

О влиянии эллиптичности сильного поля накачки на генерацию третьей гармоники

К.Ю.Вагин, К.Н.Овчинников, В.П.Силин

Представлены результаты теоретического исследования генерации третьей гармоники в плазме, ионизированной полем мощной накачки. Найдены зависимости эффективности генерации гармоники от напряженности электрического поля накачки и его поляризации. Высказано предположение об универсальности появления максимума эффективности при отличном от нуля коэффициенте круговой поляризации. Такой эффект оказывается нелинейным и имеет пороговый характер.

Ключевые слова: генерация гармоник, обратнотормозное излучение, ионизация, эффективность генерации, поляризация.

1. Исследование зависимостей интенсивности генерации гармоник лазерного излучения от характеристик излучения поля накачки важно как для установления условий реализации максимальной эффективности преобразования лазерного поля накачки в поле излучения гармоник, так и для более глубокого понимания физической сущности такого явления. Одной из важных зависимостей, характеризующих процесс генерации гармоник, является зависимость эффективности генерации от поляризации поля накачки.

В экспериментальных работах [1–3] было установлено монотонное уменьшение эффективности генерации гармоник в атомарной среде с ростом модуля степени циркулярной поляризации $|A|$ поля накачки и полное отсутствие гармоник при полностью циркулярно поляризованном поле накачки ($|A| = 1$). Это отвечало теоретическим представлениям [4] о возвращении излучающего гармоника электрона, вырванного из атома, к атомному ядру. Однако в [3] для некоторых гармоник экспериментально был обнаружен максимум генерации не при $A = 0$, т. е. не при плоской поляризации поля накачки. В этой работе был поставлен вопрос о поиске механизма, приводящего к таким особенностям генерации гармоник.

Одним из простейших механизмов генерации гармоник является механизм нелинейного тормозного излучения. Простейшая с точки зрения теории среда, в которой такой механизм проявляется, – это полностью ионизованная плазма. Нельзя сказать, что генерация гармоник в такой среде достаточно полно изучена. Однако уже в работе [5], посвященной теории генерации гармоник эллиптически поляризованным полем накачки в заранее приготовленной, полностью ионизованной плазме с электронами, имеющими максвелловское распределение по скоростям, теоретически был найден эффект (экспериментально обнаруженный в [3]), который заключался в том, что максимум эффективности генерации смещается

от значения $A = 0$. При этом смещение имеет пороговый характер.

Зачастую генерация гармоник возникает в плазме, ионизованной полем накачки. Тогда распределение по скоростям ионизованных электронов может существенно отличаться от обычного максвелловского. В этом отношении взаимное влияние эллиптичности поляризации накачки и вида распределения электронов плазмы по скоростям представляет собой широкое поле для исследований. В настоящей работе речь пойдет о зависимости эффективности генерации третьей гармоники от интенсивности поля накачки и степени его круговой поляризации. Однако плазма, рассматриваемая ниже как среда, в которой происходит генерация гармоник, качественно отличается от максвелловской плазмы, рассмотренной в работе [5]. Нас будет интересовать плазма водородоподобных атомов, ионизируемая столь сильным электрическим полем, что выполняется условие Бете [6]

$$E > \frac{I_Z^2}{4Z|e|^3}, \quad (1)$$

где Z – заряд атомного ядра;

$$I_Z = \frac{Z^2 m_e e^4}{2n^2 \hbar^2} \quad (2)$$

– ионизационный потенциал водородоподобного атома; n – главное квантовое число; m_e и e – масса и заряд электрона. При выполнении условия (1) для напряженности электрического поля E не существует связанных атомных электронов. Иными словами, газ превращается в плазму.

Помимо (1) полагаем выполненным условие очень быстрого нарастания во времени лазерного импульса. А именно, будем считать, что время его нарастания меньше времени

$$t = \frac{n^2 \hbar^2}{m_e e^4} = 2.5 \times 10^{-17} n^2, \quad (3)$$

которое условно называют временем (периодом) обращения электрона по его орбите (t измеряется в секундах). Эта величина отвечает приближению к аттосекундному временному масштабу [7, 8].

