

Об одном способе получения лазерных пучков с фазовой сингулярностью

А.А.Малютин

Рассмотрен способ получения лазерных пучков с фазовой сингулярностью (ПФС) с помощью фазовых экранов, описываемых функцией вида $\exp(i\ell\varphi)$. Показано, что в дальней зоне излучения (в фокусе линзы) этим способом можно получить пучки в виде одиночных колец с гладким распределением интенсивности, представляющим собой суперпозицию лаггер-гауссовых мод. В ближней зоне, а при наличии апертурных ограничений и в фокальной области, могут наблюдаться пучки с более сложной структурой излучения. Масштабирование радиуса, соответствующего максимальной интенсивности пучка как в отсутствие, так и при наличии апертурных ограничений происходит линейно с зарядом сингулярности l . Оценено влияние децентровки пучка и фазового экрана на структуру ПФС.

Ключевые слова: лазерные пучки, фазовая сингулярность, модовый состав излучения.

1. Введение

Исследования световых пучков с фазовыми сингулярностями (ПФС), из-за характерной структуры волнового фронта именуемых также «оптическими вихрями», в последнее десятилетие получили бурное развитие. Интерес к ним питается тем, что такие пучки позволяют манипулировать объектами микронного и субмикронного масштабов в биологии, микроэлектромеханике, микрогидродинамике и т. п. В силу специфики распространения этих пучков в линейных и нелинейных средах немалый интерес они представляют также и с теоретической точки зрения.

В настоящее время для получения ПФС используют в основном либо преобразование мод Эрмита–Гаусса (ЭГ) u_{nm}^{HG} (обычно с $n = 0, m > 0$) с помощью астигматических $\pi/2$ -конвертеров [1], либо синтезированные компьютерные голограммы [2]. В первом случае при определенных условиях получают чистые моды Лаггерра–Гаусса (ЛГ) u_{pl}^{LG} ($p = \min(n, m), l = n - m$). Однако условия согласования параметров входного пучка с оптическими параметрами $\pi/2$ -конвертера достаточно трудно выполнить. Примером может служить работа [3] (см. в ней рис.4), в которой недостаточно точное согласование параметров пучка и $\pi/2$ -конвертера привело к изменению масштаба пучка при повороте конвертера (объяснение этого дано нами в работе [4]). В результате на выходе конвертера получают излучение, представляющее собой в общем случае целый набор мод ЛГ [5]. В некотором частном случае возможно получение эллиптических мод ЛГ [4], удобных, например, для манипуляций с микрообъектами вытянутой формы. Эллиптические моды ЛГ, обладая астигматизмом, могут существовать лишь в ограниченной области пространства и, естественно, также

представляют собой некоторую суперпозицию чистых ЛГ-мод.

При использовании компьютерных голограмм, представляющих собой, по сути, интерференционную картину ПФС и того или иного опорного пучка (ТЕМ₀₀-моды со сферическим [2] или наклонным [6] волновым фронтом), получают помимо излучения требуемого вида также излучение ненужных дифракционных порядков, которое приходится отфильтровывать. В результате эффективность преобразования может быть существенно снижена.

Недавно в нескольких работах был применен способ получения ПФС, подобный голографическому, при котором сингулярность вида $\exp(i\ell\varphi)$ вносится в лазерный пучок непосредственно с помощью фазового экрана (киноформа) [7–11]. При этом большое число элементов (480×480) управляемого жидкокристаллического фазового экрана позволило получить пучки с топологическим зарядом сингулярности l до 200 [10]. Эффективность данного способа, по утверждению авторов [9], может приближаться к 100 %.

В настоящей работе мы проанализируем структуру и модовый состав ПФС, получаемых при использовании фазовых экранов, которые описываются функцией вида $\exp(i\ell\varphi)$. Будут рассмотрены ближняя и дальняя зоны излучения, а также влияние на картину поля формы исходного лазерного пучка и его положения относительно оси фазового экрана.

