

# Осевая и диффузионная модели прохождения лазерного импульса через сильно рассеивающую среду

С.А.Терещенко, А.А.Данилов, В.М.Подгаецкий, Н.С.Воробьев

*Рассмотрено прохождение лазерного излучения через слой сильно рассеивающей среды (СРС) на основе двух теоретических моделей – нестационарной осевой (двухпотоковой) и нестационарной диффузионной. Приведены аналитические выражения для временных распределений прошедших через СРС фотонов лазерного импульса ультракороткой длительности. На основе экспериментальных временных распределений получены параметры моделей, соответствующие СРС, найдены теоретические временные распределения и проведено сравнение их с экспериментальными. Впервые проведено количественное сравнение этих двух теоретических моделей. Указаны их достоинства и недостатки, которые необходимо учитывать при разработке трансмиссионной оптической томографии СРС.*

**Ключевые слова:** сильно рассеивающая среда, оптическая томография, ультракороткий импульс, взаимодействие излучения с веществом.

## 1. Постановка задачи

Проблема разработки трансмиссионной оптической томографии сильно рассеивающих сред (СРС), к которым принадлежат и биологические ткани, привлекает пристальное внимание мирового научного сообщества уже более 10 лет [1–4]. Тем не менее она до сих пор не может считаться решенной, что обусловлено сложностью процессов взаимодействия оптического излучения с СРС. Описание данных процессов возможно на базе уравнения переноса излучения (УПИ) [5–7], учитывающего рассеяние. В настоящее время УПИ считается наиболее адекватным для описания прохождения излучения через СРС. В связи со сложностью этой задачи она превратилась практически в самостоятельное направление, в котором переход к томографии только подразумевается.

В уравнение переноса для СРС в отличие от чисто поглощающей среды дополнительно входит дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения (пространственно-неоднородная индикатриса рассеяния). Поэтому в трансмиссионной оптической томографии восстановлению подлежат уже две неизвестные функции. Поскольку в обычной томографической схеме это оказывается невозможным из-за недостатка информации, используются различные подходы, увеличивающие количество исходной информации. Основными являются следующие два подхода:

– использование высокочастотной модуляции непрерывного излучения лазера и регистрация прошедшего через СРС излучения на нескольких частотах модуляции (томография в частотной области);

– использование импульсного излучения лазера и регистрация временного распределения прошедшего через СРС излучения (томография во временной области).

Способы регистрации прошедшего излучения также можно разделить на две группы:

– регистрация излучения только на оси первоначального пучка и использование двумерных томографических алгоритмов;

– регистрация излучения в нескольких точках (в идеале – во всех точках поверхности объекта) и использование трехмерных томографических алгоритмов.

При томографии во временной области и регистрации излучения на оси пучка большое значение имеет исследование прохождения оптического излучения через однородный слой СРС. Как известно, фотоны, прошедшие через такой слой, можно разделить на две части: фотоны, следующие вдоль направления исходного пучка (приосевые) и рассеянные фотоны, движущиеся в различных направлениях (внеосевые). Приосевые фотоны, в свою очередь, состоят из фотонов, прошедших через среду без взаимодействия с ней (баллистические фотоны), и рассеянных фотонов.

Использование УПИ для описания прохождения фотонов через СРС затрудняется тем, что в общем случае УПИ аналитического решения не имеет. Основным направлением преодоления этой трудности является создание промежуточной, более простой математической модели, основанной на упрощении УПИ при дополнительных предположениях. Наиболее часто при разработке трансмиссионной оптической томографии используют диффузионную модель [5–7]. Другой перспективной моделью является нестационарная осевая (двухпотоковая) модель [8]. Если порознь обе модели достаточно полно исследовались, то их сравнение друг с другом до последнего времени не проводилось. В настоящей работе теоретически и экспериментально сравниваются эти две модели прохождения лазерного импульса через однородный слой СРС.

С.А.Терещенко, А.А.Данилов, В.М.Подгаецкий. Московский государственный институт электронной техники (технический университет), Россия, 124498 Москва, Зеленоград  
Н.С.Воробьев. Институт общей физики им. А.М.Прохорова РАН, Россия, 119991 Москва, ул. Вавилова, 38

Поступила в редакцию 23 декабря 2003 г., после доработки – 10 марта 2004 г.

