

## Об искажении волнового пакета при его распространении в усиливающей среде

Н.С.Бухман

*Рассмотрено распространение узкополосного сигнала (волнового пакета) в среде с инверсией населенностей. Показано, что при большой оптической толщине слоя вещества сигнал распадается на первичный и усиленный сигналы, распространяющиеся с разной скоростью и имеющие разную продолжительность. Первичный сигнал распространяется без искажений со скоростью  $c/n_0$  ( $n_0$  – показатель преломления среды вдали от резонансной частоты) и играет роль предвестника усиленного сигнала. Усиленный сигнал движется с меньшей скоростью; по мере распространения он отстает от первичного сигнала и приобретает универсальную гауссову форму (независимо от формы первичного сигнала и профиля спектральной линии). Возникновение усиленного сигнала, существенно отличающегося от первичного по всем параметрам, а также результат интерференции усиленного сигнала с первичным выглядят как «сверхискажение» исходного сигнала.*

**Ключевые слова:** усиливающая среда, волновой пакет, дисперсия, скорость распространения сигнала.

1. Данная работа посвящена изучению распространения сигнала (волнового пакета), несущая частота которого  $\omega_0$  близка к частоте одной из спектральных линий усиления активной (усиливающей) среды. Обычно распространение волнового пакета в диспергирующей среде проводится в рамках первого или второго порядка классической теории дисперсии волнового пакета в среде без поглощения [1, 2]. Этот подход вполне оправдывает себя в случае консервативной или слабо поглощающей среды. Если же в среде имеются одна или несколько спектральных линий усиления и ширина спектра сигнала не мала в сравнении с шириной спектральной линии<sup>1</sup>, ситуация качественно меняется. Дело в том, что экспоненциальное нарастание мощности сигнала в первую очередь происходит на частотах, близких к центральной частоте спектральной линии усиления. В результате при достаточной протяженности трассы спектр сигнала начинает почти совпадать с наблюдаемым комплексным форм-фактором спектральной линии усиления и практически не зависит от исходных параметров сигнала (за исключением линейной зависимости от исходной плотности спектра сигнала на центральной частоте спектральной линии). Более того, поскольку с ростом толщины слоя вещества происходит так называемая нормализация наблюдаемого профиля спектральной линии усиления, форма сигнала становится универсальной (гауссовой) для любой формы спектральной линии усиления [3, 4].

<sup>1</sup> Эта ситуация в конце концов неизбежно возникает с ростом оптической толщины слоя вещества (в результате хорошо известного явления сужения наблюдаемого профиля спектральной линии) при любой ширине спектральной линии и любой исходной длительности сигнала.

**Н.С.Бухман.** Самарская государственная архитектурно-строительная академия, Россия, 443001 Самара, ул. Молодогвардейская, 194; e-mail: buhman@ssaba.smr.ru

Поступила в редакцию 23 июня 2003 г., после доработки – 4 ноября 2003 г.

Актуальность настоящей работы связана с интенсивно развивающимися в последнее время исследованиями по сверхсветовой (или отрицательной) групповой скорости светового импульса в сильно диспергирующей усиливающей среде [5–7]. В этих исследованиях рост мощности сигнала (приводящий к нелинейным эффектам типа насыщения усиления) является мешающим фактором. Поэтому его устраняют путем неселективного (или слабо селективного) по частоте ослабления сигнала, что позволяет оставаться в рамках линейного рассмотрения даже при большой оптической толщине слоя вещества. В результате возникает задача о распространении светового импульса через оптически толстый слой линейно усиливающей среды, которую мы и исследуем в данной работе.

2. Рассмотрим распространение вдоль оси  $z$  сигнала  $E(z, t)$  с частотой несущей  $\omega_0$  и комплексной огибающей  $A(z, t)$ . Предполагая, что сигнал является узкополосным (ширина спектра сигнала мала в сравнении с частотой несущей  $\omega_0$ , но не обязательно мала в сравнении с шириной спектральной линии), для временных и спектральных характеристик сигнала имеем следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \\ E(z, \omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} E(z, t) \exp(i\omega t) dt, \\ E(z, t) &= A(z, t) \exp(-i\omega_0 t) + A^*(z, t) \exp(i\omega_0 t), \\ A(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, \Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega, \\ A(z, \Omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp(i\Omega t) dt, \\ A(z, \Omega) &= E(z, \omega), \quad \omega = \omega_0 + \Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $E(z, t)$  и  $E(z, \omega)$  – высокочастотный сигнал и его высокочастотный спектр (сосредоточенный вблизи частоты несущей  $\omega_0$ );  $A(z, t)$  и  $A(z, \Omega)$  – низкочастотная комплексная огибающая и ее низкочастотный спектр. Зависимость всех перечисленных функций от  $z$  связана с деформацией сигнала при его распространении в среде.

Пусть сигнал распространяется в среде с показателем преломления

$$n(\omega) = n_0 + \Delta n(\omega), \quad (2)$$

где  $n_0$  – нерезонансная часть показателя преломления среды<sup>2</sup>, слабо зависящая от частоты сигнала вблизи резонансной частоты спектральной линии  $\omega_0$ ;  $\Delta n(\omega)$  – резонансная часть показателя преломления среды, сильно зависящая от частоты сигнала вблизи  $\omega_0$ . Тогда для комплексной передаточной функции слоя вещества толщиной  $z$  имеем выражение

$$F(z, \omega) = \exp[ikn(\omega)z] = \exp(ikn_0z) \exp[ik\Delta n(\omega)z], \quad (3)$$

где  $k = \omega/c$ . Введя коэффициент усиления света по амплитуде в середине спектральной линии

$$\alpha_0 = ik_0\Delta n(\omega_0), \quad k_0 = \omega_0/c \quad (4)$$

и нормированный на единицу в центре спектральной линии  $\omega_0$  комплексный форм-фактор линии

$$g(\Omega) = ik\alpha_0^{-1}\Delta n(\omega_0 + \Omega), \quad (5)$$

нетрудно записать передаточную функцию слоя вещества в виде

$$F(z, \omega) = \exp(ikn_0z) \exp[\xi g(\Omega)], \quad (6)$$

где  $\xi = \alpha_0 z$  – оптическая толщина слоя вещества. Эту функцию можно также представить в виде

$$F(z, \omega) = \exp(ikn_0z) [1 + F^f(\xi, \Omega)], \quad (7)$$

где  $\exp(ikn_0z)$  – передаточная функция слоя вещества вдали от спектральной линии;

$$F^f(\xi, \Omega) = (\exp \xi - 1)\gamma(\xi, \Omega) \quad (8)$$

– дополнительная (связанная со спектральной линией) передаточная функция слоя вещества. Введенную в (8) функцию

$$\gamma(\xi, \Omega) = \frac{\exp[\xi g(\Omega)] - 1}{\exp \xi - 1} \quad (9)$$

естественно назвать наблюдаемым комплексным форм-фактором спектральной линии усиления. Эта функция является комплексным аналогом наблюдаемого профиля спектральной линии при ненулевой оптической тол-

<sup>2</sup>Строго говоря,  $n_0$  – не константа, а плавно (вблизи  $\omega_0$ ) зависящая от частоты часть показателя преломления, обусловленная вкладом всех других (кроме  $\omega_0$ ) резонансных частот среды. Этой плавной зависимостью от частоты мы пренебрегаем, предполагая, что спектр сигнала достаточно узок – разумеется, не в сравнении с шириной спектральной линии, а в сравнении с характерным интервалом заметного изменения нерезонансной части показателя преломления среды.