2. ТЕМ₀₀-мода и фазовый экран с $\Phi = \exp(i\ell\varphi)$

2.1. Дальняя зона излучения

Пусть излучение ТЕМ₀₀-моды с единичной интенсивностью, радиусом w и плоским волновым фронтом проходит через фазовый экран, имеющий зависимость фазы Φ от азимутального угла φ вида $\Phi = \exp(i\ell\varphi)$, где l – некоторое целое число (заряд сингулярности). Тогда на выходе транспаранта поле излучения можно представить в виде

А.А.Малютин. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38; тел.: (095) 135 03 27, факс: (095) 135 20 55, e-mail: amal@kapella.gpi.ru

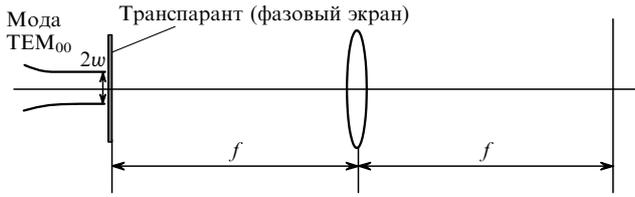


Рис.1. Оптическая схема для получения пучков с фазовой сингулярностью при использовании фазового экрана с $\Phi = \exp(i l \varphi)$.

$$u(\rho, \varphi) = \exp(-\rho^2/w^2 + i l \varphi). \quad (1)$$

И пусть это излучение фокусируется линзой с фокусным расстоянием $f = \pi w^2/\lambda$, как показано на рис.1.

Распределением поля в фокусе линзы является фурье-образ поля (1). Это распределение может быть записано в цилиндрических координатах, если сделать замену $r \rightarrow r/(\lambda f)$:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\infty} u(\rho, \varphi) \exp[-i 2\pi r \rho \cos(\theta - \varphi)] \rho d\rho d\varphi. \quad (2)$$

Используя формулы (2.5.41.10) из [12] и (6.631.7) из [13], получаем

$$U(r, \theta) = B r w \exp[i l (\theta - \pi/2) - \gamma r^2] \times [I_{(l-1)/2}(\gamma r^2) - I_{(l+1)/2}(\gamma r^2)], \quad (3)$$

где B – некоторая константа; $I_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя от мнимого аргумента; $\gamma = 1/(2w^2)$. Поскольку ряду $l = 1, 2, 3, \dots$ соответствует последовательность целых и полуцелых индексов функций Бесселя, то в правой части (3) можно сделать следующие преобразования:

$$I_0(\gamma r^2) - I_1(\gamma r^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma r^2/2)^{2k} (k+1 - \gamma r^2/2)}{k!(k+1)!} \quad (4)$$

при $l = 1$,

$$I_{1/2}(\gamma r^2) - I_{3/2}(\gamma r^2) = \frac{1}{r} \left(\frac{2}{\pi \gamma} \right)^{1/2} \left[\sinh(\gamma r^2) - \cosh(\gamma r^2) + \frac{\sinh(\gamma r^2)}{\gamma r^2} \right] \quad (5)$$

при $l = 2$ и т. д.

Таким образом, при нечетных l имеем представление поля в виде сумм, а при четных – в виде гиперболических синуса и косинуса. Распределения поля в дальней зоне в отсутствие дифракции из-за апертурных ограничений независимо от четности l имеют вид одиночного кольца и оказываются вполне подобными друг другу (рис.2).

Для нахождения зависимости положения максимума распределения (3) от l удобно взять, например, $l = 2n + 1$. Тогда уравнение $dU/dr = 0$ сводится к уравнению

$$\left(\frac{2n+1}{\gamma r_{\max}^2} - 4 \right) I_n(\gamma r_{\max}^2) + \left(\frac{2n+1}{\gamma r_{\max}^2} + 4 \right) I_{n+1}(\gamma r_{\max}^2) = 0. \quad (6)$$

Численное решение (6) для нечетных l дает

$$r_{\max} \approx [0.595 + 0.662(l-1)/2]/\sqrt{\gamma}. \quad (7)$$

Примерно также линейно с ростом l увеличивается и ширина кольца на полувысоте.

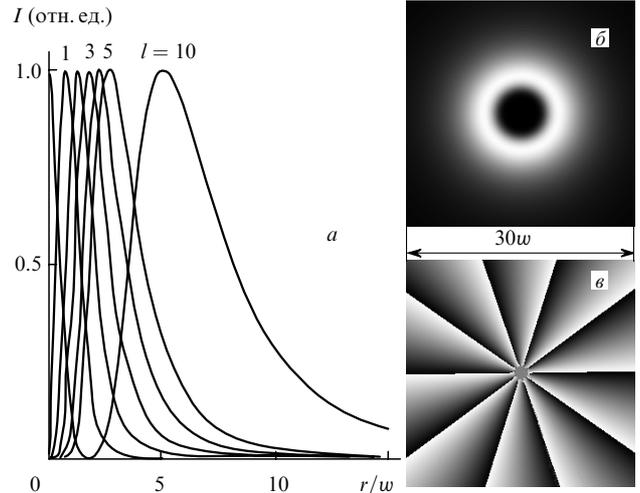


Рис.2. Зависимости интенсивности поля (3) от радиальной координаты (кривые нормированы на собственный максимум) (а), а также распределения интенсивности (б) и фазы (в) в ПФС при $l = 10$ (изменение фазы от 0 до 2π дано на линейной «серой» шкале).