## 2. Теория

Основным способом описания взаимодействия излучения с веществом является УПИ, которое можно записать в виде

$$S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) + \boldsymbol{\Omega} \text{grad} \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) + \mu(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) - \int_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', t) \mu_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}', \quad (1)$$

где  $S(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$  – плотность источников фотонов в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ , движущихся в направлении  $\boldsymbol{\Omega}$ ;  $\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$  – плотность потока фотонов в точке  $\mathbf{r}$  в момент времени  $t$ , движущихся в направлении  $\boldsymbol{\Omega}$ ;  $\mu_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega})$  – дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения (индикатриса рассеяния);  $\mu(\mathbf{r}) = \mu_a(\mathbf{r}) + \mu_s(\mathbf{r})$  – коэффициент экстинкции;  $\mu_a(\mathbf{r})$  – коэффициент поглощения излучения;

$$\mu_s(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \mu_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}' = \int_{4\pi} \mu_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}$$

– коэффициент рассеяния излучения;  $v$  – модуль скорости распространения излучения в среде.

В диффузионном приближении функцию плотности потока  $\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t)$  представляют с помощью одной скалярной ( $\Phi_d(\mathbf{r}, t)$ ) и одной векторной ( $\mathbf{F}_d(\mathbf{r}, t)$ ) величин [7]:

$$\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = \Phi_d(\mathbf{r}, t) + \mathbf{F}_d(\mathbf{r}, t) \boldsymbol{\Omega}. \quad (2)$$

Помимо этого, для получения нестационарного уравнения диффузионного типа требуются дополнительные допущения. Таким допущением может быть, в частности, следующее:

$$\left| \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{F}_d(\mathbf{r}, t) \right| \ll |\text{grad} \Phi_d(\mathbf{r}, t) + [\mu(\mathbf{r}) - \mu_1(\mathbf{r})] \mathbf{F}_d(\mathbf{r}, t)|, \quad (3)$$

где  $\mu_1(\mathbf{r}) = \int_{4\pi} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{\Omega}' \mu_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega}'$ . Величину  $D(\mathbf{r}) = \{3[\mu(\mathbf{r}) - \mu_1(\mathbf{r})]\}^{-1}$  называют коэффициентом диффузии.

Известно, что диффузионное приближение обладает рядом серьезных недостатков. Например, оно плохо описывает поведение фотонов вблизи границ СРС. В частности, для него не выполняется точное граничное условие, состоящее в том, что на поверхности СРС функция  $\Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) = 0$  при  $\mathbf{n} \boldsymbol{\Omega} > 0$ , где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к поверхности, направленный внутрь среды. Чаще всего это граничное условие заменяется на условие  $\int_{\mathbf{n} \boldsymbol{\Omega} > 0} \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \times (\mathbf{n} \boldsymbol{\Omega}) d\boldsymbol{\Omega} = 0$ . Кроме того, диффузионное приближение не описывает баллистические фотоны и плохо описывает поведение фотонов вблизи источников излучения, а также внутри СРС вблизи резких изменений ее характеристик.

Для временного распределения фотонов на оси точечного мононаправленного источника и полубесконечной среды можно получить следующее выражение [9]:

$$R(z, t) = \frac{1}{2} (4\pi Dv)^{-3/2} t^{-5/2} \exp(-\mu_a vt) \quad (4)$$

$$\times \left| (z - z_0) \exp \left[ -\frac{(z - z_0)^2}{4Dvt} \right] - (z + z_0) \exp \left[ -\frac{(z + z_0)^2}{4Dvt} \right] \right|,$$

где  $z_0 = (\mu_s - \mu_1)^{-1} = [(1 - g)\mu_s]^{-1}$ ;  $g$  – среднее значение косинуса угла рассеяния. При этом точечный мононаправленный источник заменяется парой точечных изотропных источников (диполем), расположенных на расстоя-

нии  $2z_0$  друг от друга. Такая замена накладывает ограничения на толщину слоя (она должна быть больше  $z_0$ ). Следует также иметь в виду, что без знания индикатрисы рассеяния невозможно заранее точно определить средний косинус  $g$ .