щине слоя вещества [3], имеет «правильную» асимптотику ( $\gamma(\xi, 0) = 1, \gamma(\xi, \pm\infty) = 0$ ) и при малой толщине слоя ( $z = 0$ ) переходит в обычный комплексный форм-фактор спектральной линии ( $\gamma(0, \Omega) = g(\Omega)$ ).

Эволюция спектра огибающей сигнала с ростом пройденного расстояния  $z$  описывается уравнением

$$A(z, \Omega) = A(0, \Omega)F(z, \omega_0 + \Omega) = A^p(z, \Omega) + A^a(z, \Omega), \quad (10)$$

где

$$A^p(z, \Omega) = A(0, \Omega) \exp(ikn_0z), \quad (11)$$

$$A^a(z, \Omega) = A(0, \Omega) \exp(ikn_0z) F^f(z, \Omega)$$

– спектры двух компонент сигнала, существенно различающихся по своим характеристикам. Компонента  $A^p$  соответствует просто задержанному во времени исходному сигналу и далее будет именоваться первичным сигналом; компонента  $A^a$  отвечает той части сигнала, свойства которой в первую очередь определяются экспоненциальным возрастанием амплитуды, а также сужением и нормализацией спектра с ростом оптической толщины слоя. Далее эту часть сигнала будем именовать усиленным сигналом.

3. Для нахождения временной зависимости  $A(z, t)$  в любой точке  $z$  по зависимости  $A(0, t)$  достаточно провести прямое (для определения  $A(0, \Omega)$ ) и обратное (для определения  $A(z, t)$ ) преобразования Фурье. В общем случае эта процедура может быть проделана только численно, поэтому для получения аналитических оценок мы воспользуемся методами кумулянтного анализа [8, 9], т. е. представим спектр сигнала в виде разложения

$$A(z, \Omega) = \frac{M_0(z)}{2\pi} \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\Omega)^n}{n!} k_n(z) \right], \quad (12)$$

где  $M_0(z)$  – плотность спектра сигнала в точке  $z$  при частоте  $\Omega = 0$ ; функции  $k_n(z)$  – кумулянты сигнала в точке  $z$ . Для отыскания кумулянт огибающей не обязательно знать ее фурье-образ, поскольку кумулянты огибающей  $k_n(z)$  связаны с ее моментами  $m_n(z)$  известными [8, 9] соотношениями ( $k_1 = m_1, k_2 = m_2 - m_1^2, k_3 = m_3 - 3m_1m_2 + 2m_1^3$  и т. д.), а моменты могут быть найдены непосредственно по огибающей:

$$m_n(z) = M_0^{-1}(z) \int_{-\infty}^{+\infty} t^n A(z, t) dt, \quad M_0(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) dt. \quad (13)$$

Кумулянты огибающей сигнала имеют простой физический смысл (это – первое достоинство метода кумулянт<sup>3</sup>). Первый кумулянт  $k_1(z)$  соответствует средней точке сигнала и потому его естественно [5, 10] отождест-

<sup>3</sup>Метод моментов (которые при  $n \leq 2$  совпадают с соответствующими кумулянтами) давно и успешно [10] применяется для изучения эволюции усредненных характеристик волнового пакета в диспергирующей среде. Специфика рассматриваемой задачи состоит в том, что использование высших ( $n > 2$ ) кумулянт (которые уже не совпадают с соответствующими моментами) позволяет доказать, что в данном случае с ростом пройденного расстояния происходит нормализация огибающей сигнала. В результате оказывается, что первые два кумулянта (они же – первый начальный и второй центральный моменты) сигнала характеризуют не только «центр тяжести» и «среднюю ширину» сигнала, но и позволяют (в случае достаточной толщины слоя вещества) полностью охарактеризовать его (гауссову) форму.

вить с моментом времени  $\tau(z)$  прохождения «центра тяжести» сигнала через точку наблюдения  $z$ . Второй кумулянт  $k_2(z)$  можно рассматривать как квадрат среднеквадратичной продолжительности сигнала  $T(z)$ . Введем обозначения

$$\tau(z) \equiv k_1(z), \quad T(z) \equiv [k_2(z)]^{1/2}. \quad (14)$$

Третий кумулянт (именуемый в теории вероятностей коэффициентом асимметрии) определяет степень асимметричности сигнала во времени относительно его средней точки  $\tau(z)$ . Нормированный коэффициент асимметрии  $\varkappa_3(z) = k_3(z)/k_2^{3/2}(z)$ . При  $\varkappa_3(z) > 0$  передний фронт сигнала круче заднего и локальный максимум огибающей смещен от средней точки сигнала  $\tau(z)$  к его головной части. При  $\varkappa_3(z) < 0$  ситуация противоположна.

Пусть разложение наблюдаемого комплексного фактора спектральной линии в ряд по степеням отстройки  $\Omega$  имеет вид

$$\gamma(\xi, \Omega) = \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \mu_n(\xi) \right], \quad (15)$$

где  $x = 2\Omega/\Delta\Omega_{1/2}$  – нормированная отстройка;  $\Delta\Omega_{1/2}$  – полуширина спектральной линии (характерное время когерентности излучения связано с  $\Delta\Omega_{1/2}$  соотношением  $\tau_{\text{coh}} = 2/\Delta\Omega_{1/2}$ ). Функции  $\mu_n(\xi)$  в (15) определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mu_1(\xi) &= p(\xi)\xi\beta_1, \quad p(\xi) = \frac{1}{1 - \exp(-\xi)}, \\ \mu_2(\xi) &= p(\xi)\xi[\beta_2 + \beta_1^2(1-p)\xi], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mu_3 = p(\xi)\xi[\beta_3 + 3\beta_1\beta_2(1-p)\xi + \beta_1^3(p-1)(2p-1)\xi^2],$$

где (бесконечный) набор коэффициентов

$$\beta_n = (-i)^n \left. \frac{d^n g}{dx^n} \right|_{x=0} \quad (17)$$

может рассматриваться как один из способов задания форм-фактора спектральной линии  $g(x)$ . В случаях лоренцевского (L) (столкновительное или радиационное уширение линии), гауссова (G) (доплеровское уширение) и времяпролетного (T) контуров спектральной линии имеют соответственно [11,12]

$$\beta_1^L = 1, \quad \beta_2^L = 2, \quad \beta_3^L = 6, \quad \beta_1^G = 2 \left( \frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} \approx 0.939,$$

$$\beta_2^G = 2 \ln 2 \approx 1.386, \quad \beta_3^G = 8 \ln 2 \left( \frac{\ln 2}{\pi} \right)^{1/2} \approx 2.605,$$

$$\beta_1^T = \frac{2x_0}{3} \approx 0.927, \quad \beta_2^T = \frac{2x_0^2}{3} \approx 1.288, \quad \beta_3^T = \frac{4x_0^3}{5} \approx 2.148,$$

где  $x_0 \approx 1.39$  – корень уравнения  $\text{sinc}^2 x = 1/2$ .