Казалось бы, что различие в применении фазовых экранов с нечетными и четными l не может иметь физического смысла и отличие (4) от (5) чисто символическое. В действительности это не совсем так: при использовании одного и того же базиса ЛГ-мод поля для экранов с различным зарядом сингулярности имеют разные отношения действительной и мнимой частей коэффициентов разложения (амплитуд мод) $A_{pl} = a_{pl} + i b_{pl}$. На рис.3 приведены результаты выполненного численно разложения по модам ЛГ. При $l = 1$ имеем

$$U(r, \theta, l = 1) \approx \sum_{p=1}^{\infty} (a_{p1} + i b_{p1}) u_{p1}^{LG} \quad (8)$$

и в спектре представлены моды u_{p1}^{LG} (рис.3,а), для которых $a_{p1} \neq 0, b_{p1} \neq 0$. Знак примерного равенства в (8) отражает наличие погрешности в разложении. О ее величине можно судить по тому, что условие ортогональности мод ЛГ в расчете выполняется с точностью $\sim 10^{-8} - 10^{-7}$. Согласно этому расчету с указанной точностью $|a_{p1}| = |b_{p1}|$. При $l = 2$

$$U(r, \theta, l = 2) \approx \sum_{p=0}^{\infty} (a_{p2} + i b_{p2}) u_{p2}^{LG} \quad (9)$$

и, как видно из рис.3,б, амплитуды мод в спектре либо действительны, либо мнимы. Изменение модулей амплитуд для разложений (8) и (9) в зависимости от p показано на рис.3,в,г. Следует отметить, что переход от другому базису мод u_{pl}^{LG} (например, поворот базиса – домножение каждой из мод на постоянный множитель вида $\exp(i\psi)$, ψ – константа) приведет к соответствующему изменению (повороту) спиралей на рис.3,а,б. При этом, естественно, распределение модулей амплитуд с изменением p (рис.3,в,г) останется неизменным.

Закономерности, аналогичные описанным, можно проследить и при других четных и нечетных значениях l фазового экрана. При этом с ростом l моды ЛГ с более высокими радиальными индексами p имеют в разложении все возрастающий вес. Это уже заметно на рис.3,в,г при переходе от $l = 1$ к $l = 2$.

