэффициент возбуждения яркого импульса на фоне темного в случае малой дисперсии третьего порядка.

В целом в рассматриваемом приближении построенное решение содержит произвольные коэффициенты c и d в (8) и последующих формулах, а также произвольную константу c_1 в (16).

3. Малоамплитудное приближение

Из рассмотрения системы уравнений (10) и (11) при условии (4), т.е. в непосредственной близости к точке НГД, следует, что теперь нет возможности выделить сосредоточенные решения типа (12) и (13). Исследования показывают, что для изучаемых импульсов в зоне (6) характерны весьма малые амплитуды.

Далее используем следующую подстановку (анзатц):

$$u = [u_0 + U(x, t)] \exp[2iu_0^2 x + i\varphi(x, t)], \quad (17)$$

где $u_0 = \text{const}$; ее вид соответствует точному решению НУШ. После подстановки (17) в (2) получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} - 2a \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a(u_0 + U) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + 3b \frac{\partial U}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 \\ - b \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} + 3b(u_0 + U) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0, \\ (u_0 + U) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + a \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - a(u_0 + U) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^2 - 4u_0^2 U \\ - 6u_0 U^2 - 2U^3 - 3b \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + b(u_0 + U) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)^3 \\ - 3b \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - b(u_0 + U) \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} = 0. \end{aligned}$$

Следующий шаг связан с введением дополнительного малого амплитудного параметра ε . Введем новые независимые переменные

$$\tau = \varepsilon(t - Cx), \quad \xi = \varepsilon^3 x, \quad C = \text{const} \quad (18)$$

и будем отыскивать амплитуду и фазу в виде рядов

$$\begin{aligned} U &= U_0(\tau, \xi)\varepsilon^2 + U_1(\tau, \xi)\varepsilon^4 + \dots, \\ \varphi &= \varphi_0(\tau, \xi)\varepsilon + \varphi_1(\tau, \xi)\varepsilon^3 + \dots \end{aligned}$$

Четность U и нечетность φ по ε легко подтверждаются при их подстановке в систему уравнений. В самом первом по ε порядке получаем

$$au_0 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} + CU_0 = 0,$$

$$C \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} + 4u_0 U_0 = 0.$$

Для совместности этой системы нужно положить

$$C = 2u_0 a^{1/2}. \quad (19)$$

При подстановке (19) в предыдущее уравнение получаем

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau} = -\frac{1}{a^{1/2}} U_0. \quad (20)$$

Уравнения следующего приближения имеют вид

$$a^{1/2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} + 2U_1 = \frac{1}{2u_0} \left[\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - 6U_0^2 + \left(\frac{2b}{a^{1/2}} + \frac{a}{u_0} \right) \frac{\partial^2 U_0}{\partial \tau^2} \right], \quad (21)$$

$$\begin{aligned} a^{1/2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial U_1}{\partial \tau} = \frac{1}{a^{1/2} u_0} \left[\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + \frac{12u_0 b}{a} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} \right. \\ \left. + 6a^{1/2} U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - b \frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} \right]. \quad (22) \end{aligned}$$

Продифференцировав (21) по τ и используя (20), получим новое условие совместности для уравнений (21), (22). Это условие представляет собой уравнение Кортевега – де Фриза (КдФ)

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi} + 6 \left(\frac{u_0 b}{a} + a^{1/2} \right) U_0 \frac{\partial U_0}{\partial \tau} - \left(b + \frac{a^{3/2}}{4u_0} \right) \frac{\partial^3 U_0}{\partial \tau^3} = 0. \quad (23)$$

Выписывая точное солитонное решение уравнения (23), возвращаясь к старым переменным (18) и учитывая (19), находим, что

$$U_0 = -12\beta^2 \cosh^{-2} Q,$$

где

$$Q = \varepsilon \beta B \left[t - 2u_0 a^{1/2} x + \frac{24}{a} (u_0 b + a^{3/2}) \beta^2 \varepsilon^2 x \right]; \quad (24)$$

$$B = \left(\frac{24u_0}{a} \frac{u_0 b + a^{3/2}}{4u_0 b + a^{3/2}} \right)^{1/2}; \quad (25)$$

β – произвольный параметр, содержащийся в решении уравнения КдФ. Главная часть фазы φ_0 находится согласно (20). Произвольный коэффициент β можно далее включить в малый параметр ε , который до сих пор также произволен. Наконец, разлагая в ряд фазовый множитель $\exp(i\varphi_0 \varepsilon)$, снова получаем структуру, подобную (7):

$$u = \exp(2iu_0^2 x)(v + iw), \quad (26)$$

$$v = u_0 \left[1 - \frac{12\varepsilon^2}{u_0 \cosh^2 Q} - \frac{288\varepsilon^2}{aB^2} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 Q} \right) + O(\varepsilon^3) \right], \quad (27)$$

$$w = \varepsilon u_0 \left[\frac{24}{a^{1/2} B} \tanh Q + O(\varepsilon^3) \right]. \quad (28)$$

Формула (26) является суммой выражений для яркого и темного солитонов (27), (28). Главные их отличия от соответствующих формул для случая (5) состоят в том, что теперь яркий солитон представляет собой главное слагаемое, а темный – поправку к нему, и что яркий солитон (27) находится на пьедестале высотой u_0 (u_0 произвольно).

Формулы (26)–(28) не связаны с предположением о малости коэффициентов уравнения (2). Они справедливы при условии (4) вплоть до границы $\lambda = 0.55\lambda_0$ области (6).

