

# Использование дробного фурье-преобразования в $\pi/2$ -конвертерах лазерных мод

А.А.Малютин

*Рассмотрена возможность использования дробного фурье-преобразования (ДФП) для реализации оптических схем астигматических  $\pi/2$ -конвертеров мод Эрмита–Гаусса в кольцевые моды Лагерра–Гаусса. Приводятся несколько схем конвертеров на основе ДФП полуцелого и иррационального порядков. Найден наименьший порядок, который может применяться в астигматическом конвертере мод. Проведено сравнение свойств конвертеров, использующих дробное и обыкновенное фурье-преобразования.*

**Ключевые слова:** дробное фурье-преобразование, астигматический  $\pi/2$ -конвертер, моды Эрмита–Гаусса и Лагерра–Гаусса.

## 1. Введение

Обе темы, объединенные в заголовке настоящей статьи, –  $\pi/2$ -конвертеры лазерных мод и дробное фурье-преобразование (ДФП) – в последнее десятилетие являются объектами активной разработки. Первая привлекает особое внимание из-за уникальных возможностей, обнаруженных при использовании кольцевых мод Лагерра–Гаусса (ЛГ) для манипуляций микрообъектами [1, 2], для захвата и управления движением отдельных атомов [3–5] и при ускорении электронов [6]. ДФП вызывает пристальный интерес благодаря новым перспективам, которые оно открывает для представления и анализа сигналов самого разного характера [7–9]. Возможность реализации ДФП оптическими методами [10], некоторые специфические свойства мод Эрмита–Гаусса (ЭГ) [11], так же как и новый подход к интерпретации механизма действия  $\pi/2$ -конвертеров [12, 13], – это те средства, которые указывают прямой путь к использованию ДФП для преобразования ЭГ-мод в ЛГ-моды. Впервые схема  $\pi/2$ -конвертера на основе ДФП приведена нами в работе [14]. В настоящей статье будет дан систематический анализ принципов построения подобных устройств.

## 2. Дробное фурье-преобразование

Для того чтобы пояснить терминологию и принятые обозначения без отсылки к многочисленным более детальным публикациям, напомним основные понятия ДФП и приведем три базовые схемы, разработанные для осуществления ДФП с помощью обыкновенных линз.

Классическое обыкновенное фурье-преобразование (ФП) определяется как\*

\*Здесь и ниже мы опускаем математические тонкости, касающиеся ограничений, накладываемых на функцию  $f(x)$ .

А.А.Малютин. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; тел.: (095)135 03 27, факс: (095)135 20 55, e-mail: amal@kapella.gpi.ru

Поступила в редакцию 21 апреля 2003 г.

$$F(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ix\xi) dx. \quad (1)$$

Интегральное соотношение (1) представляет собой преобразование функции  $f$  от времени  $t$  или пространственной координаты  $x$  в функцию от спектральных переменных – угловой частоты  $\omega$  или пространственной частоты  $\xi$ , что в символической форме можно записать в виде  $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$ . Можно показать, что в результате последовательного применения преобразования (1) получают выражения

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]] &= f(-x), \\ \mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]]] &= \mathcal{F}[f(-x)] = F(-\xi), \\ \mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[\mathcal{F}[f(x)]]]] &= f(x). \end{aligned} \quad (2)$$

Иначе говоря, обыкновенное ФП обладает цикличностью, равной четырем. В обозначениях, которые будут использоваться ниже, соотношения (1) и (2) удобно переписать как последовательность

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^1[f(x)] &= F(\xi), \quad \mathcal{F}^2[f(x)] = f(-x), \\ \mathcal{F}^3[f(x)] &= F(-\xi), \quad \mathcal{F}^4[f(x)] = f(x), \end{aligned} \quad (3)$$

т. е. число циклов ФП в (3) может рассматриваться как порядок (степень) обыкновенного ФП.

Подобно тому, как ФП более высоких порядков в (3) могут быть представлены в виде последовательности степеней  $\mathcal{F}^1$ , можно формально факторизовать и интеграл (1), т. е. разложить  $\mathcal{F}^1$  на два (или более) преобразования с порядками меньше единицы. Например,

$$F(\xi) = \mathcal{F}^1[f(x)] = \mathcal{F}^a[\mathcal{F}^b[f(x)]], \quad (4)$$

где  $\mathcal{F}^a$  и  $\mathcal{F}^b$  названы дробными ФП, а  $a, b$  являются порядками ДФП. Интегральная форма записи ДФП имеет вид

$$\mathcal{F}^a[f(x)] = \frac{\exp(i\psi/2)}{(i \sin \psi)^{1/2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp \left[ i\pi \frac{(x^2 + \xi^2) \cos \psi - 2\xi x}{\sin \psi} \right] dx, \quad (5)$$

где  $\psi = a\pi/2$ . Определенное ранее обыкновенное ФП (1) получается из (5) подстановкой  $a = 1$ . Соответственно при подстановке  $a = \pm 2$  будет получено первое из соотношений (2).

Существует несколько различных определений ДФП [15], включая определение, основанное на аналогии с описанием распространения оптического пучка по градиентному волокну [16]. Точно так же, как и для обыкновенного ФП, имеется несколько строго доказанных свойств и для ДФП [17]. Далее будут использоваться два из них – аддитивность и коммутативность:

$$\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = \mathcal{F}^{a+b}, \quad (6)$$

$$\mathcal{F}^a \mathcal{F}^b = \mathcal{F}^b \mathcal{F}^a. \quad (7)$$

Еще одно важное в нашем случае свойство ДФП состоит в том, что когда порядок  $a$  – иррациональное число, функция ЭГ является единственной функцией, которая может совпадать с собственным ДФП (быть собственной функцией) [18]:

$$\mathcal{F}^a \left[ \exp(-\pi x^2) H_n(x\sqrt{2\pi}) \right] = \exp\left(-i \frac{a\pi}{2}\right) \exp(-\pi \xi^2) H_n(\xi\sqrt{2\pi}), \quad (8)$$

где  $H_n$  – полином Эрмита  $n$ -го порядка, а комплексная экспонента – собственное значение ДФП. Таким образом, в применении к световым полям при действительном  $a$  распределения интенсивности исходного собственного ЭГ-пучка и его ДФП совпадают.