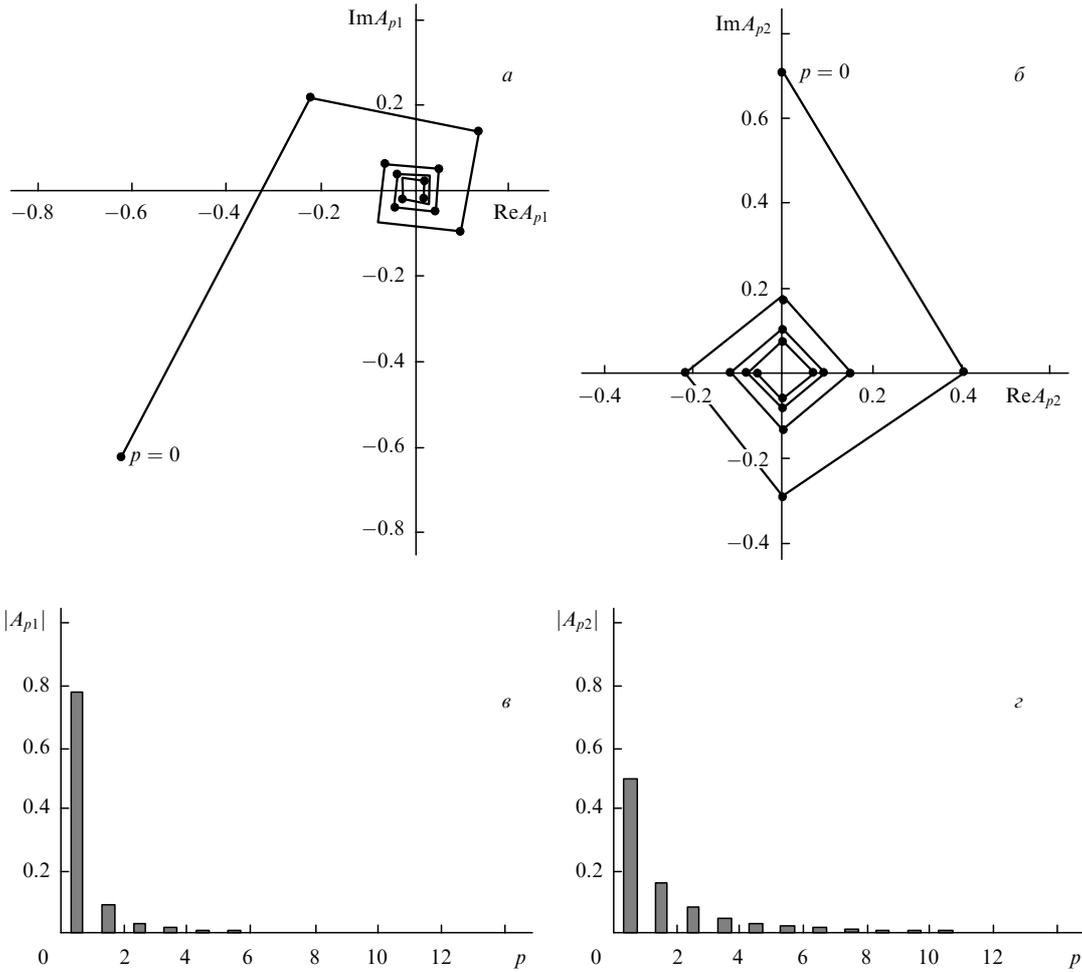


Рис.3. Амплитуды в разложениях поля (3) по модам ЛГ (а, б), а также изменение модулей этих амплитуд в зависимости от индекса p (в, з) для фазового экрана с $l = 1$ (а, в) и 2 (б, з). Точки на спиралях соответствуют $p = 0, 1, 2, \dots$

2.2. Ближняя зона излучения

Согласно [14] для фурье-преобразования функции ЭГ при любом целочисленном или дробном (в том числе иррациональном [15]) порядке a имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^a [\exp(-\pi x^2) H_n(x\sqrt{2\pi})] \\ = \exp(-ian\pi/2) \exp(-\pi \xi^2) H_n(\xi\sqrt{2\pi}), \end{aligned} \quad (10)$$

что в силу разложения мод ЛГ по модам ЭГ [1]

$$u_{pl}^{\text{LG}}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N i^k b(n, m, k) u_{N-k, k}^{\text{HG}}(x, y, z) \quad (11)$$

легко приводится к выражению

$$\mathcal{F}^a [u_{pl}^{\text{LG}}(x, y, z)] = \exp(-iaN\pi/2) u_{pl}^{\text{LG}}(x, y, z), \quad (12)$$

где $N = n + m = 2p + |l|$ – порядок моды. В нашем случае $\mathcal{F}^a = \mathcal{F}^1$ и для поля (3) обратное фурье-преобразование с учетом накопления фазы Гуй при распространении в фокальную плоскость линзы с фокусным расстоянием f (рис.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[U(r, \theta, l)] &= \sum_{p=0}^{\infty} A_{pl} \exp[i(2p + |l| + 1)\pi/2] u_{pl}^{\text{LG}} \\ &= u(\rho, \varphi). \end{aligned} \quad (13)$$

Модовый состав поля излучения (3) в дальней зоне в равной мере относится и ко входной плоскости рис.1, а также ко всем промежуточным точкам на оптической оси. В последнем случае для коэффициентов разложения исходного поля (1) получаем выражение

$$\begin{aligned} A_{pl}(z) &= [a_{pl}(z=0) + ib_{pl}(z=0)] \\ &\times \exp[-i(2p + |l| + 1)\psi(z)], \end{aligned} \quad (14)$$

где $\psi(z) = \arctan(z/z_R)$ – фаза Гуй; $z_R = \pi w^2/\lambda$ – рэлеевская длина пучка (длина перетяжки). Следовательно, коэффициенты разложения при разных z различаются только фазовыми добавками, соответствующими индексам мод ЛГ.

