

Влияние обратных отражений внутри резонатора на точность и стабильность оптических стандартов частоты

Д.Д.Крылова, А.С.Шелковников, Е.А.Петрухин, М.А.Губин

Описаны сдвиги центров нелинейных резонансов поглощения и дисперсии в лазерах с внутренней поглощающей ячейкой, вызванные паразитным отражением от пластинки внутри резонатора и зависящие от её положения осциллирующим образом. Показано, что такое отражение приводит к осциллирующим от положения пластинки в резонаторе потерям. Наиболее существенными причинами сдвигов в этой ситуации оказываются частотная модуляция, применяемая для стабилизации частоты лазера, и кривизна контура линии усиления в двухмодовом режиме. Результаты модельного эксперимента согласуются с теоретическими оценками.

Ключевые слова: оптические стандарты частоты, резонансы насыщенного поглощения, стабильность, внутренние отражения в резонаторе.

1. Введение

Оптические стандарты частоты (ОСЧ), основанные на нелинейных резонансах дисперсии и поглощения в He–Ne-лазерах с внутренней метановой поглощающей ячейкой ($\lambda = 3.39$ мкм), уже долгое время являются одними из наиболее точных (стабильность частоты 10^{-14} – 10^{-15} , воспроизводимость $\sim 10^{-14}$) в оптической области спектра (см., напр., [1–3]). В последние годы развилась дополнительная область их применения – создание и использование малогабаритных транспортируемых приборов [4, 5] с параметрами (стабильность и точность), на порядок уступающими рекордным стационарным установкам [2, 6], но, тем не менее, достаточными для решения многих задач. Например, возможно создание на основе таких стандартов высокостабильных задающих (опорных) генераторов с узким спектром ($\Delta\omega/\omega \sim 10^{-14}$ – 10^{-15}) в оптическом и СВЧ диапазонах спектра.

Благодаря появившейся в последние годы фемтосекундной технологии связи оптического и СВЧ диапазонов [7, 8], высокая стабильность частоты метанового репера относительно просто переносится как в видимый, так и в СВЧ диапазоны спектра. Поэтому в ряде задач метановые стандарты могут заменить водородные мазеры, используемые в настоящее время как задающие генераторы в системах точного времени и эталонных частот. В оптическом диапазоне они могут служить источниками узкого спектра при выделении сверхузких спектральных линий в создаваемых стандартах частоты нового поколения на охлаждённых и захваченных в ловушках атомах и ионах (прогнозируемая точность 10^{-17} – 10^{-18}) и для калибровки других вторичных оптических стандартов частоты.

Данная работа посвящена исследованию факторов,

ограничивающих стабильность таких оптических стандартов частоты, с целью дальнейшего улучшения стабильности. Одним из таких важных факторов, выделенных на данный момент и трудноконтролируемых экспериментально, является паразитное обратное отражение от существующих в резонаторе поверхностей, точнее его наличие и возможная нестабильность позиции подобных дополнительных поверхностей в резонаторе. Влияние слабых отражённых полей (в основном от внешних источников) на работу лазера с линейным резонатором Фабри–Перо довольно давно обсуждается в литературе (см., напр., [9–11]), однако механизмы его проявления в стандартах частоты на газовых ячейках и метод его подробного теоретического описания приводятся нами в этой статье впервые.

Наличие такого рода эффектов в ОСЧ было замечено экспериментально по корреляции осцилляций стабилизированной частоты и температурных колебаний при долговременных частотных измерениях относительно цезиевого репера частоты. На рис.1 приведена типичная запись абсолютных частотных измерений транспортируемого ОСЧ на радиооптическом мосту РТВ (Германия) относительно первичного цезиевого стандарта частоты, проводившихся в декабре 2000 г. [12]. Прибор стабилизировался по центральной компоненте разрешённой сверхтонкой структуры $F_2^{(2)}$ -линии метана. Для стабилизации использовался резонанс насыщенной дисперсии с полушириной на полувысоте 4.5 кГц. На рис.1