Рассмотрим водородоподобные атомы с электронами в основном состоянии с квантовыми числами $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$. Для таких электронов волновая функция в импульсном (\mathbf{p}) представлении имеет вид

$$a(p, \theta_p, \phi_p) = \frac{2^{3/2}}{\pi v_Z^{3/2}} \frac{1}{[1 + (v/v_Z)^2]^2}. \quad (4)$$

Здесь $v = p/m_e$ – скорость электрона; $v_Z = Ze^2/\hbar = Zv_a$ – кулоновская скорость [9].

2. Поле накачки \mathbf{E} с частотой ω имеет вид

$$E_x = E \varepsilon_x \cos(\omega t - \varphi_x), \quad (5)$$

$$E_y = E \varepsilon_y \sin(\omega t - \varphi_x),$$

где составляющие вектора поляризации ε_x и ε_y удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 = 1, \quad \varepsilon_x \geq \varepsilon_y \geq 0. \quad (6)$$

Составляющие вектора поляризации определяют, в частности, степень круговой поляризации A и степень максимальной линейной поляризации ρ :

$$A = -2\varepsilon_x \varepsilon_y, \quad (7)$$

$$\rho^2 = \varepsilon_x^2 - \varepsilon_y^2 = (1 - A^2)^{1/2}. \quad (8)$$

В поле накачки (5) электрон осциллирует со скоростью $\mathbf{u}_E(t)$:

$$u_{Ex} = \varepsilon_x v_E \sin(\omega t - \varphi_x), \quad (9)$$

$$u_{Ey} = -\varepsilon_y v_E \cos(\omega t - \varphi_x),$$

где

$$v_E = \frac{|e|E}{m_e \omega} \quad (10)$$

– амплитуда скорости осцилляций.

Будучи в соответствии с (3) практически мгновенно вырванными из атомов, ионизованные электроны сохраняют память о своем внутриатомном распределении. Это приводит к тому, что в осциллирующей со скоростью $\mathbf{u}_E(t)$ системе координат функция распределения электронов определяется формулой (4) и имеет вид

$$f_{n=1}(\mathbf{v}) = \frac{8N_e}{\pi^2 v_Z^3} \frac{1}{[1 + (v/v_Z)^2]^4}. \quad (11)$$

Здесь функция распределения по скоростям нормирована на плотность электронов N_e в единице объема.

3. Нелинейное воздействие электромагнитного поля накачки (5) на электроны плазмы будем описывать с помощью кинетического уравнения Больцмана, которое в дипольном приближении дает

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{e}{m_e} \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = J_{ee} + J_{ei}(f(\mathbf{v}, t)), \quad (12)$$

где $f(\mathbf{v}, t)$ – функция распределения электронов. В дальнейшем вид электрон-электронного интеграла столкновений J_{ee} несуществен, а электрон-ионный интеграл столкновений J_{ei} используем в следующем приближении:

$$J_{ei}(f) = \frac{2\pi Z_{\text{eff}} e^4 N_e A}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial v_r} \frac{v^2 \delta_{rs} - v_r v_s}{v^3} \frac{\partial f}{\partial v_s}, \quad (13)$$

где

$$Z_{\text{eff}} = \frac{\sum_i e_i^2 N_i}{e^2 N_e}; \quad (14)$$

A – кулоновский логарифм; N_i – плотность ионов i -го сорта; e_i – заряд i -го иона; суммирование в (14) ведется по сортам ионов водородоподобных атомов.

Ток основной гармоники поля накачки получается из (12) обычным образом при условии малости электрон-ионной частоты столкновений по сравнению с частотой накачки (ср. с [10]). Для плотности тока электронов высших гармоник $\delta \mathbf{j} = \{\delta j_x, \delta j_y, 0\}$ из (12) получаем выражения

$$\delta j_x = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{e^2 N_e}{m_e \omega^2} v_{xx}^{(2N+1)} \varepsilon_x E \cos[(2N+1)(\omega t - \varphi_x)], \quad (15)$$

$$\delta j_y = - \sum_{N=1}^{\infty} \frac{e^2 N_e}{m_e \omega^2} v_{yy}^{(2N+1)} \varepsilon_y E \sin[(2N+1)(\omega t - \varphi_x)],$$