Для исходного поля (1) и его дальней зоны они определяются соотношением (13), причем при $l = 1$ экспоненциальный член в (13) сводится к $(-1)^{2(p+1)}$, при $l = 2 - k i^{2p+1}$. Поэтому в первом случае имеем поворот спирали на рис.3,а на 180° (см. рис.4,а), во втором – поворот спирали на рис.3,б на 90° (см. рис.4,б). В точках z между фазовым экраном и фокальной плоскостью линзы в соответствии с изменением фазы Гуй происходит поворот каждого из комплексных коэффициентов A_{pl} базисных мод ЛГ (14). Для некоторых значений z при $l = 2$ это показано на рис.4,в,з. Зависимость угла поворота от p

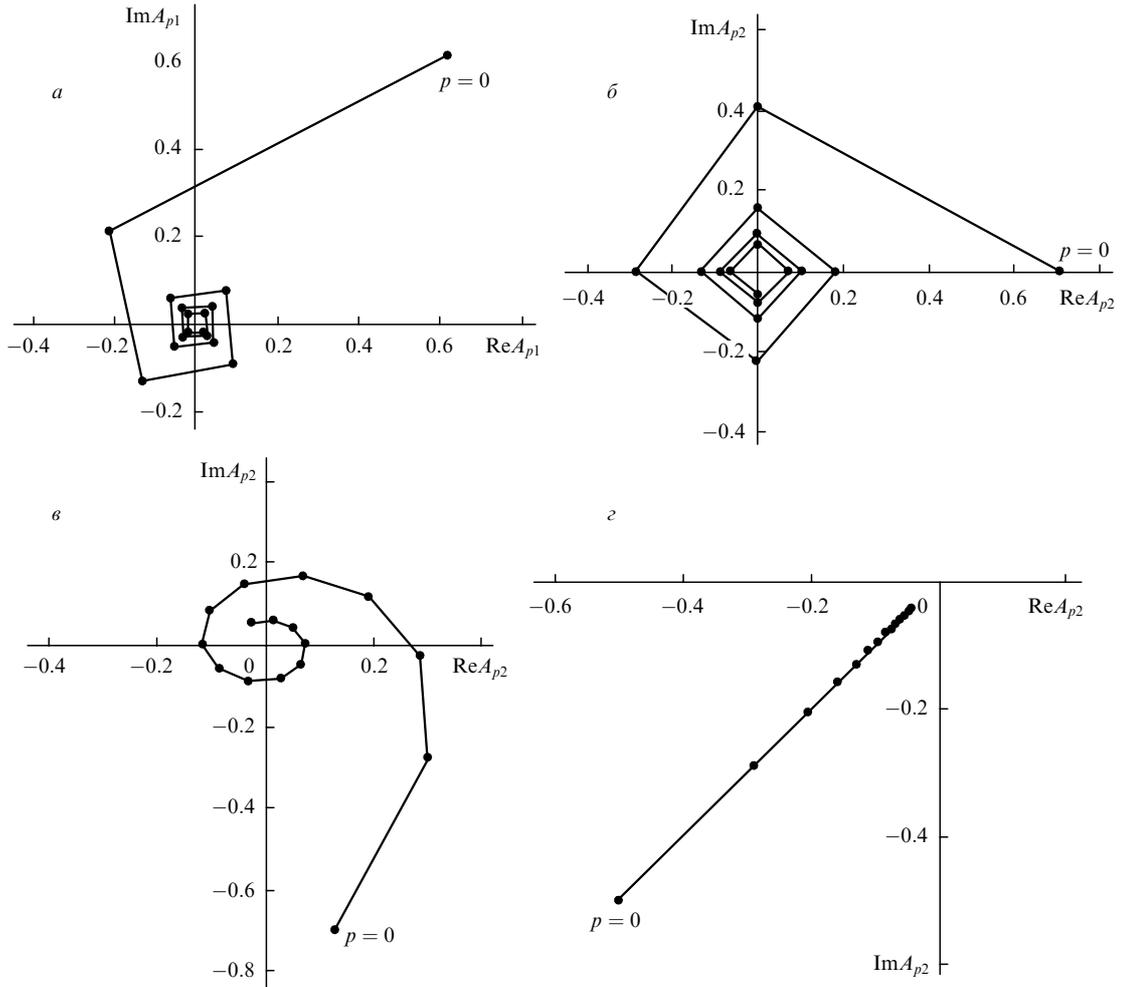


Рис.4. Амплитуды в разложениях поля (1) по модам ЛГ в плоскости фазового экрана с $l = 1$ (а) и 2 (б), а также изменение этих амплитуд при $l = 2$ и распространении пучка на расстояние $z = z_R/2$ (в) и z_R (г). Точки на спиралях соответствуют $p = 0, 1, 2, \dots$