Формальная аналогия между обычным ФП и ДФП может быть распространена на плоскость, заданную декартовыми осями  $x, \xi$ , где переход от точки  $(x, \xi)$  к точке  $(x', \xi')$  дается оператором вращения  $\mathcal{R}_\psi$ :

$$\begin{pmatrix} x' \\ \xi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\psi \begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

На плоскости  $x\xi$  последовательность (3) при целых порядках  $a$  соответствует вращению на углы, кратные  $\pi/2$ . При иррациональных порядках  $a$  вращение осуществляется на произвольный угол  $\psi = a\pi/2$  (возможны также комплексные значения  $a$  [19, 20]).

Две простые линзовые оптические схемы I и II [10] для осуществления ДФП показаны на рис.1. Их  $ADCD$ -матрицами являются матрицы

$$T_{\text{FrFT}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & f \sin \psi \\ -f^{-1} \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где  $f$  – масштаб ДФП, выраженный в единицах длины. Стоит заметить, что комплексный аргумент в соотношении (8) есть просто накопленная фаза Гуи (НФГ)  $\theta$  пучка при его распространении по любой из схем I или II. Фаза  $\theta$  может быть найдена из соотношения [21]

$$\tan \theta = \frac{\lambda B}{(A + B\rho)\pi w^2} = \frac{\lambda f \sin \psi}{(\cos \psi + \rho f \sin \psi)\pi w^2}, \quad (11)$$

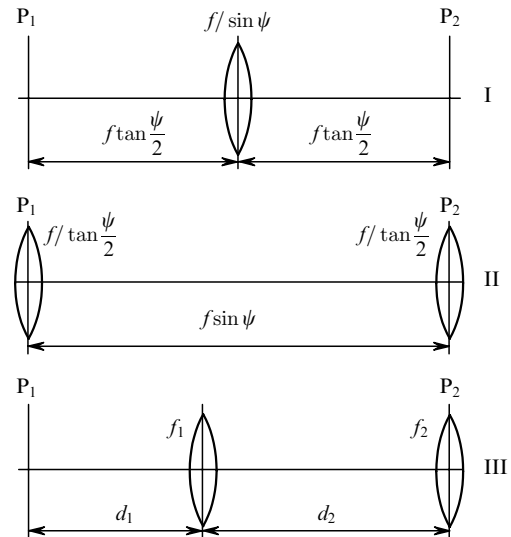


Рис.1. Оптические схемы элементарных дробных фурие-преобразователей, реализуемых с помощью линз.

где  $\rho$  и  $w$  – кривизна волнового фронта пучка и его характерный размер;  $\lambda$  – длина волны. Ясно, что ЭГ-мода будет собственным пучком дробных преобразователей, показанных на рис.1, только в том случае, если  $\rho \equiv 0$  и рэлеевская длина пучка совпадает с  $f$ .

С помощью асимметричной оптической схемы III, приведенной на рис.1, также можно осуществлять ДФП заданного порядка  $a \in (0, 1]$  ( $0 < \psi \leq \pi/2$ ). Для определения оптических параметров элементов схемы следует найти условия, при которых  $\theta$  в случае распространения пучка от входной опорной плоскости к выходной (или обратно) равно  $\psi$ . Поскольку накопления фазы Гуи не происходит при прохождении излучением линзы (для  $ABCD$ -матрицы линзы  $B \equiv 0$ ), то вторую линзу можно временно из рассмотрения исключить. Вследствие этого распространение пучка от плоскости  $P_1$  к  $P_2$  может быть описано матрицей

$$T'_{12} = \begin{pmatrix} 1 - d_2/f_1 & d_1 + d_2 - d_1 d_2/f_1 \\ -1/f_1 & 1 - d_1/f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}, \quad (12)$$

где  $f_1$  – фокусное расстояние (см. рис.1). Требуемое значение НФГ будет получено, если

$$A' = \cos \psi, \quad B' = f \sin \psi. \quad (13)$$

Из (13) следует, что для обеспечения  $d_2 \geq 0$  (распространение пучка в положительном направлении оси  $z$ ),  $f_1$  должно быть положительным, при этом необходимо выбрать

$$d_1 = f \tan \psi - \frac{f_1(1 - \cos \psi)}{\cos \psi}, \quad d_2 = f_1(1 - \cos \psi). \quad (14)$$

Условие  $d_1 \geq 0$  (отсутствие в плоскости  $P_1$  мнимого изображения) дает для  $f_1$  следующие граничные пределы:

$$0 < f_1 \leq \frac{f \sin \psi}{1 - \cos \psi} = \frac{f}{\tan(\psi/2)}. \quad (15)$$

Выполнения неравенства (15) совместно с (14) достаточно для получения  $\theta = \psi$  при распространении пучка от плоскости  $P_1$  к  $P_2$ . Чтобы получить то же значение  $\theta$  при

распространении пучка в обратном направлении, необходимо добавить в схему вторую линзу и положить для полной матрицы схемы  $C = -f^{-1} \sin \psi$ , что приводит к условию

$$f_2 = \frac{f_1 \cos \psi}{f_1 \sin \psi - f}, \quad (16)$$

где  $f_2$  – фокусное расстояние. Полагая  $f_1 = f / \sin \psi$  или  $f_1 = f / \tan(\psi/2)$  и рассчитав  $d_1$ ,  $d_2$  и  $f_2$ , легко показать, что симметричные схемы I и II – просто частные случаи схемы III.