При нулевой оптической толщине слоя ( $\xi = 0$ )

$$\mu_1 = \beta_1, \quad \mu_2 = \beta_2 - \beta_1^2, \quad \mu_3 = \beta_3 - 3\beta_1\beta_2 + 2\beta_1^3, \quad (18)$$

в случае оптически толстого слоя ( $\xi \gg 1$ )

$$\mu_n(\xi) \rightarrow \beta_n \xi. \quad (19)$$

Теперь кумулянтное представление передаточной функции усиленного сигнала имеет вид

$$F^f = M_0^f \exp \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i\Omega)^n}{n!} k_n^f \right], \quad (20)$$

где

$$M_0^f = \exp \xi - 1; \quad k_n^f = \mu_n(\xi) \tau_{\text{coh}}^n. \quad (21)$$

Обрыв бесконечного ряда под экспонентой в (20) не приводит к нарушению правильного асимптотического поведения функции  $\gamma(\xi, \Omega)$  и передаточной функции слоя вещества  $F(z, \omega_0 + \Omega)$  при  $\Omega \rightarrow \pm\infty$ . Это – второе основное достоинство метода кумулянтов. В теории вероятностей обрыв этого ряда практикуется для определения случайной величины конечным числом кумулянтов (чаще всего используется нормальное приближение (два члена) или эксцессное (четыре члена)).

Фильтр  $F^f$  с ростом оптической толщины слоя  $\xi$  не только сужается [11,12] по закону  $\sim \xi^{-1/2}$ , но и нормализуется (т. е. в пределе  $\xi \rightarrow \infty$  становится гауссовым [3]). В этом нетрудно убедиться, рассмотрев поведение нормированных кумулянтов с индексами больше 2 при  $\xi \rightarrow \infty$  и с учетом (19):  $\varkappa_n^f(\xi) = k_n^f(\xi) [k_2^f(\xi)]^{-n/2} \rightarrow \beta_n \beta_2^{-n/2} \xi^{1-n/2} \rightarrow 0$ .

Таким образом, при возрастании оптической толщины слоя  $\xi$  функция  $F^f$  становится гауссовой и полностью характеризуется двумя первыми кумулянтами  $k_1^f(\xi)$  и  $k_2^f(\xi)$ , а также нормировочным фактором  $M_0^f(\xi)$ .

4. Пусть при  $z = 0$  временная зависимость сигнала определяется функцией  $A^{(0)}(t) \equiv A(0, t)$ . Тогда для «стартовых» параметров сигнала имеем

$$\begin{aligned} M_0^{(0)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) dt, \\ \tau_0 = k_1^{(0)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} t A^{(0)}(t) dt / \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) dt, \end{aligned} \quad (22)$$

$$T_0 = (k_2^{(0)})^{1/2} = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \tau_0)^2 A^{(0)}(t) dt / \int_{-\infty}^{+\infty} A^{(0)}(t) dt \right]^{1/2}.$$

Ясно (см. (11)), что эволюция первичного сигнала сводится к его сдвигу во времени (на время задержки сигнала в нерезонансной среде) и соответствующему изменению фазы:

$$A^p(z, t) = A^{(0)}(t - \tau_v(z)) \exp(ik_0 n_0 z), \quad \tau_v = zn_0/c. \quad (23)$$

Поскольку перемножение фурье-образов сигналов эквивалентно сложению их кумулянтов (это – третье достоинство метода кумулянтов), для параметров усиленного сигнала имеем

$$M_0^a(z) = M_0^{(0)} M_0^f(\xi) \exp(ik_0 n_0 z), \quad (24)$$

$$k_n^a(z) = k_n^{(0)} + \delta_{n1} \tau_v(z) + \tau_{\text{coh}}^n \mu_n(\xi).$$

В частности, для момента прохождения средней точки усиленного сигнала через точку  $z$  ( $\tau_a(z)$ ) и для среднеквадратичной длительности усиленного сигнала  $T_a(\xi)$  получаем выражения

$$\tau_a(z) = \tau_0 + \tau_v(z) + \tau_{\text{coh}} \mu_1(\xi), \quad T_a^2(\xi) = T_0^2 + \tau_{\text{coh}}^2 \mu_2(\xi). \quad (25)$$

Для высших нормированных кумулянтов усиленного сигнала имеем  $\varkappa_n^a(\xi) = [\varkappa_n^{(0)} (T_0/\tau_{\text{coh}})^n + \mu_n(\xi)] [(T_0/\tau_{\text{coh}})^2 +$

$\mu_2(\xi)^{-n/2}$ . Как и следовало ожидать, при  $\xi \rightarrow \infty$  (точнее, при  $\xi \gg \max\{1, (T_0/\tau_{\text{coh}})^2\}$ ) и  $n > 2$  эти кумулянты малы и усиленный сигнал оказывается гауссовым волновым пакетом. Полагая равными нулю все кумулянты сигнала с  $n > 2$ , нетрудно выписать выражение для его комплексной огибающей в гауссовом приближении:

$$A(z, t) = A^P(z, t) + A^a(z, t),$$

$$A^P(z, t) = A^{(0)}(t - \tau_v(z)) \exp(ik_0 n_0 z), \quad (26)$$

$$A^a(\xi, t) = \frac{M_0^{(0)}(\exp \xi - 1)}{\sqrt{2\pi T_a^2(\xi)}} \exp \left\{ -\frac{[t - \tau_a(\xi)]^2}{2T_a^2(\xi)} + ik_0 n_0 z \right\}.$$

Для проведения вычислений по формулам (25), (26) достаточно знать форму сигнала при  $z = 0$ , коэффициент усиления в центре линии  $\alpha_0$ , а также время когерентности излучения  $\tau_{\text{coh}}$  и коэффициенты комплексного форм-фактора линии  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Эти формулы упрощаются при большой оптической толщине слоя вещества ( $\xi \gg 1$ ), когда в (25) можно пренебречь слагаемым  $T_0^2$  по сравнению с  $\tau_{\text{coh}}^2 \mu_2(\xi)$ , а для функций  $\mu_n(\xi)$  использовать формулу (19):

$$A^a(\xi, t) = A_{\text{max}}^a(\xi) \exp \left[ -\frac{(t - \tau_0 - zn_0/c - \tau_{\text{coh}} \beta_1 \xi)^2}{2\tau_{\text{coh}}^2 \beta_2 \xi} \right], \quad (27)$$

$$A_{\text{max}}^a(\xi) = \frac{M_0^{(0)} \exp(ik_0 z + \xi)}{\tau_{\text{coh}} (2\pi \beta_2 \xi)^{1/2}}.$$