приводит к тому, что радиусы-векторы внутренних точек спирали на рис.3,а поворачиваются на угол, пропорциональный p (рис.4,в), и при $z = f = z_R$ спираль превращается в прямую (рис.4,г). При дальнейшем распространении пучка в фокальную область линзы спираль закручивается, но уже в противоположном направлении: из свернутой против часовой стрелки в точке $z = 0$ (рис.4,б) она превращается в точке $z = 2f = 2z_R$ в такую же спираль, свернутую по часовой стрелке (рис.3,б).

В ближней зоне в соответствии с изменением коэффициентов разложения по модам ЛГ (14) поле является промежуточным между полями (1) и (3). Эти поля, как видно из результата численного моделирования распространения ПФС (рис.5), не являются монотонно гладкими. Отметим, что максимальная интенсивность поля на расстоянии $0.01z_R$ за фазовым экраном ($l = 10$) в 2.25 раз превышает интенсивность исходного пучка ТЕМ₀₀-моды. В то же время интенсивность поля в фокусе линзы с $f = z_R$ оказывается намного меньше (0.0054 от исходной интенсивности).

2.3. Влияние дифракции и децентровки

Авторы работы [10], анализируя структуру ТЕМ₀₀-моды за экраном с $\Phi = \exp(il\varphi)$, объясняют линейную зависимость положения максимальной интенсивности от l в ПФС влиянием дифракции на апертуре фокусирующей линзы. Эта же мысль повторена ими в публикации [16].

Как было показано выше, линейная зависимость (7) – это особенность, присущая самому пучку, получаемому с помощью фазового экрана с $\Phi = \exp(il\varphi)$. Однако избежать апертурных эффектов, по крайней мере при фокусировке

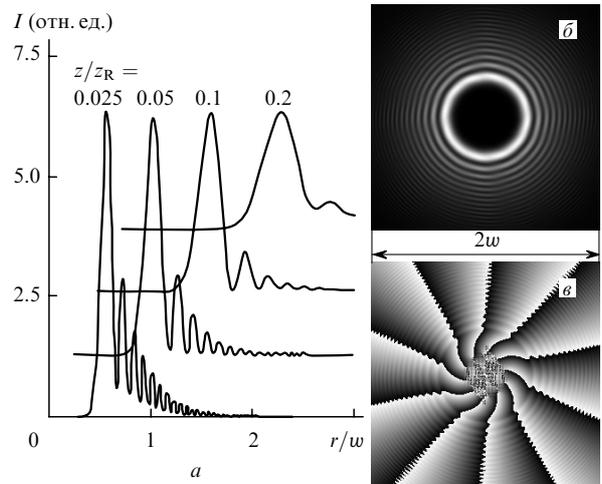


Рис.5. Радиальные распределения интенсивности поля за фазовым экраном ($l = 10$) в ближней зоне (относительные интенсивности не соблюдены) (а), а также распределения интенсивности (б) и фазы (в) в ПФС на расстоянии $0.01z_R$ от фазового экрана (максимум интенсивности составляет 225 % от интенсивности исходного пучка).

объективами с очень коротким фокусным расстоянием и большой числовой апертурой (достигаемой в основном за счет иммерсии), достаточно трудно. Дело в том, что техническая реализация фазового экрана осуществляется с помощью матричного устройства на основе жидких кристаллов [8,10]. Полный размер применяемой матрицы составляет 2×2 см, что делает оптимальным использование исходного пучка (TEM₀₀-моды) достаточно большого сечения. Без виньетирования согласовать этот пучок с относительно малым входным зрачком фокусирующего короткофокусного микрообъектива, по-видимому, невозможно. Этим объясняется наблюдающаяся в фокальной плоскости структура поля в виде многочисленных колец [10,16] вместо одного кольца, как это должно быть в отсутствие апертурных ограничений (см. п.2.1).