Поскольку лазерные моды ЭГ являются функциями от разделяющихся независимых переменных, все сказанное выше может быть легко обобщено для двух поперечных пространственных координат. Более того, порядки как ФП, так и ДФП по осям  $x$  и  $y$  могут быть заданы независимо [22]. В результате мы имеем три основных «строительных» блока (рис.1), которые могут быть использованы для построения различных схем  $\pi/2$ -конвертеров мод.

### 3. Схемы $\pi/2$ -конвертеров мод на основе ДФП

В [12, 13] было показано, что версия астигматического  $\pi/2$ -конвертера мод, предложенная ранее в [23], представляет собой оптическую схему, в которой для пучка, распространяющегося вдоль оптической оси устройства  $z$ , выполняются два ( $a = 2$ ) и три ( $a + 1$ ) обыкновенных ФП соответственно в плоскостях  $xz$  и  $yz$ . На языке ФП принцип действия этого  $\pi/2$ -конвертера может быть описан следующим образом.

Любая собственная ЭГ-мода конвертера  $u_{nm}^{\text{HG}}$ , повернутая на входе в него на  $45^\circ$  относительно осей астигматизма («диагональная» мода), может быть разложена в ряд по «нормальным» (не повернутым) ЭГ-модам  $u_{n'm'}^{\text{HG}}(x, y)$  того же порядка  $N = n + m = n' + m'$ :

$$u_{nm}^{\text{HG}}(x, y, 45^\circ) = \sum_{n'm'} a_{n'm'}(45^\circ) u_{n'm'}^{\text{HG}}(x, y), \quad (17)$$

где  $a_{n'm'}(45^\circ)$  – некоторые действительные коэффициенты, зависящие от угла поворота. Каждая нормальная мода после распространения по конвертеру согласно (8) накапливает соответствующую фазу Гуи. Учитывая, что переменные  $x, y$  независимы, для схемы работы [23] можно записать

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_x^a [\mathcal{F}_x^{a+1} [u_{n'm'}^{\text{HG}}(x, y)]] \\ &= \exp\left(-i \frac{Na\pi}{2} - i \frac{m'\pi}{2}\right) u_{n'm'}^{\text{HG}}(x, y), \end{aligned} \quad (18)$$

что на выходе  $\pi/2$ -конвертера дает выражение для ЛГ-моды  $u_{pl}^{\text{LG}}$  порядка  $N = p + l$ :

$$\begin{aligned} & \exp\left(-i \frac{Na\pi}{2}\right) \sum_{n'm'} (-i)^{m'} a_{n'm'}(45^\circ) u_{n'm'}^{\text{HG}}(x, y) \\ &= \exp\left(-i \frac{Na\pi}{2}\right) u_{pl}^{\text{LG}}(x, y). \end{aligned} \quad (19)$$

Этот результат получается потому, что число ФП единого поля в плоскостях  $xz$  и  $yz$  отличается точно на

единицу. Отметим, что порядок  $a$  может быть произвольным, в том числе и дробным, поскольку он определяет только некоторый постоянный фазовый сдвиг  $Na\pi/2$ , одинаковый для всех членов разложения. Вследствие этого любые две элементарные схемы (см. рис.1), имеющие одинаковую оптическую длину и составленные из цилиндрических линз, при условии, что порядки ДФП в ортогональных плоскостях равны  $a$  и  $a + 1$ , являются  $\pi/2$ -конвертерами. Разумеется, масштаб по осям при этом удобно выбрать одинаковым. Это суть главные и наиболее общие рецепты для конструирования  $\pi/2$ -конвертеров. Ясно, что при использовании аддитивности и коммутативности ДФП (см. (6) и (7)), конечная цель может быть достигнута разными способами. Для демонстрации простоты и гибкости процедуры компоновки конвертеров на основе ДФП рассмотрим несколько примеров.

*Пример 1.* Сначала возьмем в качестве базовых схемы I и II, приведенные на рис.1. Предположим, что оптическая сила линз схемы I равна нулю в плоскости  $yz$  (образующие цилиндрических линз параллельны оси  $y$ ) и  $\psi_x = a\pi/2$ . Тогда для линз схемы II с параллельными оси  $x$  образующими имеем  $\psi_y = (a + 1)\pi/2$ . Будучи скомпонованы воедино, схемы I и II должны иметь одинаковую оптическую длину  $L$ . Это означает необходимость выполнения равенства

$$2f \tan \frac{\psi_x}{2} = f \sin \psi_y,$$

что при использовании соотношения между  $\psi_x$  и  $\psi_y$  дает

$$2f \tan \frac{\psi_x}{2} = f \cos \psi_x.$$

Решение данного тригонометрического уравнения сводится к решению кубического алгебраического уравнения, но поскольку в конечном виде результат получается несколько громоздким, приводим только округленные значения:  $a = 0.458013$ ,  $\psi_x = 0.719445$  и  $L = 0.752172f$ . Соответствующая этому примеру схема дана на рис.2,а.

Из приведенного примера ясно, что основной задачей при построении схем конвертеров является согласование оптических длин при одновременном ограничении на порядок числа выполняемых ДФП, поэтому следующие примеры дадим с минимальными комментариями.