В основу нестационарного осевого приближения УПИ положено единственное предположение о свойствах СРС – «рассеяние прямо назад». В этом приближении считается, что фотон рассеивается в направлении, обратном направлению его исходного движения. В данном случае для индикатрисы рассеяния можно записать выражение [8]

$$\mu_s(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}) = \mu_s(\mathbf{r}) \delta_2(-\boldsymbol{\Omega}' \boldsymbol{\Omega}), \quad (5)$$

где  $\delta_2(x)$  – поверхностная дельта-функция, а  $\mu_s(\mathbf{r})$  – коэффициент рассеяния в модели «рассеяние прямо назад». При этом УПИ преобразуется в дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка гиперболического типа и является существенно более простым по сравнению с исходным.

Выражение для временного распределения фотонов на оптической оси в случае точечного мононаправленного источника и полубесконечной среды выглядит следующим образом [8]:

$$R(z, t) = \eta(\mu vt - \mu z) \frac{v \mu_s z}{[(vt)^2 - z^2]^{1/2}} \times I_1[\mu_s [(vt)^2 - z^2]^{1/2}] \exp(-\mu vt), \quad (6)$$

где  $\eta(x)$  – функция Хевисайда (единичная ступенчатая функция);  $I_1(x)$  – модифицированная функция Бесселя 1-го рода 1-го порядка. В выражении (6) опущено слагаемое, соответствующее баллистическим фотонам.

В обеих моделях считается, что полученные распределения фотонов в сечении с координатой  $z$  описывают излучение, прошедшее через слой толщиной  $z$ . Заметим, что коэффициенты поглощения и рассеяния в осевой и диффузионной моделях имеют несколько различный физический смысл. Соответственно могут различаться и их числовые значения, рассчитанные на основании данных эксперимента.

Важное отличие осевой модели от диффузионной заключается в том, что осевая модель накладывает ограничения только на свойства среды (индикатрису рассеяния), а не на вид уравнения и его решения, т.е. если свойства среды будут соответствовать указанному предположению, то осевая модель будет точно описывать прохождение излучения через такую среду.

На рис.1 приведены основные параметры временного распределения потока излучения. При исследовании прохождения лазерного импульса через слой СРС наиболее легко варьировать толщину слоя. На рис.2 показаны зависимости смещения максимума распределения  $\tau$  и его полуширины  $d$  от толщины  $z$  рассеивающего слоя для диффузионной и осевой моделей. В целом обе модели дают близкие результаты. Однако, как и следовало ожидать, в диффузионной модели присутствуют искажения при  $z \leq z_0 \sim 1$  мм.

## 3. Эксперимент

Экспериментальное сравнение обеих моделей можно осуществить следующим образом. По временному распределению, снятому для некоторой толщины однород-

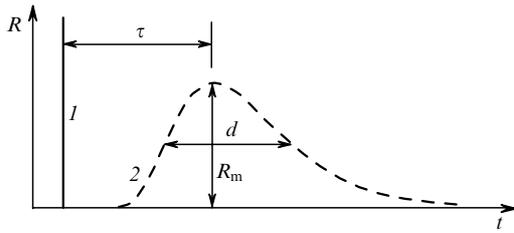


Рис.1. Временное распределение УКИ, прошедшего через рассеивающую среду: 1 – баллистические фотоны; 2 – рассеянные фотоны. Основные параметры временного распределения: смещение  $\tau$ , полуширина  $d$  и максимум  $R_m$  потока рассеянного излучения.

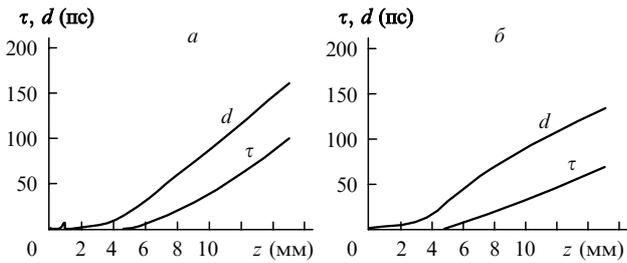


Рис.2. Зависимости смещения максимума распределения  $\tau$  и его полуширины  $d$  от толщины  $z$  рассеивающего слоя для диффузионной (а) и осевой (б) моделей.