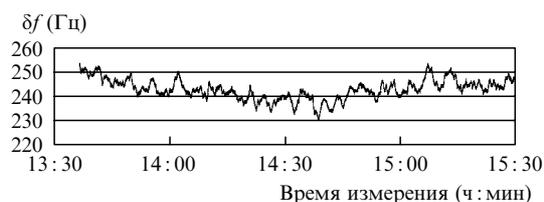


Рис.1. Типичная запись абсолютных частотных измерений (абсолютная частота равна 88 376 181 000 000 Гц) на радиооптическом мосту РТВ (Германия) относительно цезиевого стандарта частоты, проводившихся в декабре 2000 г. (время усреднения 100 с).

Д.Д.Крылова, А.С.Шелковников, Е.А.Петрухин, М.А.Губин. Физический институт им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 119991 Москва, Ленинский просп., 53; e-mail: krylova@sci.lebedev.ru

Поступила в редакцию 28 января 2004 г.

видны характерные периодические флуктуации частоты стандарта с амплитудой до 10 Гц, не объясняемые отношением сигнал/шум используемого репера.

В разд.2 на основе разработанной в [13, 14] самосогласованной теории описания заполненного резонатора (с учётом усиливающей и поглощающей сред), близкого к плоскому и с потерями на зеркалах, нами описана модель с включением внутрь резонатора пластинки с малым обратным отражением. (В эксперименте такой эффект может быть обязан также рассеянию.) В результате получено уравнение для поля в резонаторе, в котором часть потерь (связанная с обратным отражением пластинки) зависит от положения данной пластины в резонаторе осциллирующим образом. Поясим сразу же, что речь не идёт ни о каком нарушении законов сохранения энергии. Просто с введением даже одной пластинки с малым отражением резонатор формально разбивается на два, но метод, изложенный в [13], позволяет привести уравнения для частоты и поля лазера на выходе из него к уравнениям для обычного двухзеркального резонатора. Поэтому придавать какой-либо реальный смысл «осциллирующей» части потерь в этом приведённом уравнении вряд ли стоит. В определённом смысле это просто энергия, захваченная внутри сложного (более чем двухзеркального) резонатора.

Следующим шагом было нахождение причин, по которым подобные «осциллирующие» потери влияют на сдвиг стабилизированной частоты лазера. На данный момент мы нашли две существенно влияющие на частоту причины.

Первая заключается в неизбежности использования частотной модуляции для стабилизации частоты ОСЧ по центру нелинейного резонанса. Это приводит к необходимости модуляции длины резонатора, а значит, и положения паразитных отражающих поверхностей, т. е. к модуляции потерь. Такого рода модуляция потерь приводит к сдвигу стабилизированной частоты от максимума любого нелинейного резонанса (поглощения или дисперсии), по которому проводится привязка.

Второй существенной, характерной для двухмодового ОСЧ причиной является существующий сдвиг [15] из-за кривизны линейного контура усиления, пропорциональный коэффициенту связи между модами и превышению над порогом для данной моды. Изменение потерь из-за дрейфа отражающих поверхностей приводит к соответствующему дрейфу стабилизированной частоты.

В разд.3 описан модельный эксперимент, выполненный с внешним источником отражений для качественно сравнения с полученными теоретическими оценками.

2. Теория

2.1. Поле в резонаторе с дополнительной отражающей пластинкой

Единственным самосогласованным на данный момент методом описания резонансов интенсивности и частоты в лазерах с внутренней и внешней поглощающей ячейкой является метод, изложенный в [13, 14]. Он разработан для резонаторов, близких к плоским ($(L/R)^{1/2} \ll 1$, где L – длина, R – радиус зеркал резонатора), и он для усреднённой за обход всего резонатора амплитуды поля E_0 позволяет именно из-за обхода (интегрирования по длине) всего резонатора включить граничные условия на

всех встречающихся поверхностях в финальное уравнение. Только в этом случае удастся избежать противоречия между разложением по модам «пустого» резонатора (всегда используемого в литературе) и граничными условиями с потерями, которым эти моды никогда удовлетворить не могут. В данном случае потери на зеркалах учитываются таким же образом, как и линейное усиление, и могут рассматриваться вместе с ним в дальнейшем в рамках теории возмущений для описания нелинейных резонансов поглощения и дисперсии.