*Пример 2.* Комбинирование схемы I самой с собой не приводит к созданию конвертера, но это возможно для схемы II. В последнем случае схема описывается уравнением

$$f \sin \psi_x = f \sin \psi_y = f \sin(\psi_x + \pi/2),$$

решение которого дает очень простой результат:  $a = 1/2$ ,  $\psi_x = \pi/4 = 0.785398$ ,  $L = 0.707107f$ .

*Пример 3.* Скомбинируем теперь две последовательно установленные идентичные схемы I в плоскости  $xz$  и одну схему II в плоскости  $yz$  (рис.2,б). Это можно сделать в силу свойства аддитивности ДФП (6). Тогда для каждой элементарной схемы I порядок ДФП  $a' = a/2$ , и она описывается уравнением

$$4 \tan \frac{\psi_x}{4} = \sin\left(\psi_x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Его решение имеет следующий вид:  $a = 0.467335$ ,  $\psi_x = 0.734088$ ,  $L = 0.742442f$ .

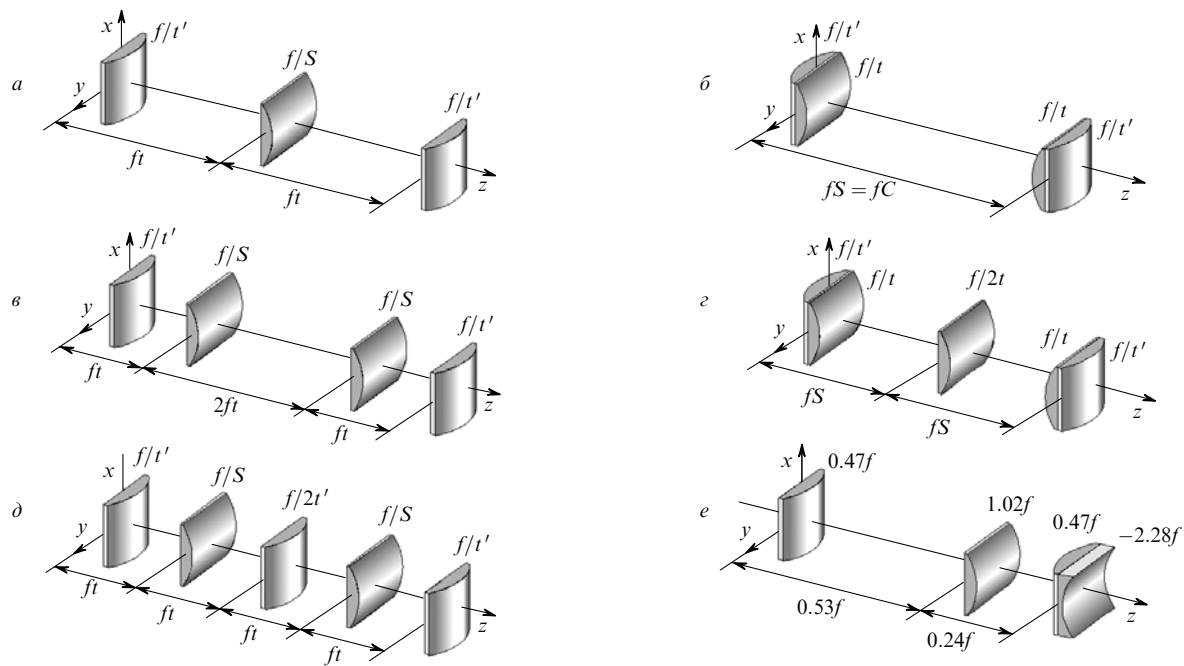


Рис.2. Варианты использования ДФП при построении  $\pi/2$ -конвертеров мод ЭГ в моды ЛГ. Параметры оптических схем:  $S = \sin \psi_x$ ,  $t = \tan(\psi_x/2)$ ,  $t' = \tan(\psi_x/2 + \pi/4)$  (а),  $S = \sin(\pi/4)$ ,  $t = \tan(\pi/8)$ ,  $t' = \tan(3\pi/8)$  (б),  $S = \sin(\psi_x/2)$ ,  $t = \tan(\psi_x/4)$ ,  $t' = \tan(\psi_x/2 + \pi/4)$  (в),  $S = \sin(\psi_x/2)$ ,  $t = \tan(\psi_x/4)$ ,  $t' = \tan(\psi_x/2 + \pi/4)$  (г),  $S = \sin(\psi_x/2)$ ,  $t = \tan(\psi_x/4)$ ,  $t' = \tan(\psi_x/4 + \pi/8)$  (д).

Очевидно, что вместо идентичных схем I можно было бы использовать схемы с различающимися порядками  $a'$  и  $a''$ , такими, что  $a' + a'' = a$ . В этом случае следует найти решение уравнения

$$2 \left( \tan \frac{\psi'_x}{2} + \tan \frac{\psi''_x}{2} \right) = \sin \left( \psi_x + \frac{\pi}{2} \right),$$

где один из углов в левой части в некоторых пределах может быть выбран произвольно (оба тангенса должны быть положительными). Ясно также, что в силу коммутативности ДФП (7) схемы, соответствующие ДФП с порядками  $a'$  и  $a''$ , могут быть установлены друг за другом на оси  $z$  в любой последовательности.

**Пример 4.** В примере 2 использовались две схемы II с ортогональной ориентацией линз. Возьмем теперь две последовательно установленные схемы II в одной плоскости и одну схему II в другой плоскости (рис.2,з). Условие согласования оптических длин дает уравнение

$$2 \sin \frac{\psi_x}{2} = \sin \left( \psi_x + \frac{\pi}{2} \right),$$

решение которого имеет следующий вид:  $a = 0.477127$ ,  $\psi_x = 0.749469$ ,  $L = 0.888318f$ .