ного слоя СРС, можно найти параметры среды: коэффициенты экстинкции и рассеяния для осевой модели и коэффициенты поглощения и диффузии для диффузионной модели. Затем, используя найденные значения параметров среды, можно построить теоретические кривые временного распределения фотонов и наложить их на экспериментальные. Если такое наложение осуществить на ту же самую экспериментальную кривую, по которой были найдены параметры среды, то в этом случае найденные параметры играют роль подгоночных и могут только свидетельствовать о бессмысленности теоретических выражений. Если же параметры среды будут найдены по экспериментальной кривой для одной толщины слоя СРС, например  $z_1$ , а теоретическая кривая будет построена для другой толщины слоя, например  $z_2$ , то сравнение теоретической кривой с экспериментальной, полученной для толщины  $z_2$ , будет говорить уже о прогностических свойствах модели, т. е. о точности отражения моделью физической ситуации.

Экспериментальные данные взяты из работы [10], в которой были описаны эксперименты с лазерными импульсами фемтосекундной длительности. При этом использовалась лазерная система, состоящая из лазера на титанате сапфира и регенеративного усилителя. Параметры излучения были следующими: длина волны 780 нм, энергия импульса  $\sim 0.5$  мДж, частота повторения 10 Гц, длительность импульса  $\sim 120$  фс. Прошедшее излучение регистрировалось электронно-оптической камерой Imason-500 с предельным разрешением 1 пс. В качестве модельной СРС использовался раствор сухого молока в воде, который помещался в прямоугольные стеклянные кюветы различной толщины (от 1 до 10 мм).

Параметры среды (для обеих моделей) находились следующим образом [11]. Для исходной экспериментальной кривой, соответствующей слою с некоторой толщиной  $z_1$  (исходному слою), определялись полуширина  $d$  и смещение  $\tau$ . Так как комбинация толщина слоя – смещение – полуширина является единственной для данной сре-

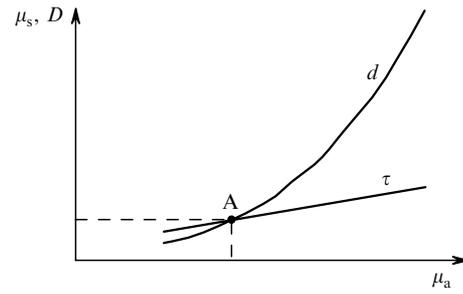


Рис.3. Определение параметров среды (точка А) по полуширине  $d$  и смещению  $\tau$ .