Видно, что при  $\xi \gg 1$  параметры усиленного сигнала не зависят ни от формы, ни от длительности исходного сигнала и полностью определяются оптической толщиной слоя вещества  $\xi$  и плотностью спектра исходного сигнала на частоте спектральной линии  $M_0^{(0)}$ . При распространении в усиливающей среде энергия усиленного сигнала возрастает с ростом  $\xi$  по закону  $\xi^{-1/2} \exp 2\xi$ , максимальная (по времени) амплитуда – по закону  $\xi^{-1/2} \exp \xi$ , а максимальная (по времени) интенсивность – по закону  $\xi^{-1} \exp 2\xi$ . При этом длительность усиленного сигнала увеличивается по закону  $\xi^{1/2}$ , т.е. заметно медленнее, чем длительность обычного сигнала в диспергирующей среде ( $\sim z$ , см. [1, 2]).

Определив скорость сигнала  $v$  с помощью соотношения  $v = [d\tau(z)/dz]^{-1}$ , нетрудно убедиться, что в случае  $\xi \gg 1$  скорость усиленного сигнала не зависит от пройденного расстояния и в точности равна обычной групповой скорости волнового пакета  $v_{\text{gr}} = (\partial k / \partial \omega)^{-1}$  с частотой несущей  $\omega_0$ , распространяющегося в среде с показателем преломления (2). Скорость распространения первичного сигнала  $c/n_0$  совпадает с фазовой (или групповой<sup>4</sup>) скоростью распространения сигнала вдали от спектральной линии. Поэтому скорость усиленного сигнала может существенно отличаться от скорости первичного сигнала, который движется с «нерезонансной» скоростью и в данном случае играет роль предвестника.

Обычно возникновение предвестника Бриллюэна–Зоммерфельда ассоциируется с наличием в спектре сигнала частот, больших в сравнении с собственными частотами среды (в нашем случае  $\omega \gg \omega_0$ ,  $n(\omega) \approx 1$ ), т.е. с разрывным или почти разрывным характером сигнала;

предвестник при этом обычно является широкополосным (неквазимонохроматическим) сигналом. Такая ситуация не является единственно возможной. Например, сигнал может быть непрерывным, но его длительность малой в сравнении с периодом любых собственных колебаний среды, т.е. ширина спектра сигнала  $\Delta\omega \gg \omega_0$ . В этом случае почти весь сигнал попадает в область  $n(\omega) \approx 1$  и предвестник практически совпадает с самим первичным сигналом.

Возможна также и рассмотренная в настоящей работе ситуация, когда длительность квазимонохроматического сигнала велика в сравнении с периодом собственных колебаний среды, но мала в сравнении с временем их релаксации ( $\Delta\Omega_{1/2} \ll \Delta\omega \ll \omega_0$ ). При этом сигнал является «широкополосным для данной среды» ( $\Delta\omega \gg \Delta\Omega_{1/2}$ ), но «узкополосным сам по себе» ( $\Delta\omega \ll \omega_0$ ), т.е. квазимонохроматическим. Поскольку в данном случае (как и в предыдущем) почти весь первичный сигнал попадает в «область без дисперсии» ( $n(\omega) \approx n_0$ ,  $\omega \notin (\omega_0 - \Delta\Omega_{1/2}, \omega_0 + \Delta\Omega_{1/2})$ ) и его предвестник практически совпадает с самим первичным сигналом, то предвестник оказывается квазимонохроматическим (узкополосным) сигналом, распространяющимся без искажений, но не с вакуумной, а с «нерезонансной» скоростью света в данном веществе  $c/n_0$ .

Так, например, в активной среде He–Ne-лазера (при усилении сигнала на длине волны  $\lambda = 3.39$  мкм) имеем [12]  $\alpha_0 = 2.3 \text{ м}^{-1}$  (коэффициент усиления по интенсивности 20 дБ/м),  $\tau_{\text{coh}} = 1.1 \text{ нс}$  ( $\Delta\nu_D = 300 \text{ МГц}$ ),  $\beta_1^G = 0.94$  (доплеровское уширение). При этих параметрах среды скорость усиленного сигнала  $v_a = 0.6c$ . Аналогично для активной среды CO<sub>2</sub>-лазера низкого давления [12] (при коэффициенте усиления сигнала  $\alpha_0 = 0.46 \text{ м}^{-1}$  на  $\lambda = 10.6$  мкм (коэффициент усиления по интенсивности 4 дБ/м),  $\tau_{\text{coh}} = 6.4 \text{ нс}$  ( $\Delta\nu_D = 50 \text{ МГц}$ ),  $\beta_1^G = 0.94$  (доплеровское уширение)) имеем  $v_a = 0.55c$ . В обоих случаях скорость усиленного сигнала почти в два раза меньше «нерезонансной» скорости света в этих газах (которая практически равна скорости света в вакууме).

Отмеченную выше аналогию между предвестником Зоммерфельда–Бриллюэна и рассмотренным в данной работе узкополосным первичным сигналом не следует понимать слишком буквально – просто оба эти явления имеют общую причину и похожие следствия. Причина заключается в том, что ни одна среда, строго говоря, не способна просто ослабить или изменить падающий на нее (первичный) сигнал; она способна лишь добавить к нему свой собственный вынужденный сигнал (в настоящей работе именуемый усиленным), интерференция которого с первичным сигналом может вызвать изменение последнего. Если, например, сумма первичного и вынужденного сигналов похожа на задержанный или ослабленный первичный сигнал, то говорят о задержке или ослаблении сигнала средой. При этом в любой среде вынужденный сигнал способен возникать только вблизи некоторых (резонансных для данной среды) частот. Поэтому та часть исходного сигнала, спектр которой не попадает в окрестность этих резонансных частот (предвестник), «не чувствует» их и распространяется как в нерезонансной среде.

Например, предвестник Зоммерфельда–Бриллюэна возникает из-за наличия в спектре сигнала частот, больших в сравнении с любыми собственными частотами среды ( $|\omega| \gg \omega_0$ ). Его распространение со скоростью света в вакууме связано с неспособностью среды создать сигнал

<sup>4</sup>Мы уже пренебрегли частотной зависимостью нерезонансной части показателя преломления среды, поэтому «нерезонансная фазовая» и «нерезонансная групповая» скорости совпадают.

на этих частотах, в результате чего соответствующая часть первичного сигнала (предвестник) не интерферирует с вынужденным излучением среды (просто не с чем интерферировать), а потому «не чувствует» среду и распространяется как в вакууме.