Для всех других сочетаний схем I и II, включая те, в которых используется ФП целочисленного порядка, требуется либо большее число линз, либо большая оптическая длина. Одна из таких схем рассмотрена в следующем примере.

**Пример 5.** Комбинация двух схем I с двумя схемами II (рис.2,д) описывается уравнением

$$4 \tan \frac{\psi_x}{4} = 2 \sin \left( \frac{\psi_x}{2} + \frac{\pi}{4} \right).$$

Оно удовлетворяется при  $a = 1.171433$ ,  $\psi_x = 1.840083$ ,

$L = 1.9819f$ . Эти параметры примерно вдвое больше, чем для любого из предшествующих примеров.

Все схемы, приведенные выше, являются лишь частным случаем комбинаций, которые могут быть получены с использованием элементарной схемы III. В этих схемах используется не более трех цилиндрических линз с разными фокусными расстояниями. При этом линзы с фокусным расстоянием  $f/(2t')$ , примененные в схемах рис.2,з, д, могут быть заменены парами линз с фокусным расстоянием  $f/t'$ . Несомненно, что схемы примеров 1 и 2 с практической точки зрения более приемлемы, т. к. они имеют меньшие размеры и в них используется меньшее число линз. Тем не менее полезно рассмотреть более общий случай построения  $\pi/2$ -конвертера на основе схемы III. Для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} d_{1x} &= f \tan \psi_x - f_{1x} \frac{1 - \cos \psi_x}{\cos \psi_x}, \\ d_{2x} &= f_{1x} (1 - \cos \psi_x), \\ f_{2x} &= \frac{f_{1x} \cos \psi_x}{f_{1x} \sin \psi_x - f}, \\ d_{1y} &= f \tan \psi_y - f_{1y} \frac{1 - \cos \psi_y}{\cos \psi_y}, \\ d_{2y} &= f_{1y} (1 - \cos \psi_y), \\ f_{2y} &= \frac{f_{1y} \cos \psi_y}{f_{1y} \sin \psi_y - f}, \\ \psi_y &= \psi_x + \pi/2, \\ d_{1x} + d_{2x} &= d_{1y} + d_{2y}, \end{aligned} \tag{20}$$

при условии, что

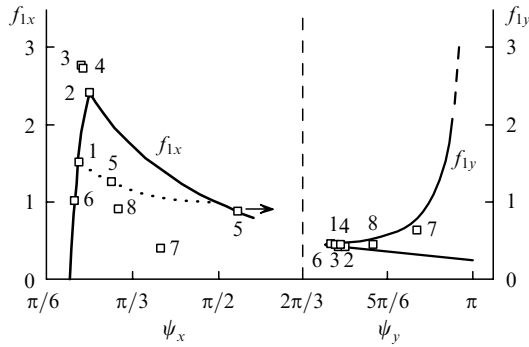


Рис.3. Допустимые области значений параметров оптических схем  $\pi/2$ -конвертеров на основе ДФП. Точками отмечены значения  $f_{1x}(\psi_x)$  и  $f_{1y}(\psi_y)$  для схем рис.2; номера точек 1–6 соответствуют номерам примеров в тексте, номера 7, 8 – некоторым достаточно произвольным конвертерам, составленным из схем III.

$$0 < f_{1x} \leq \frac{f \sin \psi_x}{1 - \cos \psi_x}, \quad 0 < f_{1y} \leq \frac{f \sin \psi_y}{1 - \cos \psi_y}.$$

Выбирая значение  $\psi_x$  заранее, имеем восемь уравнений с девятью неизвестными. Используя  $f_{1x}$  в качестве свободного параметра, получаем, что система уравнений будет совместной, если  $f_{1y}$  найдено из условия

$$f_{1y} = \frac{f - f_{1x} \sin \psi_x (1 - \cos \psi_x)^2}{\cos \psi_x (1 + \sin \psi_x)^2}. \quad (21)$$

При этом на  $f_{1x}$  наложено ограничение

$$0 < f_{1x} \leq f \min \left\{ \frac{\sin \psi_x}{1 - \cos \psi_x}; \frac{\sin \psi_x - \cos \psi_x^2}{(1 - \cos \psi_x)^2} \right\}. \quad (22)$$

Границы для  $f_{1x}$  показаны на рис.3 слева. Соответствующие границы для  $f_{1y}$ , получающиеся при подстановке (22) в (21) даны на рис.3 справа. Используя (20)–(22), приведем еще один пример схемы  $\pi/2$ -конвертера.

*Пример 6.* Возьмем комбинацию схемы III со схемой II. Последняя позволяет минимизировать число различных линз. При этом используемая схема II есть схема III, для которой дополнительно выполнено условие  $d_{1y} = 0$ , или, что то же самое,  $f_{1y} = f_{2y}$ . Комбинированная схема и ее параметры приведены на рис.2,е.

Параметры  $\pi/2$ -конвертеров, рассмотренные в примерах, сведены в табл.1. Наименьшую длину имеет конвертер во втором примере:  $L = 0.707107f$ , что приблизительно в 5.7 раз меньше длины конвертера из работы [23].

Ограничения, накладываемые неравенством (22), указывают на то, что невозможно сконструировать  $\pi/2$ -кон-

Табл.1.

| Номер примера | Базовые схемы* | Наименьший порядок ДФП | Полное число линз | Число различных линз | $L/f$    |
|---------------|----------------|------------------------|-------------------|----------------------|----------|
| 1             | I + II         | 0.458013               | 3                 | 2                    | 0.752172 |
| 2             | II + II        | 0.5                    | 4                 | 2                    | 0.707107 |
| 3             | 2I + II        | 0.467335               | 4                 | 2                    | 0.742442 |
| 4             | 2II + II       | 0.477127               | 5                 | 3 или 2**            | 0.888318 |
| 5             | 2I + 2II       | 1.171433               | 5                 | 3 или 2**            | 1.981899 |
| 6             | 2III + II      | 0.444444               | 4                 | 3                    | 0.766044 |

\* Обозначения схем соответствуют рис.1.