где, в частности, эффективные частоты столкновений $v_{xx}^{(3)}$, $v_{yy}^{(3)}$, соответствующие генерации третьей гармоники, определяются формулами

$$v_{xx}^{(3)} = \frac{16e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{m_e^2 \rho^3 v_E^3} D \alpha_+^{(3)}, \quad (16)$$

$$v_{yy}^{(3)} = \frac{16e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{m_e^2 \rho^3 v_E^3} D \alpha_-^{(3)}; \quad (17)$$

$$D = 1 - \frac{d}{db} + \frac{1}{3} \frac{d^2}{db^2} \quad (18)$$

– дифференциальный оператор (с последующей подстановкой $b = 1$);

$$\begin{aligned} \alpha_+^{(3)} &= \frac{\sqrt{2}\rho}{(1+\rho^2)^{1/2}} \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{4}{3\rho^2} \right) \right. \\ &\times \mathcal{F} \left(\arctan \frac{(1+\rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}\alpha}, \frac{\sqrt{2}\rho}{(1+\rho^2)^{1/2}} \right) - \left(1 + \frac{4}{3\rho^2} \right) \\ &\times \mathcal{E} \left(\arctan \frac{(1+\rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}\alpha}, \frac{\sqrt{2}\rho}{(1+\rho^2)^{1/2}} \right) \left. \right] \\ &+ \frac{8\alpha}{3\rho} \left[1 - \left(\frac{1+2\alpha^2-\rho^2}{1+2\alpha^2+\rho^2} \right)^{1/2} \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \alpha_-^{(3)} &= \frac{\sqrt{2}\rho}{(1+\rho^2)^{1/2}} \left\{ \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3\rho^2} \right) \right. \\ &\times \mathcal{F} \left(\arctan \frac{(1+\rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}\alpha}, \frac{\sqrt{2}\rho}{(1+\rho^2)^{1/2}} \right) - \left(-1 + \frac{4}{3\rho^2} \right) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{1 + \rho^2}{1 - \rho^2} \left[\mathcal{E} \left(\arctan \frac{(1 + \rho^2)^{1/2}}{\sqrt{2}\alpha}, \frac{\sqrt{2}\rho}{(1 + \rho^2)^{1/2}} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2\sqrt{2}\alpha}{(1 + \rho^2)^{1/2}} \frac{\rho^2}{[(1 + 2\alpha^2)^2 - \rho^4]^{1/2}} \right] \Big\} \\ & + \frac{8\alpha}{3\rho} \left[1 - \left(\frac{1 + 2\alpha^2 + \rho^2}{1 + 2\alpha^2 - \rho^2} \right)^{1/2} \right]; \end{aligned} \quad (20)$$

$\alpha = b(v_Z/v_E)$; $\mathcal{F}(\varphi, s)$ и $\mathcal{E}(\varphi, s)$ – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

4. Определим эффективность генерации третьей гармоники $\eta^{(3)}$ как отношение усредненных по времени квадратов напряженностей электрических полей третьей гармоники и накачки в геометрии плоских волн, когда $\varphi_x = kz$ (где k – волновое число):

$$\eta^{(3)} = \frac{\langle (\mathbf{E}^{(3)})^2 \rangle}{\langle \mathbf{E}^2 \rangle}. \quad (21)$$

Тогда согласно уравнениям Максвелла получаем

$$\eta^{(3)} = \left(\frac{3}{8} \right)^2 \frac{\varepsilon_x^2 (v_{xx}^{(3)})^2 + \varepsilon_y^2 (v_{yy}^{(3)})^2}{\omega^2}. \quad (22)$$

При этом мы предполагаем, что выполнено обычное для плазмы дисперсионное условие $\omega^2 = \omega_{Le}^2 + c^2 k^2$, где ω_{Le} – ленгмюровская частота электронов; c – скорость света. Формулы (7), (8), (16), (17), (19) и (20) позволяют представить (22) в следующем виде:

$$\eta^{(3)} = \left(6 \frac{e^4 Z_{\text{eff}} N_e A}{m_e^3 v_Z^3 \omega} \right)^2 F^{(3)} \left(\frac{v_E}{v_Z}, \rho \right), \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} F^{(3)} \left(\frac{1}{\alpha}, \rho \right) &= \frac{\alpha^6}{2\rho^6} \left\{ (1 + \rho^2) [(D\alpha_+^{(3)})|_{b=1}]^2 \right. \\ & \left. + (1 - \rho^2) [(D\alpha_-^{(3)})|_{b=1}]^2 \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

В (23) коэффициент перед функцией $F^{(3)}$ равен $5 \times 10^{-3} \times [(A/10)(N_e/N_{ec})\lambda^{-1}Z_{\text{eff}}/Z^3]^2$, где N_{ec} – критическая плотность электронов; λ – длина волны накачки в мкм. Это