Рассмотренный в настоящей работе первичный сигнал можно считать предвестником огибающей узкополосного сигнала, который возникает из-за наличия в спектре огибающей сигнала частот, больших в сравнении с шириной спектральной линии ( $|\Omega| \gg \Delta\Omega_{1/2}$ ). Его распространение с «нерезонансной» скоростью света в данном веществе связано с неспособностью данной спектральной линии (точнее, соответствующего резонанса среды) создать сигнал на этих частотах, в результате чего соответствующая часть первичного сигнала не интерферирует (точнее – слабо интерферирует, см. ниже) с вынужденным излучением среды, связанным с данным резонансом, а потому «не чувствует» данную спектральную линию и распространяется как в нерезонансной среде.

5. Применим полученные выше общие соотношения для анализа распространения гауссова импульса длительностью  $T_1$  в активной среде. Пусть временная зависимость сигнала  $E(t)$  при  $z = 0$  имеет вид

$$E(t) = A_1^{(0)}(t) \exp(-i\omega_1 t) + A_1^{(0)*}(t) \exp(i\omega_1 t), \quad (28)$$

$$A_1^{(0)}(t) = \exp(-t^2/T_1^2),$$

где  $|\omega_1 - \omega_0| \ll \omega_0$ . Поскольку в общем случае частота несущей  $\omega_1$  не совпадает с центральной частотой линии усиления  $\omega_0$ , для использования общих соотношений (22)–(26) необходимо представить (28) в форме (1). Для этого достаточно ввести функцию  $A^{(0)}(t)$  с помощью соотношения

$$A^{(0)}(t) = \exp(-t^2/T_1^2 - i\Delta\omega t),$$

где  $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_0$  – сдвиг частоты несущей пакета относительно центра спектральной линии. После этого для кумулянтов сигнала (28) имеем

$$M_0^{(0)} = T_1 \sqrt{\pi} \exp(-x_1^2), \quad \tau_0 = -ix_1 T_1, \quad T_0^2 = T_1^2/2, \quad (29)$$

где  $x_1 = \Delta\omega T_1/2$  – нормированный на длительность импульса сдвиг несущей частоты импульса относительно центра линии.

При  $x_1 \neq 0$  огибающая сигнала (на частоте  $\omega_0$ ) не является вещественной функцией, поэтому кумулянты сигнала теряют наглядность (см. п.3). Тем не менее их использование приводит (как показано ниже) к правильным результатам, потому что именно эти кумулянты (которые могут быть положительными, отрицательными и даже комплексными) по-прежнему правильно описывают спектр сигнала в окрестности точки  $\Omega = 0$  ( $\omega = \omega_0$ ) и именно эта часть спектра сигнала в первую очередь определяет характеристики усиленного сигнала.

Из (29) видно, что при  $x_1 \ll 1$  сдвигом несущей сигнала относительно центра спектральной линии можно пренебречь. В этом случае  $M_0^{(0)} = T_1 \sqrt{\pi}$ ,  $\tau_0 = 0$ ,  $T_0^2 = T_1^2/2$ . Если, кроме того, выполнено соотношение  $T_1 \ll \tau_{\text{coh}}$ , т. е. длительность сигнала мала в сравнении с временем когерентности линии, то в (25) при любой оптической толщине слоя вещества можно положить  $\tau_0 = T_0 = 0$ . В результате мы приходим к задаче о распространении  $\delta$ -им-

пульса в активной среде. При этом с точностью до нормировки огибающая усиленного сигнала оказывается комплексной огибающей функции отклика слоя вещества. Ясно, что полученные при решении этой задачи результаты применимы для любого достаточно короткого сигнала при условии, что его длительность мала в сравнении с временем когерентности спектральной линии, а сдвиг несущей относительно центра спектральной линии мал в сравнении с собственной шириной спектра сигнала. При указанных выше значениях параметров среды, типичных для He–Ne- и CO<sub>2</sub>-лазеров, речь идет об импульсах с характерной длительностью порядка долей наносекунды для He–Ne-лазера и наносекунды – для CO<sub>2</sub>-лазера.

На рис.1 приведены результаты численного счета (сплошные кривые) и гауссовой аппроксимации (26) (пунктирные кривые) для малой ( $\xi = 0.5$ ), промежуточной ( $\xi = 2$ ) и большой ( $\xi = 8$ ) оптических толщин слоя вещества. По оси абсцисс отложено (в единицах времени когерентности линии) время в сопутствующей системе координат  $\vartheta = (t - zn_0/c)/\tau_{\text{coh}}$ , а по оси ординат – безразмерная ам-

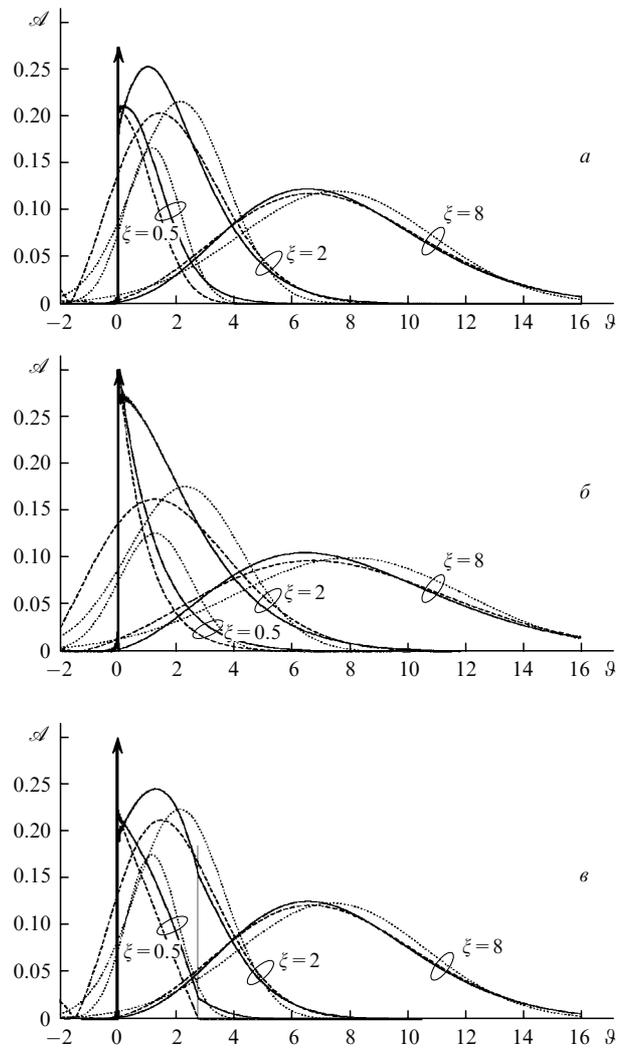


Рис.1. Функции отклика слоя газа при доплеровском (а), столкновительном (б) и времяпролетном (в) механизмах уширения спектральной линии для различных оптических толщин слоя  $\xi$ , полученные по данным численного счета (сплошные кривые), в гауссовом приближении (пунктирные кривые) и с использованием альтернативных приближений (штриховые кривые). Тонкой вертикальной линией (на рис.1, в) отмечен излом модуля амплитуды сигнала.