Численное моделирование, выполненное, как и выше, с помощью программы ФРЕНЕЛЬ [17], показывает, что при ограничении интенсивности исходного пучка TEM₀₀-моды по уровню 5% от максимальной интенсивности (по полю это составляет ~22.4%) и достаточно заметной многокольцевой структуре в фокусе линзы (рис.6,а) происходит даже увеличение максимальной интенсивности относительно интенсивности распределения на рис.2,б. Замена моды TEM₀₀ на входе в фазовый экран пучком с плоской вершиной, имеющим радиус w и ту же интенсивность, приводит к дальнейшему росту максимальной интенсивности ПФС. При этом ограничение гауссова пучка или переход к пучку с плоской вершиной сопровождается одновременно некоторым сдвигом положения максимума интенсивности в область больших значений r/w (рис.6,б).

Помимо дифракции на качество ПФС оказывает влияние также децентрировка исходного пучка и фазового экрана. В силу векторного характера передаваемого пучку орбитального момента перемещению центра исходного пучка (например по оси x) отвечают смещения «центра тяжести» ПФС и деформация распределения его интенсивности по оси y (рис.6,в,г). Зависимость положения «центра тяжести» ПФС в дальней зоне от l по результатам численного эксперимента для гауссова пучка (рис.6,в) может быть представлена в виде

$$r_c = \frac{\lambda F}{\pi w^2} l \times r_b, \quad (15)$$

где r_c и r_b – соответственно радиусы-векторы «центра тяжести» ПФС и центра гауссова пучка относительно оси фазового экрана, а коэффициент перед векторным произведением отражает изменение r_c при фокусном расстоянии линзы F , отличном от $f = z_R$ (рис.1). Следует отметить, что фиксированному смещению r_b в ПФС соответствует постоянное, не зависящее от l отношение максимумов интенсивности в левой и правой частях распределений на рис.6,г.

3. Заключение

Показано, что при получении ПФС с помощью TEM₀₀-моды и фазового экрана (киноформа) с $\Phi = \exp(i l \varphi)$ в отсутствие дифракции генерируются пучки, представляющие собой «непрерывную» по радиальному индексу p суперпозицию мод ЛГ с фиксированным значением l . В дальней зоне эти пучки имеют вид одиночных колец с ра-