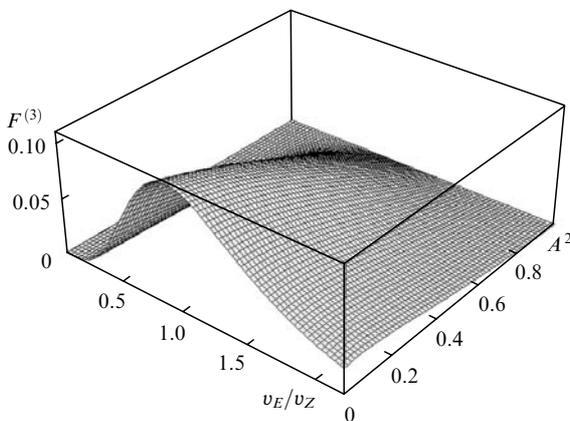


Рис.1. Зависимость функции $F^{(3)}$ от относительной напряженности поля накачки v_E/v_Z и квадрата степени круговой поляризации накачки A^2 .

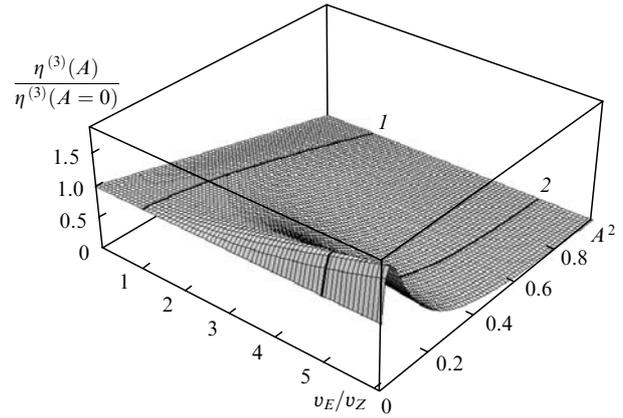


Рис.2. Зависимость относительной эффективности генерации третьей гармоники $\eta^{(3)}(A)/\eta^{(3)}(A=0)$ от относительной напряженности поля накачки v_E/v_Z и квадрата степени круговой поляризации накачки A^2 . Кривые 1 и 2 соответствуют кривым 1 и 2 на рис.3.

соотношение дает количественную оценку эффективности генерации третьей гармоники.

На рис.1–3 показаны зависимости функции $F^{(3)}$, определяющей согласно (23) эффективность генерации третьей гармоники, от ее двух аргументов. При этом рис.1 наиболее ярко демонстрирует зависимость $F^{(3)}$ от относительной напряженности поля накачки v_E/v_Z : в области малых v_E/v_Z имеет место рост эффективности генерации, которая после достижения максимума убывает как $\sim v_E^{-6}$. На рис.1 уже можно увидеть немонотонность зависимости эффективности генерации от степени круговой поляризации поля накачки. На рис.2 показано поведение эффективности генерации третьей гармоники, отнесенной к ее значению при $A = 0$, т. е. к значению, отвечающему линейно поляризованной накачке. Здесь мы видим ярко выраженную немонотонную зависимость от степени круговой поляризации с максимумом, равным 1.53 при $v_E/v_Z = 5$.

Наконец, рис.3 иллюстрирует нелинейное свойство немонотонности зависимости эффективности генерации третьей гармоники от эллиптичности накачки при изменении ее интенсивности. Две кривые на рис.3 соответствуют двум жирным кривым на трехмерном рис.2. Видно, что при $v_E/v_Z = 1$ (кривая 1) эффективность генерации монотонно убывает с ростом степени круговой поляризации поля накачки. Напротив, кривая 2 на рис.3, соответствующая $v_E/v_Z = 5$, демонстрирует немонотон-

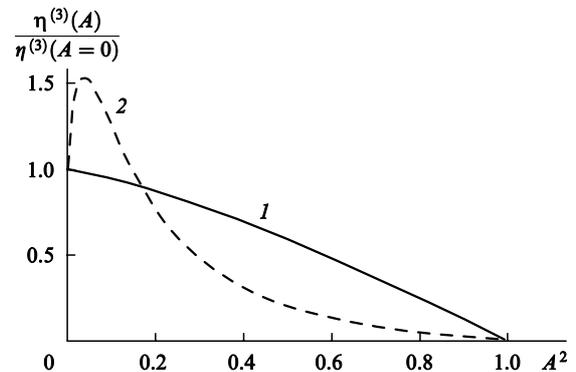


Рис.3. Зависимости относительной эффективности генерации третьей гармоники $\eta^{(3)}(A)/\eta^{(3)}(A=0)$ от квадрата степени круговой поляризации накачки A^2 при $v_E/v_Z = 1$ (1) и 5 (2).