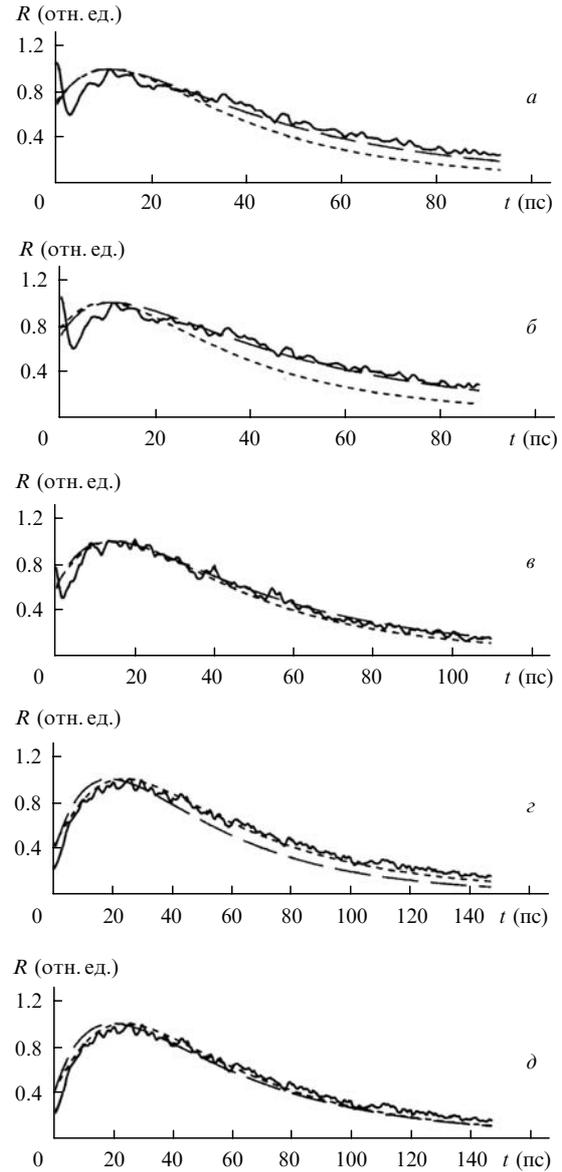


Рис.4. Временные распределения фотонов, прошедших через слой рассеивающей среды толщиной 6.5 (а, б), 7.0 (в) и 8.0 мм (г, д). Параметры среды для моделей получены из экспериментальных данных для слоя толщиной 7.0 (а, в, б), 8.0 (б) и 6.5 мм (г); эксперимент – сплошные кривые, диффузионная модель – короткие штрихи, осевая модель – длинные штрихи.

ды, то кривые постоянных значений  $d$  и  $\tau$  на плоскости  $\mu_a, \mu_s$  для осевой модели и на плоскости  $\mu_a, D$  для диффузионной модели пересекаются в точке А с координатами, соответствующими параметрам среды (рис.3).

Табл.1. Сравнение диффузионной и осевой моделей.

$z_1$ (мм)	$z_2$ (мм)	Диффузионная модель				Осевая модель			
		$\mu_a$ (мм <sup>-1</sup> )	$\mu - \mu_1$ (мм <sup>-1</sup> )	$D$ (мм)	$\sigma$ (отн. ед.)	$\mu$ (мм <sup>-1</sup> )	$\mu_a$ (мм <sup>-1</sup> )	$\mu_s$ (мм <sup>-1</sup> )	$\sigma$ (отн. ед.)
6.0	6.0	0.003	1.15	0.29	0.28	1.15	0.09	1.06	0.30
6.5	6.0	0.002	1.19	0.28	0.25	1.03	0.06	0.97	0.28
7.0	6.0	0.002	1.19	0.28	0.25	0.96	0.05	0.91	0.28
8.0	6.0	0.002	1.15	0.29	0.26	0.93	0.04	0.89	0.28
6.0	6.5	0.003	1.15	0.29	0.08	1.15	0.09	1.06	0.10
6.5	6.5	0.002	1.19	0.28	0.06	1.03	0.06	0.97	0.07
7.0	6.5	0.002	1.19	0.28	0.06	0.96	0.05	0.91	0.07
8.0	6.5	0.002	1.15	0.29	0.08	0.93	0.04	0.89	0.07
6.0	7.0	0.003	1.15	0.29	0.15	1.15	0.09	1.06	0.15
6.5	7.0	0.002	1.19	0.28	0.13	1.03	0.06	0.97	0.12
7.0	7.0	0.002	1.19	0.28	0.13	0.96	0.05	0.91	0.09
8.0	7.0	0.002	1.15	0.29	0.15	0.93	0.04	0.89	0.09
6.0	8.0	0.003	1.15	0.29	0.09	1.15	0.09	1.06	0.16
6.5	8.0	0.002	1.19	0.28	0.05	1.03	0.06	0.97	0.11
7.0	8.0	0.002	1.19	0.28	0.05	0.96	0.05	0.91	0.07
8.0	8.0	0.002	1.15	0.29	0.08	0.93	0.04	0.89	0.06

Найденные параметры использовались для построения теоретических временных распределений для рассеивающего слоя толщиной  $z_2$ , которая могла как совпадать с толщиной  $z_1$ , так и отличаться от нее. В последнем случае исследуются прогностические свойства моделей. Полученные теоретические кривые накладывались затем на экспериментальную кривую, построенную для слоя толщиной  $z_2$  (рис.4). Баллистический пик, ширина которого определялась разрешением электронно-оптической камеры, не «убирался» из экспериментальных кривых (рис.4,а,б), т.к. на среднее квадратичное отклонение он влияет слабо, а его теоретический анализ был проведен ранее [12]. Результаты исследования приведены в табл.1. Для всех случаев было рассчитано среднее квадратичное отклонение  $\sigma$  параметров моделей от экспериментальных данных.