Уравнение для амплитуды поля E_0 , проинтегрированной вдоль всего резонатора, имеет следующий вид:

$$\left[i \frac{L}{2k} \Delta_r - i \frac{kr^2}{R} + i\varphi_0 - \delta + g_+ - g_- \right] E_0(r) = g_+ \beta_+(\omega) |E_0|^2 E_0 - g_- \beta_-(\omega) |E_0|^2 E_0. \quad (1)$$

Здесь $k = \omega/c$; ω – частота лазерного поля; r – радиальная координата; $\varphi_0 = kL - \pi n$; n – целое число; $|\varphi_0| \ll 1$; $1/R = \frac{1}{2}(1/R_1 + 1/R_2)$; $\delta = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$ – средний радиус и потери на зеркалах; g_+ и g_- – линейные коэффициенты усиления и поглощения за один проход резонатора; $\beta_{\pm}(\omega)$ – параметр насыщения усиливающей и поглощающей сред [13, 14].

Интересующее нас влияние поверхностей, которые вносят дополнительные отражения в резонаторе, можно рассмотреть на простой модели плоской пластинки, расположенной на расстоянии l от центра резонатора, с коэффициентом отражения по амплитуде назад r_0 и коэффициентом пропускания $1 - q$. Граничные условия на пластинке (рис.2) в данном случае имеют вид

$$E_-^L = E_-^R(1 - q) + r_0 E_+^L, \quad E_+^R = E_+^L(1 - q) + r_0 E_-^R.$$

В итоге суммарные потери резонатора в уравнении (1) приобретают вид

$$\bar{\delta} = \delta + q - r_0 \cos[2k(l - z_0)], \quad (2)$$

где z_0 – координата центра резонатора.

В данном случае трудно говорить прямо об «осциллирующих» от координаты l потерях. Осциллирующими они являются только на языке уравнения (1) для проинтегрированной по всему резонатору амплитуде поля. С другой стороны, только в этом случае мы можем говорить о едином для всего резонатора параметре (вне зависимости, сколько граничных условий встречалось по пути), а также написать для него абсолютно адекватное уравнение, которое даёт возможность описать нелинейный резонанс как поглощения, так и дисперсии. Следую-

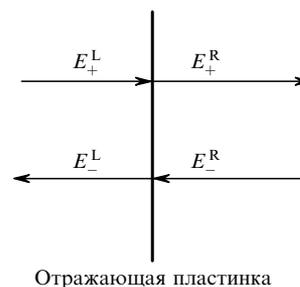


Рис.2. Обозначения прямых и обратных волн на поверхностях пластинки.

щий вопрос: какое влияние такие «осцилляции» потерь от положения отражающей поверхности могут внести в точность определения частоты нелинейного резонанса?

2.2. Сдвиг из-за частотной модуляции резонатора

На данный момент мы смогли выделить две наиболее ощутимые проблемы. Первая связана с неизбежностью использования частотной модуляции для фиксирования центра резонанса. При стабилизации лазера его длина модулируется с частотой Ω_0 :

$$L = \bar{L}(1 + x \cos \Omega_0 t),$$

следовательно, таким же образом модулируются и другие параметры резонанса (например, потери и интенсивность), которые из-за наличия потерь, зависящих от положения поверхностей внутри резонатора, начинают также зависеть от этой модуляции:

$$\omega = \bar{\omega}(1 - x \cos \Omega_0 t), \quad \delta = \bar{\delta} + \alpha \bar{\omega} x \cos \Omega_0 t,$$

$$\alpha = \frac{r_0}{c/L} \left[1 - \frac{2(l - z_0)}{\bar{L}} \right] \sin[2k(l - z_0)].$$