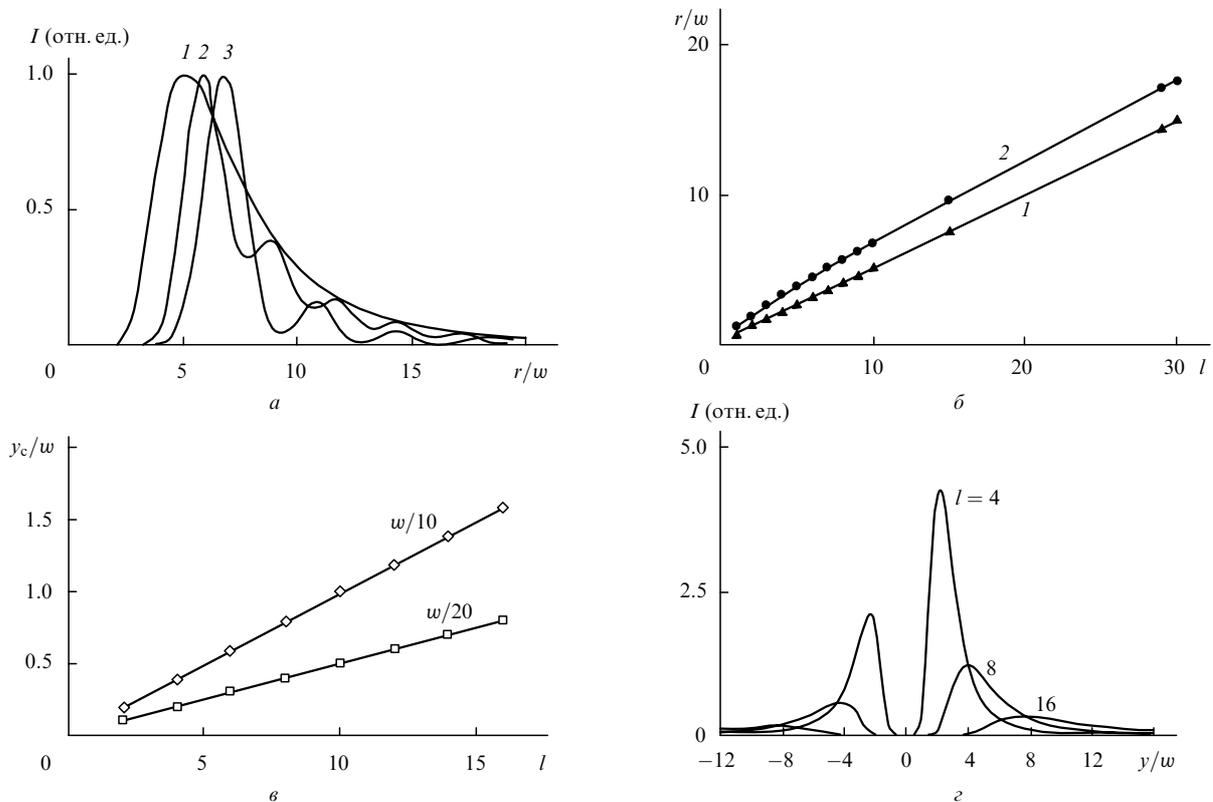


Рис.6. Радиальные распределения интенсивности поля за фазовым экраном ($l = 10$) в дальней зоне (относительные интенсивности не соблюдены) для гауссова пучка на входе (1), ограниченного (по уровню 5%) гауссова пучка (2) и пучка с плоской вершиной (радиус w) (3) (а); зависимость положения максимальной интенсивности от заряда сингулярности l для гауссова пучка (1) и пучка с плоской вершиной (2) (б); изменения положения «центра тяжести» ПФС (по оси y) при смещениях гауссова пучка $\Delta x = w/10$ и $w/20$ и разных l (в), а также деформации распределения интенсивности ПФС по оси y ($\Delta x = w/10$) (г).

диальным положением максимума интенсивности и полушириной, пропорциональной (с достаточно высокой точностью) заряду сингулярности l . Линейная зависимость от l сохраняется также при наличии апертурных ограничений и использовании вместо исходного излучения ТЕМ₀₀-моды пучка с плоской вершиной. В ближней зоне, а при дифракции и в дальней зоне ПФС имеют многокольцевую структуру. Существенное влияние на нее оказывает также децентровка исходного гауссова пучка относительно фазового экрана, при которой смещение «центра тяжести» ПФС пропорционально векторному произведению $l \times r_b$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 02-02-17718).

1. Beijersbergen M.W., Allen L., van der Veen H.E.L.O., Woerdman J.P. *Opt. Commun.*, **96**, 123 (1993).
2. Heckenberg N.R., McDuff R., Smith C.P., White A.G. *Opt. Lett.*, **17**, 221 (1992).
3. O'Neil A.T., Courtial J. *Opt. Commun.*, **181**, 35 (2000).
4. Малютин А.А. *Квантовая электроника*, **33**, 235 (2003).
5. Courtial J., Padgett M.J. *Opt. Commun.*, **159**, 13 (1999).
6. Heckenberg N.R., McDuff R., Smith C.P., Rubinsztein-Dunlop H., Wegener M.J. *Opt. Quantum Electron.*, **24**, S951 (1992).
7. Beijersbergen M.W., Coerwinkel R.P.C., Kristensen M., Woerdman J.P. *Opt. Commun.*, **112**, 321 (1994).
8. Curtis J.E., Koss B.A., Grier D.G. *Opt. Commun.*, **207**, 169 (2002).
9. Ganic D., Gan X., Gu M., Hain M., Somalingam S., Stankovic S., Tschudi T. *Opt. Lett.*, **27**, 1351 (2002).
10. Curtis J., Grier D.G. *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 133901 (2003).
11. Zhang D.W., Yuan X.-C. *Opt. Lett.*, **28**, 740 (2003).
12. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды* (М.: Наука, 1981).
13. Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (М.: Физматгиз, 1963).
14. Bultheel A., Martinez H. *A Shattered Survey of the Fractional Fourier Transform* (Katholieke Universiteit Leuven, Report TW337, 2002).
15. James D.F.V., Agarwal G.S. *Opt. Commun.*, **126**, 207 (1996).
16. Curtis J.E., Grier D.G. *Opt. Lett.*, **23**, 872 (2003).
17. Епатко И.В., Малютин А.А., Серов Р.В., Соловьев Д.А., Чулкин А.Д. *Квантовая электроника*, **25**, 717 (1998).