плитуда  $\mathcal{A} = |A(z, t)|(\tau_{\text{coh}}/M_0^{(0)}) \exp(-\xi)$  (ср. с (27)). Первичный сигнал (который является дельта-функцией) обозначен вертикальной стрелкой. Выбор масштаба по оси ординат в явном виде учитывает (и таким образом исключает из рассмотрения) экспоненциальный рост усиленного сигнала по мере его распространения в слое вещества. Заметим, что экспоненциальный рост сигнала во многих случаях компенсируется путем введения неселективного по частоте поглощения.

Штриховыми кривыми на рис. 1 показаны результаты расчетов с использованием альтернативных (по отношению к гауссову) приближений. При  $\xi = 2$  и 8 в качестве таковых использовались трехкумулянтное приближение. В этом приближении форма усиленного сигнала восстанавливалась не по двум первым кумулянтам (гауссова аппроксимация), а по трем (т. е. учитывался коэффициент асимметрии  $\kappa_3(z)$ ). При  $\xi = 0.5$  в качестве разумной альтернативы использовалась функция отклика поляризуемости среды (см., напр., [1]), являющаяся фурье-образом комплексного форм-фактора спектральной линии  $g(\Omega)$ .

Действительно, при  $\xi \ll 1$  из (8), (9) следует, что  $F^f(\xi, \Omega) = \xi g(\Omega)$  и для комплексной амплитуды усиленного сигнала  $A^a$  вместо (26) нетрудно получить выражение

$$A^a(\xi, t) = \frac{T_1 \xi}{2\pi} g(t - \tau_v(\xi)), \quad (30)$$

где

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\Omega) \exp(-i\Omega t) dt \quad (31)$$

– фурье-образ комплексного форм-фактора спектральной линии усиления. В результате при  $\xi \ll 1$  вместо (26) для гауссова, лоренцевского и времяпролетного профилей спектральной линии имеем выражения

$$A_G^a(\xi, t) = \frac{T_1 \xi}{(\pi \ln 2)^{1/2} \tau_{\text{coh}}} \exp \left\{ -\frac{[t - \tau_v(z)]^2}{4 \ln 2 \tau_{\text{coh}}^2} \right\} \eta(t - \tau_v(z)),$$

$$A_L^a(\xi, t) = \frac{T_1 \xi}{\tau_{\text{coh}}} \exp \left[ -\frac{t - \tau_v(z)}{\tau_{\text{coh}}} \right] \eta(t - \tau_v(z)), \quad (32)$$

$$A_T^a(\xi, t) = \frac{T_1 \xi}{x_0 \tau_{\text{coh}}} \left[ 1 - \frac{t - \tau_v(z)}{2x_0 \tau_{\text{coh}}} \right] \eta \left[ 1 - \frac{t - \tau_v(z)}{2x_0 \tau_{\text{coh}}} \right] \times \eta(t - \tau_v(z)),$$

где  $\eta(x)$  – функция Хевисайда;  $x_0 \approx 1.39$ .

Сопоставив (17) и (31), нетрудно выяснить и физический смысл коэффициентов  $\beta_n$ . Эти коэффициенты являются просто моментами функции  $g(t)$ , выраженными в единицах времени когерентности линии  $\tau_{\text{coh}}$ . Аналогично коэффициенты  $\mu_n(0)$  (18) – соответствующие кумулянты функции  $g(t)$ . В частности,  $\mu_1(0)\tau_{\text{coh}} = \beta_1 \tau_{\text{coh}}$  – среднее время запаздывания отклика поляризуемости среды на  $\delta$ -образное воздействие (на частоте несущей  $\omega_0$  длительность импульса должна быть мала в сравнении с  $\tau_{\text{coh}}$  и велика в сравнении с  $1/\omega_0$ ), а  $\mu_2(0)\tau_{\text{coh}}^2 = (\beta_2 - \beta_1^2)\tau_{\text{coh}}^2$  – квадрат среднеквадратичной длительности отклика поляризуемости среды на  $\delta$ -образное воздействие.

Обсудим общий характер распространения короткого (по сравнению с временем когерентности линии) сиг-

нала в усиливающей среде. Из рис. 1 видно, что в этом случае не происходит модификации параметров сигнала как целого, т. к. речь идет о распространении первичного сигнала (который ведет себя так же, как и в нерезонансной среде без дисперсии) и усиленного сигнала, являющегося «шлейфом» первичного. При малых оптических толщинах слоя  $\xi$  амплитуда «шлейфа» линейно растет с пройденным расстоянием, а его временная зависимость совпадает с временной зависимостью отклика поляризуемости среды на внешнее воздействие (и различна для разных механизмов уширения линии). На данной стадии усиления усиленный сигнал мал в сравнении с первичным и не испытывает самовоздействия; с этим и связана неизменность его формы и его неуклонное следование за первичным сигналом.

При  $\xi \ll 1$  речь идет о возмущении поляризуемости среды в приближении заданного поля первичного сигнала, который доминирует над усиленным. Тем не менее с ростом пройденного расстояния амплитуда усиленного сигнала («шлейфа») растет, т. е. происходит накопление возмущения поляризуемости среды. В результате при  $\xi \sim 1$  амплитуда усиленного сигнала возрастает настолько, что его влиянием на поляризуемость среды уже нельзя пренебрегать (спектральная плотность усиленного сигнала в центре спектральной линии усиления становится сравнимой со спектральной плотностью первичного сигнала). Поэтому усиленный сигнал начинает усиливать сам себя и «обособляется» от первичного, т. е. имеет место временное разделение первичного и усиленного сигналов, а также начинает формироваться универсальный (гауссов) профиль усиленного сигнала. При  $\xi \gg 1$  первичный и усиленный сигналы окончательно разделяются, причем в этой области усиленный сигнал имеет универсальный (гауссов) профиль, параметры которого не зависят от характеристик первичного сигнала, а определяются пройденным расстоянием и параметрами спектральной линии ( $\alpha_0, \tau_{\text{coh}}, \beta_1, \beta_2$ ).

Из рис. 1 видно, что при большой оптической толщине слоя вещества  $\xi$  (например,  $\xi = 8$ ) согласие между аналитическим гауссовым приближением и результатами численного счета можно считать количественным, а при умеренных значениях  $\xi$  (например,  $\xi = 2$ ) – качественным. При малых же  $\xi$  (например,  $\xi = 0.5$ ) согласие между аналитическими и численными результатами оставляет желать лучшего. Тем не менее при любом  $\xi$  площади под аналитической и численной кривыми совпадают, равно как и положения их средних точек и характерные длительности сигналов. Этого и следовало ожидать в свете проведенного в п.3 обсуждения смысла усредненных характеристик (кумулянтов) сигнала: гауссово приближение при любом  $\xi$  дает правильные значения перечисленных выше средних характеристик сигнала, для расчета же временной зависимости сигнала его можно применять без дополнительных оговорок только при больших  $\xi$ .