Наконец, при условии (4) формулы (24), (27) и (28) упрощаются:

$$Q = \varepsilon \left(\frac{6u_0}{a} \right)^{1/2} \left(t - 2u_0 a^{1/2} x + \frac{24u_0 b}{a} \varepsilon^2 x \right),$$

$$v = u_0 - \frac{12\varepsilon^2}{\cosh^2 Q} - 48\varepsilon^2 \tanh^2 Q,$$

$$w = 4\varepsilon(6u_0)^{1/2} \tanh Q.$$

Качественно зависимость амплитуд яркого и темного солитонов от фазовой переменной Q проиллюстрирована на рис.2.

Можно установить соотношения между параметром ε и коэффициентами уравнения (2). Так, в случае (4), вычисляя правые части уравнений (21) и (22) и оценивая поправку U_1 , получаем

$$\varepsilon^2 \leq 0.1 \frac{a^{3/2}}{b}. \quad (29)$$

Неравенство (29) уточняет условия, при которых может наблюдаться процесс распространения встроенного солитона на пьедестале фиксированной величины.

4. Заключение

Работа содержит аналитическое описание механизма влияния дисперсии третьего порядка на распространение короткого импульса в оптическом волокне. Динамика огибающей импульса описывается обобщенным НУШ (1), а рассматриваемый эффект выражается в изменении солитонного решения стандартного НУШ за счет члена с третьей производной. Основанные на результатах работы [1] оценки коэффициента при третьей производной показывают, что влиянием дисперсии третьего порядка не следует пренебрегать уже при длинах волн более 0.67 мкм, и по мере приближения к $\lambda_0 = 1.27$ мкм дисперсия третьего порядка становится все более и более существенной.

В зависимости от соотношения дисперсий второго и третьего порядков существенно по-разному происходит формирование примесной структуры. В случае (3), когда длина волны еще значительно отличается от длины волны нулевой дисперсии (5) и дисперсия третьего порядка может трактоваться как возмущающий эффект, на фоне темного солитона стандартного НУШ возникают яркий импульс с амплитудой порядка $b/a^{3/2}$, а также дополнительные темные и яркие импульсы меньших амплитуд.

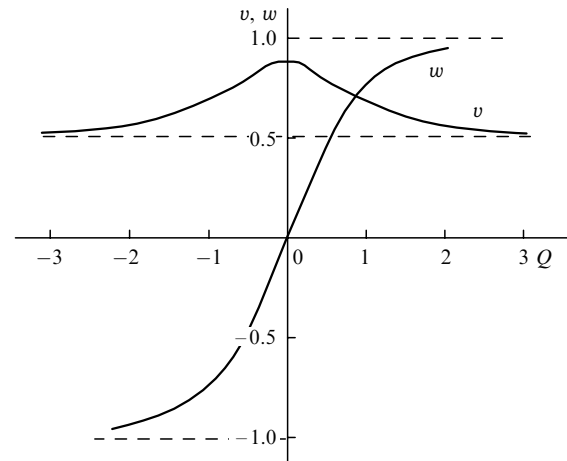


Рис.2. Яркий и темный импульсы в случае преобладания дисперсии третьего порядка. Вычисления проведены при $u_0 = 1$, $\varepsilon = 0.1$.

Искажения стандартного импульса представляются в явном виде формулами (13) и (16).

Качественно иной вид имеет нелинейная динамика огибающей короткого импульса вблизи длины волны нулевой дисперсии в случае (4). Под преобладающим влиянием дисперсии третьего порядка формируется нелинейная структура в виде встроенного солитона [14]. Отличительной особенностью этой структуры является то, что яркий солитонный импульс распространяется на пьедестале конечной высоты и подчиняется уравнению Кортевега–де Фриза. Его аналитическое выражение дается формулами (26)–(28), в частности он имеет значительно более крутые фронты по сравнению с солитоном НУШ. И в этом случае эволюция импульса также представляет собой распространение связанных между собой темного и яркого солитонов.

Авторы благодарны С.А.Дарманыану за полезные обсуждения. Работа была поддержана РФФИ (проект № 02-02-16046).

- Hasegawa A., Kodama Y. *Proc. IEEE Int. Soc. Opt. Eng.*, **69**, 1145 (1981)
- Агравал Г. *Нелинейная волоконная оптика* (М.: Мир, 1996).
- Kivshar Yu.S. *Opt. Lett.*, **17**, 1322 (1992).
- Abdullaev F.K., Darmanyan S.A., Bishoff S., Christiansen P.L., Sorensen M.P. *Opt. Commun.*, **108**, 60 (1994).
- Elgin J.N., Brabec T., Kelly S.M.J. *Opt. Commun.*, **114**, 321 (1995).
- Afanasjev V.V., Kivshar Yu.S., Menyuk C.R. *Opt. Lett.*, **21**, 1975 (1996).
- Kim W.-S., Moon H.-T. *Phys. Lett. A*, **266**, 364 (2000).
- Shagalov A.G. *Phys. Lett. A*, **239**, 41 (1998).
- Jain M., Tzoar N. *J. Appl. Phys.*, **49**, 4649 (1978).
- Калиникоз Б.А., Ковшиков Н.Г., Славин А.Н. *ЖЭТФ*, **94**, 159 (1988).
- Boardman A.D., Bontemps P., Wallis R.F., Xie K. *J. Magn. Magn. Mat.*, **210**, 403 (2002).
- Молотков И.А., Повлсен Й.Х., Манаенкова Н.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **41**, 1117 (1998).
- Молотков И.А., Вакуленко С.А., Бисярин М.А. *Нелинейные локализованные волновые процессы* (М.: Янус-К, 1999).
- Karpman V.I., Rasmussen J.J., Shagalov A.G. *Phys. Rev. E*, **64**, 026614 (2001).