Детектирование сигнала S на частоте n -й гармоники при малых амплитудах модуляции ($|x| \ll 1$) формально сводится к производным резонанса:

$$\frac{1}{T} \int_0^T dt \cos(n\Omega_0 t) S(\omega, \delta) = \frac{(-1)^n}{n!} x^n \bar{\omega}^n \times \left[\frac{\partial^n}{\partial \omega^n} - \alpha n \frac{\partial^{n-1}}{\partial \omega^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \delta} + \alpha^2 \dots \right] S|_{x=0}. \quad (3)$$

Учитывая, что изменение δ главное влияние оказывает на сигнал нелинейного резонанса дисперсии или поглощения через интенсивность, которая пропорциональна превышению над порогом $\eta = g_+ - g_- - \delta$, мы можем заменить в (3) производную $\partial S / \partial \delta$ на S / η . Таким образом, уже здесь в совершенно общем виде мы получаем, что такие «осциллирующие» потери приводят к систематическим сдвигам интересующих нас нелинейных резонансов при стабилизации лазера с помощью частотной модуляции. Они зависят только от положения отражающих поверхностей и параметров резонанса, и единственным способом уменьшения их влияния является уменьшение отражения от данных поверхностей.

Так, например, подобный сдвиг для резонанса поглощения в одномодовом режиме в доплеровском пределе ($\beta_- \sim 1 + \gamma / (\gamma + i\Delta\omega)$) есть

$$A_a = \frac{r_0}{\eta} \frac{\gamma^2}{c/L_0} K \left[1 - \frac{2(l - z_0)}{L_0} \right] \sin[2k(l - z_0)],$$

где γ – однородная ширина линии поглощения в метане; $K^{-1} = g_- \beta_-(0) / g_+ \beta_+(0) - \delta$ – его контрастность. Для сдвига центра первой производной дисперсии формула аналогична, но без коэффициента контрастности,

$$A_d = \frac{r_0}{\eta} \frac{\gamma^2}{c/L_0} \left[1 - \frac{2(l - z_0)}{L_0} \right] \sin[2k(l - z_0)].$$

В случае двухмодового режима в формулах появятся дополнительные коэффициенты из-за связи между модами, но порядок величины сдвигов останется прежним.

2.3. Сдвиги в двухмодовом режиме

Вторым фактором, являющимся чувствительным к «осциллирующим» потерям, оказывается сдвиг, который наблюдается в двухмодовом режиме, используемом для выделения резонансов в ОСЧ [3, 4]. Сдвиг связан с кривизной контура усиления и пропорционален коэффициенту связи между модами [15]. Он также зависит от большого числа параметров нелинейного резонанса, включая потери.

С помощью метода, описанного в [13], разложим поле в резонаторе по модам пустого резонатора

$$E_0(\mathbf{r}) = \sum_{n,m} a_{nm} \Psi_{nm}(\mathbf{r}),$$

которые определяются уравнением

$$\Delta_r \Psi_{nm}(\mathbf{r}) - \frac{2k^2}{LR} r^2 \Psi_{nm} = -\mu_{nm} \Psi_{nm}.$$

Тогда в двухмодовом режиме для частот $\varphi_{1,2}$ и амплитуд нулевых мод $a_{1,2}$ (ортогональной поляризации) с введением коэффициентов связи между модами $\theta_{\pm}^{(1,2)}$ получим следующие уравнения:

$$W^2 \left[-i \left(\varphi_{1,2} - \frac{L}{2k} \mu_0^{(1,2)} \right) + \eta_{1,2} \right] = (g_+ \beta_+^{(1,2)} - g_- \beta_-^{(1,2)}) |a_0^{(1,2)}|^2 + (g_+ \theta_+^{(1,2)} - g_- \theta_-^{(1,2)}) |a_0^{(2,1)}|^2,$$

где $\eta_{1,2} = \eta'_{1,2} + i\eta''_{1,2} = g_+ - g_- - \delta^{(1,2)}$; $\varphi_{1,2} = \omega_{1,2} c^{-1} L - \pi n$; W – ширина лазерного пучка.