#### 4. Выводы

Хотя непосредственное сравнение параметров среды, полученных на основе разных теоретических моделей, не совсем корректно, некоторое сопоставление все же можно сделать. Как и следовало ожидать, коэффициент поглощения для осевой модели больше, чем для диффузионной, поскольку фотоны, рассеянные в сторону от оси пучка лазера, считаются поглощенными. Вообще говоря, диффузионная модель мало чувствительна к коэффициенту поглощения. Обращает на себя внимание близость коэффициента рассеяния для осевой модели к разности  $\mu - \mu_1$ , которая для малых коэффициентов поглощения близка к так называемому редуцированному коэффициенту рассеяния  $\mu'_s = \mu_s - \mu_1 = \mu_s(1 - g)$  в диффузионной модели.

В целом можно сделать следующие выводы. Теоретические кривые, построенные для  $z_2 = z_1$ , достаточно точные у обеих моделей. В то же время теоретические кривые, которые предсказывают прохождение излучения через рассеивающий слой при  $z_2 \neq z_1$ , отличаются, иногда существенно, от экспериментальной кривой. При этом осевая модель дает лучшие результаты при  $z_2 < z_1$ , а диф-

фузионная модель точнее в противоположном случае. Кроме того, осевая модель вообще предпочтительнее для тонких слоев. Так как из экспериментальных распределений не «убирались» баллистические фотоны, то их учет лишь дополнительно улучшит точность осевой модели.

Таким образом, несмотря на то что диффузионная модель используется значительно чаще, чем осевая, проведенное исследование показало, что осевая модель по крайней мере не хуже диффузионной описывает временные распределения на оси лазера. Кроме того, как уже отмечалось, диффузионная модель принципиально не описывает баллистические фотоны, особенно важные для томографической реконструкции. Следовательно, осевая модель может представлять собой полноценную альтернативу диффузионной модели в области трансмиссионной оптической томографии рассеивающих сред.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Министерства промышленности и науки Московской области (проекты № 01-01-00065 и 02-02-96000).

1. Medical Optical Tomography: Functional Imaging and Monitoring. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **IS11** (1993).
2. Theoretical Study, Mathematical, Experimental Model for Photon Transport in Scattering Media and Tissue. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2326** (1994).
3. Arridge S.R. *Inverse Problems*, **15**, R41 (1999).
4. Подгаецкий В.М., Потапов Д.А., Селищев С.В., Терещенко С.А. *Биомедицинские технологии и радиоэлектроника*, **12**, 18 (2001).
5. Кейз К., Цвайфель П. *Линейная теория переноса* (М.: Мир, 1972).
6. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. *Введение в теорию прохождения частиц через вещество* (М.: Атомиздат, 1978).
7. Исмару А. *Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах* (М.: Мир, 1981, т. 1).
8. Селищев С.В., Терещенко С.А. *ЖТФ*, **67** (5), 61 (1997).
9. Patterson M.S., Chance B., Wilson B.C. *Appl. Opt.*, **28**, 12 (1989).
10. Podgaetsky V.M., Tereshchenko S.A., Smirnov A.V., Vorob'ev N.S. *Opt. Commun.*, **180**, 217 (2000).
11. Терещенко С.А., Подгаецкий В.М., Воробьев Н.С., Смирнов А.В. *Квантовая электроника*, **23** (3), 265 (1996).
12. Терещенко С.А., Подгаецкий В.М., Воробьев Н.С., Смирнов А.В. *Квантовая электроника*, **25** (9), 853 (1998).