\*\* Число различных линз может быть уменьшено за счет комбинирования двух идентичных линз.

вертер на основе ДФП с порядком  $a < 0.424121$ , т. е. при  $\psi_x \geq 0.666239$ . При этом верхний предел в (22) соответствует условию  $f_{1x} = f_{2x}$  (схема II). Кривая, приведенная на рис.3 пунктиром, дает ограничения для использования схемы I в составе конвертера: схема I может быть применена только при условии  $\pi/2 \geq \psi_x \geq 0.719445$ . Нижний предел для  $\psi_x$  в этом неравенстве точно соответствует схеме примера 1. Значения  $f_{1x}(\psi_x)$  и  $f_{1y}(\psi_y)$  для этой и остальных рассмотренных схем показаны точками на рис.3; номера точек соответствуют номерам примеров. Заметим, что точки  $f_{1x}(\psi_x)$  для примеров 3 и 4 не находятся в пределах, заданных соотношением (22), поскольку соответствующие схемы составлены из пар элементарных схем I и II, в то время как неравенство (22) получено для простого попарного сочетания схем I, II и III. По этой же причине абсциссы точек для схемы примера 5 отстоят друг от друга лишь на  $\pi/4$ , поскольку данная схема составлена из последовательности двух одинаковых конвертеров, которые можно назвать  $\pi/4$ -конвертерами.

#### 4. Некоторые свойства $\pi/2$ -конвертеров на основе ДФП

Методы матричной ABCD-оптики позволяют проанализировать работу  $\pi/2$ -конвертера при всевозможных отклонениях входного пучка от собственного пучка системы, а также провести сравнение конвертеров на основе обыкновенного и дробного ФП. Так, с учетом вида матриц (10) и условия  $\psi_y = \psi_x + \pi/2$  для входного пучка, радиус и кривизна волнового фронта которого заданы как  $w_{x\text{in}} = w_0 M_x$ ,  $w_{y\text{in}} = w_0 M_y$  ( $w_0 = (\lambda f/\pi)^{1/2}$  – размер собственного пучка конвертера) и  $\rho_{x\text{in}} = \rho_{y\text{in}} = \rho$  соответственно, на выходе конвертера имеем

$$\begin{aligned} w_x &= w_0 \frac{[M_x^4(f\rho S + C)^2 + S^2]^{1/2}}{M_x}, \\ w_y &= w_0 \frac{[M_y^4(f\rho C - S)^2 + C^2]^{1/2}}{M_y}, \\ \rho_x &= \frac{1}{f} \frac{M_x^4(f\rho S + C)(f\rho C - S) + CS}{M_x^4(f\rho S + C)^2 + S^2}, \\ \rho_y &= \frac{1}{f} \frac{M_y^4(S - f\rho C)(f\rho S + C) - CS}{M_y^4(f\rho C - S)^2 + C^2}, \\ \tan \theta_x &= \frac{S}{(f\rho S + C)M_x^2}, \quad \tan \theta_y = \frac{C}{(f\rho C - S)M_y^2}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $C = \cos \psi_x$ ;  $S = \sin \psi_x$ . Главным условием преобразования несобственной ЭГ-моды в ЛГ-моду является равенство  $\theta_x - \theta_y = \pm \pi/2$ , откуда с учетом (23) получаем уравнение

$$(\rho_{\text{in}} f)^2 + \frac{2\rho_{\text{in}} f}{\tan 2\psi_x} - \frac{M_x^2 M_y^2 - 1}{M_x^2 M_y^2} = 0, \quad (24)$$

которое имеет вещественные корни при  $M_x M_y \geq \sin 2\psi_x$ .

Из уравнений (23) и (24) можно сделать следующие выводы:

– В частном случае, при  $M_x M_y = 1$  и  $\rho = 0$ , все конвертеры на основе обыкновенного или дробного ФП

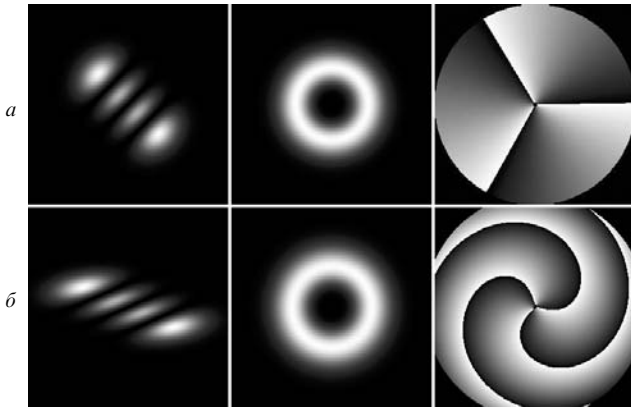


Рис.4. Преобразование собственной (а) и деформированной (растяжение  $M_x = 1.5$ , сжатие  $M_y = 1/1.5$ ) (б) моды  $u_{03}^{HG}$  в моду  $u_{03}^{LG}$   $\pi/2$ -конвертером на основе ДФП порядка  $a = 1/2$ . Первая колонка – пучок на входе в конвертер, вторая и третья – распределение интенсивности и волновой фронт на его выходе.