Интенсивности мод в этом случае описываются выражениями

$$I_{1,2} = |a_0^{(1,2)}|^2 = K \frac{W^2}{g_0 \beta_0} \times \frac{\eta'_{1,2} (K - \beta'_-(\Delta\omega_{2,1}) / \beta_-^{(0)}) - \eta'_{2,1} (K\sigma - \theta'_- / \beta_-^{(0)})}{g_0 \beta_0 (K - \beta'_-(\Delta\omega_1) / \beta_-^{(0)}) (K - \beta'_-(\Delta\omega_2) / \beta_-^{(0)}) - (K\sigma - \theta'_- / \beta_-^{(0)})^2}$$

(где $\beta_-^{(0)} = \beta_-(0)$; $g_0 = g_+(0)$; $\sigma = \theta_0 / \beta_0$; $\beta_0 = \beta_+(0)$; $\theta_0 = \theta_+(0)$; $\Delta\omega_i = \omega_i - \omega_0$; ω_0 – частота молекулярного перехода) и в окрестности одного из резонансов ($\Delta\omega \approx 0$) принимают вид

$$I_1 = \frac{W^2}{g_0 \beta_0 (1 - \sigma^2)} (\eta'_1 - \eta'_2 \sigma) [1 + A \beta'_-(\Delta\omega_1)],$$

$$I_2 = \frac{W^2}{g_0 \beta_0 (1 - \sigma^2)} [(\eta'_2 - \eta'_1 \sigma) - A \beta'_-(\Delta\omega_1) \sigma (\eta'_1 - \eta'_2 \sigma)],$$

$$A = \frac{g_-}{g_0 \beta_0} (1 - \sigma^2)^{-1}.$$

Нелинейный резонанс разностной частоты между двумя модами описывается следующим уравнением:

$$-W^2 \frac{L}{c} (\omega_1 - \omega_2 + \Omega_{12}) = W^2 (\eta''_1 - \eta''_2) + I_1 [g_0 \beta_0''(\Delta\omega_1) - g_- \beta_-''(\Delta\omega_1)] - I_2 [g_0 \beta_0''(\Delta\omega_2) - g_- \beta_-''(\Delta\omega_2)] + (g_0 \theta_+'' - g_- \theta_-'')(I_1 - I_2).$$

Вводя зависимость для дисперсионной части поляризации и коэффициентов связи между модами в усиливающей среде

$$\beta_+''(\Delta\omega_{1,2}) = \beta_0\alpha_0 \frac{\Delta\omega_{1,2} + \Omega}{\Gamma_+}, \quad \alpha_0 \sim 1, \quad \Omega = \omega_0^{(-)} - \omega_0^{(+)},$$

$$\theta_+'' = \theta_0 \frac{\Delta\omega_1^{(+)} + \Delta\omega_2^{(+)}}{2\Gamma_+} = \theta_0 \frac{\Delta\omega_1 + \Omega - \Omega_{12}/2}{\Gamma_+}$$

(Γ_+ – ширина линии поглощения), получаем в итоге нелинейный резонанс дисперсии в межмодовой частоте

$$\omega_1 - \omega_2 + \Omega_{12} = \dots + B[-\beta_-''(\Delta\omega_1) + \beta_+'(\Delta\omega_1)D], \quad (4)$$

$$B = (\eta_1' - \eta_2'\sigma) \frac{c}{L} \frac{1}{g_0\beta_0(1 - \sigma^2)},$$

$$D = \frac{1}{1 - \sigma^2} \frac{\Omega}{\Gamma_+} (1 + \sigma)(\alpha_0 + \sigma) - \frac{\Omega_{12}}{\Gamma_+} \sigma \left(\alpha_0 + \frac{1 + \sigma}{2} \right).$$