Аналитический расчет в приближении заданного поля (32) хорошо согласуется с численными данными в случае малых  $\xi$  (например,  $\xi = 0.5$ ), но уже при умеренных значениях  $\xi$  (например,  $\xi = 2$ ) его результаты не имеют отношения к реальности.

Обсудим теперь различие результатов, полученных для разных механизмов уширения спектральных линий. При сравнении рис. 1, а и в нетрудно заметить, что зависимости для доплеровского и времяпролетного уширения удивительно близки. Это связано с близостью коэф-

коэффициентов  $\beta_n$  для гауссова и времяпролетного форм-факторов линии. В этих двух случаях уже при  $\xi = 2$  отчетливо наблюдается отрыв усиленного сигнала от первичного, а при  $\xi = 8$  – практически полная его нормализация. В случае же лоренцевского контура линии (столкновительное уширение) при  $\xi = 2$  отрыв усиленного сигнала от первичного только начинает намечаться, да и нормализация усиленного сигнала при  $\xi = 8$  еще далека от завершения. Причина этих различий связана с достаточно большим коэффициентом асимметрии фурье-образов  $g(t)$  лоренцевского форм-фактора линии  $g(\Omega)$ . Действительно, для функции отклика  $g(t)$  нормированный коэффициент асимметрии  $\kappa_3(0) = (\beta_3 - 3\beta_1\beta_2 + 2\beta_1^3) \times (\beta_2 - \beta_1^2)^{-3/2}$ , откуда получаем  $\kappa_3(0) = 0.995$  для гауссова форм-фактора, 0.566 – для времяпролетного и 2 – для лоренцевского.

Можно также указать на «непреднамеренную» иллюстрацию распространения резких (в сравнении с временем когерентности спектральной линии) фрагментов огибающей сигнала с «нерезонансной» скоростью на рис.1,в. Речь идет об изломе модуля амплитуды сигнала в случае времяпролетного уширения спектральной линии (на рис.1,в он отмечен вертикальной прямой). Этот излом возникает при  $\xi = 0$  как неизбежное следствие формы спектральной линии при времяпролетном уширении (см. (32)) и в дальнейшем перемещается со скоростью  $c/n_0$  (как и должно быть с любым разрывом огибающей сигнала или ее производной), одновременно «путешествуя» по временной огибающей сигнала от ее хвоста к головной части (поскольку сама огибающая перемещается медленнее). Разумеется, на гауссовой аппроксимации (которая «не знает» о предельной скорости распространения возмущений в нерезонансной среде  $c/n_0$ ) никакого излома не наблюдается.

Следующая серия расчетов (рис.2) была проведена для сигнала длительностью  $T_1 = 0.763\tau_{\text{coh}}$  и лоренцевского контура спектральной линии в случае, когда частота несущей сигнала совпадает с частотой спектральной линии. В этом случае ширина спектра сигнала одного порядка с шириной спектральной линии. Выбранные значения параметров позволяют провести сопоставление с аналогичными численными расчетами [5]. Результаты численного счета изображены на рис.2 сплошной кривой, расчет по аналитическим формулам (26) – пунктир-

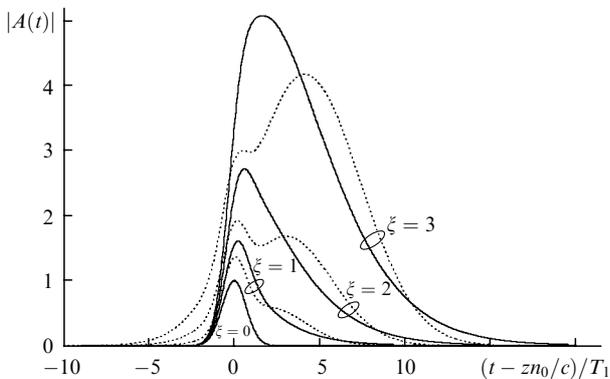


Рис.2. Деформация гауссова волнового пакета при столкновительном механизме уширения спектральной линии для различных оптических толщин слоя  $\xi$ , полученная по данным численного счета (сплошные кривые) и в гауссовом приближении (пунктирные кривые). Несущая частота волнового пакета совпадает с частотой спектральной линии.

ной. Расчеты были выполнены для оптической толщины слоя  $\xi = 0, 1, 2, 3$ .

Из рис.2 видно, что с ростом  $\xi$  последовательно реализуются следующие ситуации: при  $\xi = 1$  усиленный сигнал мал в сравнении с первичным и может считаться его слабым «шлейфом», при  $\xi = 2$  этот «шлейф» становится равным первичному сигналу, а при  $\xi = 3$  первичный сигнал оказывается мал в сравнении с усиленным и практически теряется на его фоне. При дальнейшем увеличении толщины слоя происходит все большая нормализация усиленного сигнала. В этом случае (при совпадении несущей частоты сигнала и центральной частоты спектральной линии) не наблюдается ни пространственного разделения первичного и усиленного сигналов, ни интерференционного «изрезания» профиля суммарного сигнала.

Была выполнена также серия расчетов (рис.3) для изучения влияния сдвига несущей частоты сигнала относительно центральной частоты спектральной линии усиления. Расчеты проводились для того же самого сигнала ( $T_1 = 0.763\tau_{\text{coh}}$ ), несущая частота которого была сдвинута относительно центральной частоты спектральной линии усиления ( $\Delta\omega\tau_{\text{coh}} = 7$ ). В этом случае происходит резкое (см. (29)) уменьшение плотности спектра первичного сигнала вблизи центральной частоты и соответствующее уменьшение усиленного сигнала, который становится заметен только при  $\xi \geq 7$ . Поэтому расчеты были выполнены для оптической толщины слоя  $\xi = 7, 8, 9$ . Ослабление усиленного сигнала и его позднее «рождение» приводят к тому, что он «появляется на свет» уже вполне сформировавшимся (почти гауссовым) и довольно сильно отставшим от первичного, так что в данном случае эти два сигнала оказываются достаточно автономными. Тем не менее экспоненциальное возрастание усиленного сигнала (в сравнении с первичным) «остаётся при нём», поэтому вскоре после появления он начинает доминировать над первичным сигналом.