преобразуют ЭГ-моду в ЛГ-моду одинаковым образом, поскольку всегда разность НФГ  $\Delta\theta = \pi/2$  и  $w_{x,out} = w_{y,out}$ ,  $\rho_{x,out} = \rho_{y,out}$ . Различие только в масштабе увеличения (или уменьшения) размера входного пучка и абсолютном значении кривизны волнового фронта на выходе из конвертера. При этом для любого  $\psi_x$  можно подобрать такие  $M_x$  и  $M_y = 1/M_x$  (помимо очевидного  $M_{x,y} = 1$ ), что  $w_{x,out} = w_{y,out} = w_0$ . Исключение не составляет и случай конвертера на основе обыкновенного ФП, когда  $\psi_x = \pi/2$ , хотя с приближением  $\psi_x$  к этому значению  $M_x \rightarrow \infty$ ,  $M_y \rightarrow 0$  (или наоборот). Входное (ЭГ-мода с  $n = 0$ ,  $m = 3$ ) и выходное (ЛГ-мода с  $p = 0$ ,  $l = 3$ ) распределения излучения для случаев преобразования собственного и деформированного ( $M_x = 1.5$ ,  $M_y = 1/M_x$ ) пучков конвертером на основе ДФП (см. схему на рис.2,б) показаны на рис.4. В случае собственной моды (рис.4,а) размеры и волновые фронты пучков на входе и выходе конвертера совпадают. Для несобственной (деформированной) моды (рис.4,б) имеем на выходе размер пучка

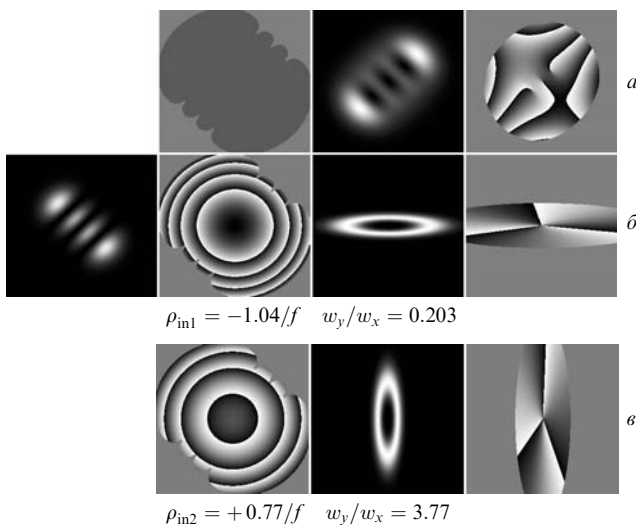


Рис.5. Преобразование несобственного пучка (мода  $u_{03}^{HG}$  при  $M_{x,y} = M = 1.5$ ) конвертером на основе ДФП порядка  $a = 0.458013$ : без коррекции волнового фронта (а) и с его коррекцией путем добавления отрицательной (б) и положительной (в) кривизны. Первая и третья колонки – распределения интенсивностей пучков на входе и выходе, вторая и четвертая – их соответствующие волновые фронты.

$w_{x,y} = 1.16w_0$  и кривизну волнового фронта (дана на серой шкале с линейным перепадом от 0 до  $2\pi$ )  $\rho_{x,y} = -0.67/f$ .

– Если  $M_x = M_y = M \neq 1$ , то для любого  $\psi_x$  и  $M > (2SC)^{1/2}$  из (24) можно найти два значения кривизны входного пучка  $\rho_{in1, in2}$ , при которых  $\Delta\theta = \pi/2$ . При этом  $\rho_x = \rho_y = 0$ ,  $w_{x,y} \neq w_0$  и  $w_x w_y = 1$ . В случае конвертера с полувельным порядком ДФП ( $a = 1/2$ , пример 2 из разд.3) имеем  $\rho_{in1} = -\rho_{in2}$ . Для порядков ДФП, отличных от полувельных, необходимые значения кривизны волнового фронта  $\rho_{in1, in2}$  различаются по абсолютной величине (рис.5). Для конвертеров на основе обыкновенного ФП ( $a = 2$  [23] или  $a = 1$  [12]) преобразование пучка в ЛГ-моду с  $\rho_x = \rho_y = 0$  возможно только при  $\rho_{in} = 0$  или при наличии седлообразного волнового фронта на входе конвертера [13]. Как в последнем случае, так и для конвертера на основе ДФП, ЭГ-мода преобразуется в эллиптическую ЛГ-моду.

В целом сравнение конвертеров на основе обыкновенного и дробного ФП показывает, что последние обладают более высокой чувствительностью к отклонениям параметров входного пучка от параметров собственного пучка. Так, при случайной одновременной вариации параметров  $w_{x,y}$  и  $\rho$  входного пучка, как следует из расчетов, результаты которых даны на рис.6, разброс размеров, кривизны волнового фронта пучка и разностей НФГ на выходе конвертеров при порядке ФП  $a = 1$  (рис.6,а)