В (4) мы опустили члены, линейно пропорциональные частоте, и константы, которые исчезают при взятии уже первой производной. Кроме того, на данный момент мы не считаем существенным сдвиг, связанный с наличием коэффициента D в (4). Однако указанная уже в [15] критерия коэффициента усиления (в превышении над порогом η) должна быть учтена и приводит по нашим оценкам к намного большим нестабильностям из-за внутренних отражающих поверхностей. Представим ее следующим образом:

$$\begin{aligned} \eta_1' - \sigma\eta_2' &= -\delta_1 + \sigma\delta_2 + g_0 \left[1 - \left(\frac{\Delta\omega_1}{\Gamma_+} \right)^2 \right] \\ &- g_0\sigma \left[1 - \left(\frac{\Delta\omega_1 - \Omega_{12}}{\Gamma_+} \right)^2 \right] \approx g_0 \left[1 - \sigma \left(1 - \frac{\Omega_{12}^2}{\Gamma_+^2} \right) \right] \\ &- \delta_1 + \sigma\delta_2 - g_0\sigma \frac{2\Omega_{12}\Delta\omega_1}{\Gamma_+^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

Это ведет к появлению нелинейного резонанса (как для дисперсии, так и для поглощения) вида $(1 + \rho\Delta\omega)S(\Delta\omega)$, что в доплеровском пределе приводит к сдвигам центров резонанса поглощения $\Delta_a = \frac{1}{2}\rho\gamma^2 K(1 - \sigma^2)$ и производной дисперсии $\Delta_d = -\frac{1}{3}\rho\gamma^2$.

Коэффициент ρ можно взять из эксперимента или оценить из (5) при примерно равных потерях для мод как

$$\rho \approx 2\sigma \frac{g_0}{\eta(1 - \sigma)} \frac{\Omega_{12}}{\Gamma_+^2}.$$

Это сдвиг, указанный в [15]. Интересующая нас часть сдвига определяется выражением для «осциллирующих» потерь, входящих в η_i . Таким образом, чтобы получить сдвиг из-за нестабильности положения отражающих поверхностей, сдвиг, вычисленный в отсутствие этих потерь, должен быть домножен на коэффициент

$$\frac{r_1^{(0)} \cos[2k_1(l - z_0)] - r_2^{(0)}\sigma \cos[2k_2(l - z_0)]}{\eta(1 - \sigma)},$$

где $r_i^{(0)}$ – потери на отражение, внесённые пластинкой в i -й моде (в принципе, они могут быть разными). После этого сдвиг резонанса поглощения, например, имеет вид

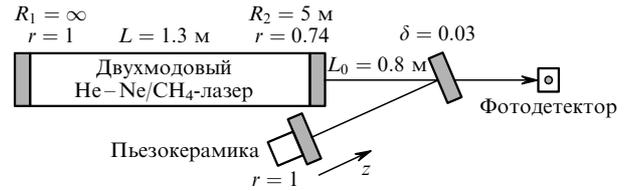


Рис.3. Схема модельного эксперимента с внешней слабо отражающей пластинкой.

$$\Delta_a = \rho\gamma^2 K(1 + \sigma)$$

$$\times \frac{r_1^{(0)} \cos[2k_1(l - z_0)] - r_2^{(0)}\sigma \cos[2k_2(l - z_0)]}{2\eta}.$$

При сильной связи между модами ($\sigma \rightarrow 1$) и примерно равных потерях на отражение, вносимых пластинкой ($\delta_1^{(0)} \approx \delta_2^{(0)}$), этот сдвиг можно представить в виде

$$\Delta_a = \rho\gamma^2 K \frac{r_0}{\eta} \frac{2\Omega_{12}}{c/L} \frac{l - z_0}{L} \sin[2k(l - z_0)].$$