Ясно, что если среда имеет не одну, а несколько спектральных линий усиления, то существует один первичный и несколько (по числу спектральных линий) усиленных сигналов, каждый из которых асимптотически нормализуется. Тем не менее интерференция усиленных сигналов, «порожденных» разными спектральными линиями, может дать достаточно сложную картину. В качестве примера на рис.4 приведены результаты расчетов для то-

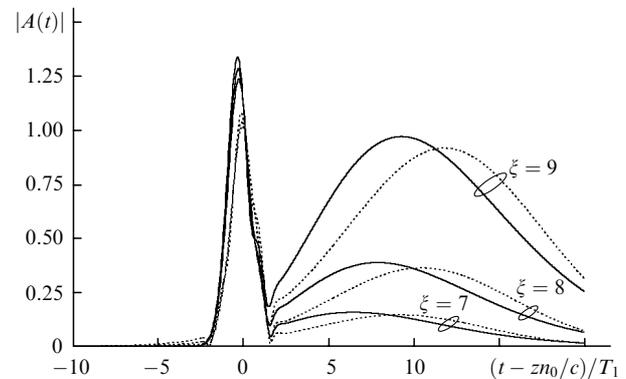


Рис.3. Деформация гауссова волнового пакета при столкновительном механизме уширения спектральной линии для различных оптических толщин слоя  $\xi$ , полученная по данным численного счета (сплошные кривые) и в гауссовом приближении (пунктирные кривые). Несущая частота волнового пакета не совпадает с частотой спектральной линии.

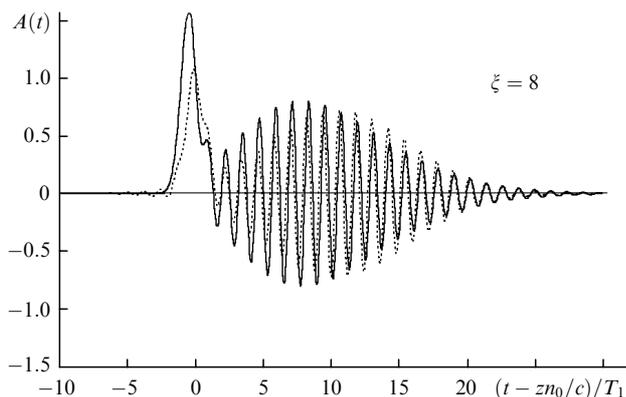


Рис.4. Деформация гауссова волнового пакета при столкновительном механизме уширения дублета спектральных линий для оптической толщины слоя  $\xi = 8$ , полученная по данным численного счета (сплошные кривые) и в гауссовом приближении (пунктирные кривые). Несущая частота волнового пакета расположена посередине между двумя одинаковыми спектральными линиями с разными частотами.

го же самого сигнала, несущая частота которого находится посередине между двумя одинаковыми спектральными линиями усиления ( $\Delta\omega\tau_{\text{coh}} = \pm 7$ ). Расчеты были проведены для  $\xi = 8$ . Видно, что в данном случае интерференция двух усиленных сигналов привела к формированию сильно осциллирующего сигнала, огибающая которого имеет приблизительно гауссову форму по той причине, что интерferируют два почти гауссовых сигнала с несколько различающимися несущими частотами. Сопоставив результаты численных расчетов, проведенных при одних и тех же значениях параметров в настоящей работе (рис.4) и в работе [5] (рис.5), нетрудно заметить их близость, а также хорошую точность предложенных в настоящей работе аналитических формул.

Таким образом, можно сделать вывод, что рассматриваемое в [5] сверхискажение сигнала в усиливающей среде можно интерпретировать просто как появление усиленного сигнала, форма, длительность и скорость распространения которого существенно отличаются от аналогичных характеристик первичного сигнала. Поэтому приведенные в настоящей работе оценки параметров усиленного сигнала можно использовать для изучения вопроса о максимально возможной длине трассы сигнала без его существенного искажения. Нетрудно, например, проверить, что отмеченное в [7] (по данным численных расчетов) резкое искажение гауссова сигнала с обрезанной передней частью при достаточной длине трассы происходит в результате появления усиленного сигнала (на частоте спектральной линии) и его интерференции с сигналом на исходной частоте несущей.

6. Итак, при распространении в усиливающей среде сигнал распадается на первичный и усиленный сигналы. Первичный сигнал распространяется без усиления с «нерезонансной» скоростью света в данной среде и играет

роль предвестника усиленного сигнала. Усиленный сигнал распространяется с групповой скоростью, соответствующей центральной частоте спектральной линии. Его несущая частота совпадает с частотой спектральной линии; по мере распространения он отстает от первичного сигнала и приобретает универсальную гауссову форму (независимо от несущей частоты и формы первичного сигнала при любом контуре спектральной линии). С ростом оптической толщины слоя  $\xi$  амплитуда усиленного сигнала возрастает по закону  $\sim \xi^{-1/2} \exp \xi$ , длительность – по закону  $\sim \xi^{1/2}$ , а энергия – по закону  $\sim \xi^{-1/2} \exp 2\xi$ .

При малой оптической толщине слоя усиленный сигнал мал в сравнении с первичным и либо играет роль его «шлейфа» (когда длительность первичного сигнала мала в сравнении с временем когерентности спектральной линии), либо теряется на фоне первичного сигнала.

При большой оптической толщине слоя первичный сигнал мал по сравнению с усиленным. В результате (в случае единственной спектральной линии усиления) суммарный сигнал имеет универсальную гауссову форму и его параметры слабо зависят от особенностей первичного сигнала и форм-фактора спектральной линии. Если среда имеет несколько спектральных линий усиления, то возникает несколько усиленных сигналов и их интерференция может привести к достаточно сложной структуре суммарного усиленного сигнала (т. е. к его сверхискажению в терминах [5]).

При умеренных значениях оптической толщины слоя может наблюдаться интерференция первичного и усиленного сигналов (которые имеют сопоставимую амплитуду). Если длительность первичного сигнала не мала в сравнении с временем когерентности спектральной линии, эта интерференция тоже может привести к достаточно сложной форме (сверхискажению) суммарного сигнала.

Автор благодарен В.П.Макарову за стимулирующую критику и ряд полезных советов.

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М.: Наука, 1979).
2. Ахиезер А.И., Ахиезер И.А. *Электромагнетизм и электромагнитные волны* (М.: Высшая школа, 1985).
3. Бухман Н.С. *Квантовая электроника*, **30**, 799 (2000).
4. Бухман Н.С. В сб. *Физика и технические приложения волновых процессов* (Самара: СГУ, 2001, с. 113).
5. Macke V., Segard V. *Eur. Phys. J. D*, **23**, 125 (2003).
6. Wang L.J., Kuzmich A., Dogariu A. *Nature*, **406**, 277 (2000).
7. Бухман Н.С. *Квантовая электроника*, **31**, 774 (2001).
8. Малахов А.Н. *Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований* (М.: Сов. радио, 1978).
9. Ахманов С.А., Дьяков Ю.Е., Чиркин А.С. *Введение в статистическую радиофизику и оптику* (М.: Наука, 1981).
10. Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **14**, 1353 (1971).
11. Клышко Д.Н. *Физические основы квантовой электроники* (М.: Наука, 1986).
12. Карлов Н.В. *Лекции по квантовой электронике* (М.: Наука, 1983).