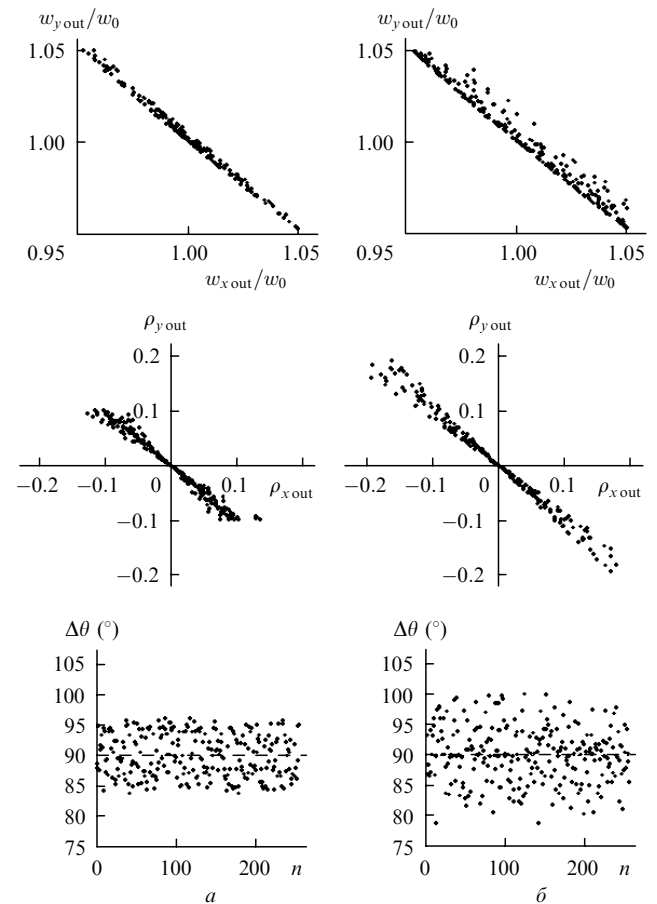


Рис.6. Рассчитанный разброс размеров, кривизны волнового фронта пучка и разностей НФГ на выходе конвертеров на основе обыкновенного (а) и дробного (порядок  $a = 1/2$ ) ФП (б). Для пучка на входе размер и кривизна волнового фронта находятся в следующих пределах:  $M_{x,y} \in [0.9, 1.1]$ ,  $\rho_{x,in,y,in} \in [-0.1, +0.1]$ . Число одновременных случайных вариаций равно 256;  $n$  – номер вариации.

оказывается относительно меньше, чем при  $a = 1/2$  (рис.6,б).

## 5. Заключение

Мы рассмотрели возможность использования ДФП для реализации оптических схем астигматических  $\pi/2$ -конвертеров мод ЭГ в кольцевые моды ЛГ и привели ряд схем конвертеров на основе ДФП полуцелого и иррационального порядков. Установлено, что существует ДФП с наименьшим порядком ( $a = 0.424121$ ), которое может применяться для получения разности НФГ в ортогональных плоскостях  $xz$  и  $yz$ , равной  $\pi/2$ . Расчет показывает, что по отношению к возмущениям входного пучка (отклонениям от параметров собственной моды), схемы  $\pi/2$ -конвертеров, в которых используются дробное и обыкновенное ФП, в целом обладают схожими свойствами. Однако схемы конвертеров на основе ДФП оказываются более чувствительными к одновременным случайным вариациям (размера и кривизны волнового фронта) входного излучения. Хотя разница в чувствительности, по-видимому, не столь велика, в некоторых случаях она может оказаться полезной. Во всяком случае применение ДФП полуцелого порядка ( $a = 1/2$ ) позволяет реализовать астигматический  $\pi/2$ -конвертер с оптической длиной менее  $1/5$  длины схемы конвертера [23].

Настоящая работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17718).

1. O'Neil A.T., Courtial J. *Opt. Commun.*, **193**, 45 (2001).
2. MacDonald M.P., Paterson L., Armstrong G., Arlt J., Bryant P.E., Sibbett W., Dholakia K. *Tech. Dig. Intern. Conf. on Advanced Laser Technologies (ALT-02)* (Adelboden, Switzerland, 2002. p. 26).
3. Kuga T., Torii Y., Shiokawa N., Hirano T., Shimizu Y., Sasada H. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 4713 (1997).
4. Wright E.M., Arlt J., Dholakia K. *Phys. Rev. A*, **63**, 013608 (2001).
5. Rhodes D.P., Lancaster G.P.T., Livesey J., McGloin D., Arlt J., Dholakia K. *Opt. Commun.*, **214**, 247 (2002).
6. Varin C., Piche M. *Appl. Phys. B*, **74**, S83 (2002).
7. Ozaktas H.M., Mendlovic D. *Opt. Lett.*, **19**, 1678 (1994).
8. Alieva T., Bastiaans M.J. *Opt. Lett.*, **24**, 1206 (1999).
9. Wei H., Xue X. *Opt. Lett.*, **26**, 1746 (2001).
10. Lohmann A.W. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 2181 (1993).
11. Bultheel A., Martinez H. *Katholieke Universiteit Leuven, Report TW337* (April 2002).
12. Malyutin A.A. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng*, **4900**, 908 (2002).
13. Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **33**, 235 (2003).
14. Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **33**, 1015 (2003).
15. Ozaktas H.M., Zalevsky Z., Kutay M.A. *The Fractional Fourier Transform* (Chichester: Wiley, 2001).
16. Ozaktas H.M., Mendlovic D. *Opt. Commun.*, **101**, 163 (1993).
17. Alieva T., Bastiaans M.J., Calvo M.L. *Recent Research Developments in Optics*, **1**, 105 (2001).
18. James D.F.V., Agarwal G.S. *Opt. Commun.*, **126**, 207 (1996).
19. Shih Ch.-Ch. *Opt. Lett.*, **20**, 1178 (1995).
20. Wang C., Lu B. *Opt. Commun.*, **203**, 61 (2002).
21. Erden M.F., Ozaktas H.M. *J. Opt. Soc. Am. A*, **14**, 2190 (1997).
22. Sahin A., Ozaktas H.M., Mendlovic D. *Opt. Commun.*, **120**, 134 (1995).
23. Beijersbergen M.W., Allen L., van der Veen H.E.L.O., Woerdman J.P. *Opt. Commun.*, **96**, 123 (1993).