3. Модельный эксперимент

На рис.3 представлена схема модельного эксперимента, проведённого для сравнения теоретических значений с экспериментально наблюдаемыми осциллирующими сдвигами стабилизированной частоты в зависимости от положения отражающей пластинки (в данном случае внешней). Описание влияния внешней отражающей пластинки аналогично описанию влияния, вносимого внутренней, и сдвиги описываются практически теми же формулами. Только «осциллирующие» потери в данном случае вносятся как дополнительное отражение от одного из зеркал с набегом фазы ($\delta_1 = r_0 \exp(i2kL_0)$, где L_0 – расстояние до внешнего отражателя).

В эксперименте использовался двухмодовый He-Ne-лазер с метановой поглощающей ячейкой, стабилизированный по нелинейному резонансу поглощения метана ($\lambda = 3.39$ мкм). Полуширина на полувысоте амплитудного резонанса составляла 150 кГц (рис.4). Часть излучения лазера возвращалась назад через поворотное зеркало с малым коэффициентом отражения (3 % по интенсивности) и возвратное зеркало, установленное на пьезокерамику. Изменение абсолютной частоты исследуемого лазера при введении в него паразитного обрат-

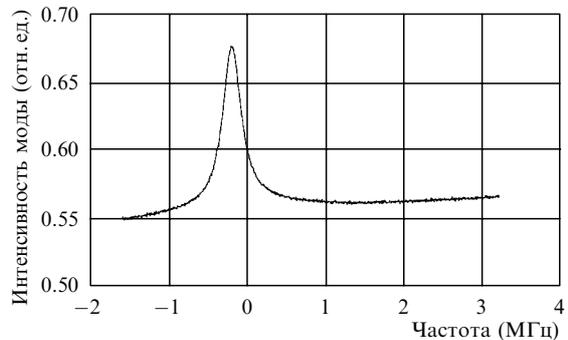


Рис.4. Резонанс насыщенного поглощения метана в исследуемом двухмодовом лазере, наблюдаемый в интенсивности одной из мод. Стабилизация частоты лазера осуществлялась путем его привязки к вершине этого резонанса.

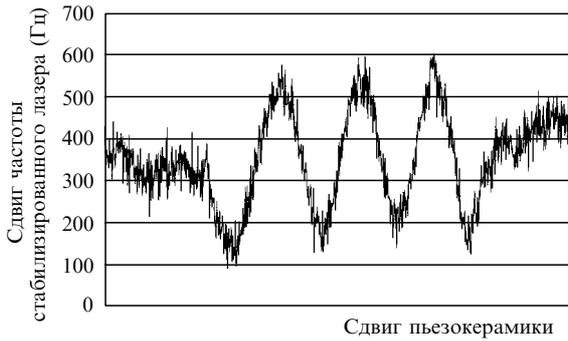


Рис.5. Сдвиг частоты стабилизированного двухмодового лазера в зависимости от расстояния между лазером и возвратным зеркалом.

ного отражения регистрировалось на частоте биений с другим (опорным) стабилизированным лазером.

На рис.5 представлена характерная осциллирующая зависимость положения стабилизированной частоты при поступательном движении пьезокерамики. Амплитуда осцилляций составила ~ 160 Гц. Для сравнения этой величины со сдвигами, описанными выше, нужно оценить несколько величин из экспериментальных данных. Амплитуда r_0 осциллирующих от положения пьезокерамики потерь с учетом пропускания выходного зеркала резонатора (0.26 по интенсивности) и коэффициента попадания в моду вернувшегося сигнала (~ 0.57 для схемы, приведённой на рис.2) будет равна $r_0 = 0.0044$. Экспериментальное значение амплитуды осцилляций величины $\omega_1 - \omega_2$ от движения пьезокерамики ($\sim r_0 \Omega_{12} \times 2L_0/L$ (см. выше)) также подтверждает правильность калибровки r_0 . Другие коэффициенты из экспериментальных данных таковы: $\rho \approx 2.5 \times 10^{-8}$ Гц $^{-1}$, $K \approx 50$, $2\eta \sim 0.3$, $\Omega_{12} = 3.75$ МГц. Формулы для внешней отражающей пластинки несколько отличаются от описанных выше для пластинки внутри резонатора, но могут быть получены абсолютно таким же методом. Для осциллирующей части сдвига максимума резонанса поглощения в двухмодовом лазере они имеют вид