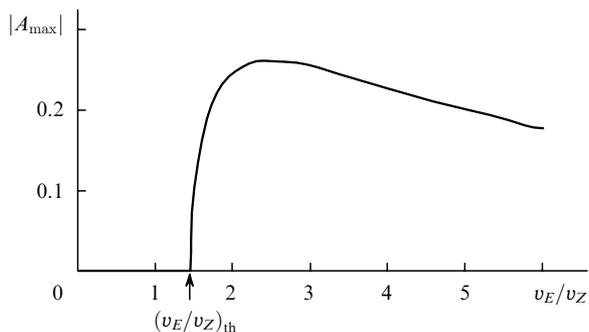


Рис.4. Зависимость от относительной напряженности поля накачки v_E/v_Z абсолютного значения максимальной степени круговой поляризации накачки $|A_{\max}|$, при котором эффективность генерации третьей гармоники достигает максимума.

ную зависимость с максимумом, достигающим примерно 1.5. Эти две кривые указывают на то, что немонотонность зависимости $\eta^{(3)}(A)/\eta^{(3)}(A=0)$ на рис.3 не только представляет собой нелинейное явление, но и, очевидно, имеет порог возникновения немонотонности.

Последнее иллюстрируется рис.4, на котором изображена зависимость от относительной напряженности электрического поля накачки v_E/v_Z абсолютной величины максимальной степени круговой поляризации поля накачки $|A_{\max}|$, при которой реализуется максимум эффективности генерации третьей гармоники. Из рис.4 видно, что до порогового значения $(v_E/v_Z)_{\text{th}} = 1.46$ максимум эффективности генерации имеет место для плоскополяризованного излучения. После достижения $(v_E/v_Z)_{\text{th}} = 1.46$ эллиптическая поляризация становится предпочтительнее плоской с точки зрения достижения максимума эффективности генерации. При этом $|A_{\max}| = 0.262$, отвечающее наибольшей эффективности генерации третьей гармоники, достигается при $v_E/v_Z = 2.49$.

5. Подводя итог всему вышеизложенному, можно высказать следующее предположение: обнаруженное в работе [3] свойство генерации гармоник, которое заключается в том, что при некоторых условиях максимум эффективности генерации реализуется не при линейной поляризации поля накачки, а для поля накачки с некоторой степенью эллиптичности, является общим свойством механизма генерации гармоник благодаря тормозному излучению. При этом такое свойство существенно нелинейно и реализуется при превышении некоторого порога интенсивности поля накачки.

Настоящая работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 02-02-16078), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ – 1385.2003.2) и Фонда содействия отечественной науки.

1. Budil K.S., Salieres P., L'Huillier A., Ditmire T., Perry M.D. *Phys. Rev. A*, **48**, R3437 (1993).
2. Dietrich P., Burnett N.H., Ivanov M., Corkum P.B. *Phys. Rev. A*, **50**, R3585 (1994).
3. Burnett N.H., Kan C., Corkum P.B. *Phys. Rev. A*, **51**, R3418 (1995).
4. Antoine P., L'Huillier A., Lewenstein M., Salieres P., Carr'e B. *Phys. Rev. A*, **53**, 1725 (1996).
5. Овчинников К.Н., Силин В.П. *Квантовая электроника*, **29**, 145 (1999).
6. Бете Н. *Квантовая механика простейших систем* (Л.–М., ОНТИ, 1935).
7. Paul P.M., Toma E.S., Breger P. *Science*, **292**, 1689 (2001).
8. Hentschel M., Kienberger R., Spielmann Ch., Reider G.A., Milosevic N., Brabec T., Corkum P., Heinzmann U., Drescher M., Krausz F. *Nature*, **414**, 509 (2001).
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика, нерелятивистская теория* (М.: ГИФМЛ, 1963).
10. Силин В.П. *Введение в кинетическую теорию газов* (М.: Изд-е ФИАН, 1998).