$$\Delta\omega_s = G\rho \sin(2kL_0), \quad G = \frac{r_0}{\eta} K \frac{\Omega_{12}}{c/L} \gamma^2 \frac{L_0}{L}$$

для сдвига из-за наклона коэффициента усиления и

$$\Delta\omega_m = G \frac{1}{c/L} 2 \left(\frac{L_0}{L} + 1 \right) \cos(2kL_0)$$

для сдвига из-за модуляции длины резонатора. В результате получаем амплитуду осцилляций сдвига стабилизированной частоты ~ 92 Гц из-за частотной модуляции и ~ 26 Гц из-за наклона линейного коэффициента усиления (для меньших η они будут больше). Как видно из этой оценки амплитуды осцилляции, они того же порядка, что и наблюдаемые экспериментально.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-02-17094) и Отделения физических наук РАН в рамках программы «Оптическая спектроскопия и стандарты частоты».

Авторы выражают благодарность Д.А.Тюрикову за полезные обсуждения.

1. Багаев С.Н., Чеботаев В.П. *УФН*, **148** (1), 143 (1986).
2. Bagayev S.N., Chebotayev V.P., Dmitriyev A.K., Om A.E., Nekrasov Yu.V., Skvortsov B.N. *Appl. Phys. B*, **52**, 63 (1991).
3. Губин М.А., Проценко Е.Д. *Квантовая электроника*, **24**, 1080 (1997).
4. Gubin M.A., Tyurikov D.A., Shelkovnikov A.S., Kovalchuk E.V., Kramer G., Lipphardt B. *IEEE J. Quantum Electron.*, **31**, 2177 (1995).
5. Bagayev S.N., Dmitriyev A.K., Pokasov P.V. *Laser Phys.*, **7**, 989 (1997).
6. Alekseev V.A., Gubin M.A., Krylova D.D., Tyurikov D.A., Shelkovnikov A.S. *Laser Phys.*, **4**, 356 (1994).
7. Diddams S.A., Jones D.J., Ye J., Cundiff S.T., Hall J.L., et al. *Phys. Rev. Lett.*, **84** (22), 5102 (2000).
8. Holzwarth R., Udem Th., Hansch T.W., Knight J.C., Wadsworth W.J., Russel P.St.J. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 2264 (2000).
9. Берштейн И.Л., Степанов Д.П. *Изв. вузов. Сер. Радиофизика*, **16** (4), 531 (1973).
10. Donati S. *J. Appl. Phys.*, **49** (2), 495 (1978).
11. Козин Г.И., Петров В.В., Проценко Е.Д. *Письма в ЖТФ*, **16** (23), 53 (1990).
12. Gubin M., Kovalchuk E., Petrukhin E., Shelkovnikov A., Tyurikov D., Gamidov R., Erdogan C., Felder R., Gill P., Lea S.N., Kramer G., Lipphardt B. In *Frequency Standards and Metrology* (New Jersey – London – Singapore – Hong Kong: World Scientific, 2001, pp 453–460).
13. Алексеев В.А., Крылова Д.Д. *Квантовая электроника*, **17**, 869 (1990).
14. Alekseev V.A., Krylova D.D., Acef O. *Opt. Commun.*, **174**, 163 (2000).
15. Губин М.А., Никитин В.В., Петровский В.Н., Проценко Е.Д., Тюриков Д.А., Яценко Л.П. *Квантовая электроника*, **6**, 63 (1979).