

Особенности эволюции 0π -импульса в среде с неоднородным уширением резонансного квантового перехода

А.Е.Дмитриев, О.М.Паршков

Приведены результаты численного моделирования процесса эволюции 0π -импульса в среде с неоднородно уширенным резонансным квантовым переходом без учета необратимой релаксации. Сформулировано правило предсказания структуры 0π -импульса на больших расстояниях, которое основано на понятии площади 0π -импульса как площади под кривой модуля его огибающей. Для 0π -импульса брызгерного типа представлены аналитические соотношения между длительностью, пиковым значением и скоростью распространения.

Ключевые слова: самоиндуцированная прозрачность, неоднородное уширение, когерентные эффекты.

1. Введение

Ещё на раннем этапе изучения явления самоиндуцированной прозрачности (СИП) было обнаружено, что СИП может осуществляться не только оптическими солитонами – 2π -импульсами, но и некоторыми видами 0π -импульсов. В работе [1] огибающие 0π -импульсов были получены как частные решения уравнения \sin -Гордона при изучении СИП в отсутствие неоднородного уширения. Численный анализ [2] показал, что основные черты 0π -импульсов остаются неизменными и при учёте неоднородного уширения. Эксперимент по изучению распространения 0π -импульса в кристалле рубина был проведён в работе [3], в которой осуществлялось также и численное моделирование этого процесса.

При численном анализе, проведённом в [2], использовались граничные условия достаточно общего вида, в частности допускалось, что входной импульс имеет отличную от нуля площадь. Это затрудняло систематизацию полученных результатов. Кроме того, в то время, когда выполнялась работа [2], вычислительные возможности были недостаточными для изучения некоторых деталей эволюции 0π -импульсов. По этой же причине авторы [3] не смогли провести численное моделирование в условиях, близким к экспериментальным (подробнее см. [4]).

Настоящая работа посвящена численному моделированию процесса эволюции 0π -импульса, причем под ним понимается любой импульс с площадью (в смысле теории СИП [5]), равной нулю. Граничные условия расчета соответствуют 0π -импульсу, полученному наложением противофазных, сдвинутых относительно друг друга во времени лазерных импульсов. Именно этот естественный способ создания 0π -импульса был реализован в эксперименте [3]. Мы учитываем неоднородное уширение и ограничиваемся случаем точного резонанса, т.е. случаем

совпадения центральной частоты неоднородно уширенного квантового перехода и несущей частоты входного импульса. Интересуясь только когерентными эффектами, мы игнорируем процессы необратимой релаксации.

Изучение свойств 0π -импульсов представляется полезным по следующим причинам. Теория СИП, направленная в первую очередь на исследование свойств 2π -импульса, является составной частью теории нелинейных волн и дополняет последнюю важными аналитическими результатами, полученными, в частности, с помощью метода обратной задачи рассеяния [6, 7]. Представленные ниже итоги численного анализа позволяют надеяться, что подобную роль может сыграть и изучение эволюции 0π -импульса, поскольку в ней отчетливо прослеживаются некоторые простые закономерности. Изучение свойств 0π -импульса полезно и в связи с тем, что теория СИП, в которой он фигурирует, служит важной ступенью к пониманию резонансных процессов в фемтосекундном диапазоне длительностей лазерных импульсов [8]. Наконец, правильная интерпретация экспериментальных данных [3] затруднительна без знания свойств 0π -импульса, хотя необратимая релаксация, которая в нашей работе не учитывается, играет в этих экспериментах существенную роль.

2. Постановка задачи

Резонансная среда представляется ансамблем двухуровневых квантовых объектов, невырожденные уровни которых нумеруются в порядке роста энергии цифрами 1 и 2. Полагается, что гауссов контур разброса частот квантовых переходов около центральной частоты ω имеет ширину $2/T$ по уровню e^{-1} . Пусть ijk – правый ортонормированный базис лабораторной системы координат x, y, z , а $p = (1/\sqrt{2})|p_{x12} - ip_{y12}|$, где p_{x12} и p_{y12} – x - и y -компоненты вектора электродипольного момента перехода 1 – 2. Напряжённость электрического поля поляризованного по кругу лазерного излучения, распространяющегося вдоль оси z , представим в виде

$$E = \mu(\mathbf{i} + \mathbf{j})a(z, t) \exp\{i\omega[(z\eta/c) - t]\} + \text{компл. сопр.},$$

А.Е.Дмитриев, О.М.Паршков. Саратовский государственный технический университет, Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77; e-mail: tech@mail.saratov.ru; http://www.sstu.runnet.ru

где $a(z, t)$ – огибающая импульса; η – линейный показатель преломления среды, в которую внедрены квантовые объекты; $\mu = 3\hbar/[2^{3/2}T(\eta^2 + 2)p]$. Введём безразмерные независимые переменные

$$s = \alpha Tz, \quad w = (t - z\eta/c)/T,$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi\omega p^2(\eta^2 + 2)^2 N}{9c\hbar\eta};$$

N – концентрация резонансных объектов. В приближении медленных огибающих [9, 10] получим систему уравнений, самосогласованно описывающую взаимодействие поля и среды:

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{21} \exp(-\varepsilon^2) d\varepsilon,$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial w} + i\varepsilon\sigma_{21} = ia(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\partial w} = \text{Im}(aa_{21}^*),$$

где σ_{ik} ($i, k = 1, 2$) – амплитуды элементов матрицы плотности.

Система (1) дополняется начальными условиями $\sigma_{11}(s, w = 0) = 1$, $\sigma_{12}(s, w = 0) = \sigma_{22}(s, w = 0) = 0$, $s \geq 0$, описывающими первоначально невозбуждённую среду. Граничное условие, задающее импульс излучения на входной поверхности ($s = 0$) резонансной среды, имело вид

$$a(s = 0, w) = f(w) - f(w + \Delta w), \quad (2)$$

$$f(w) = r \left[\exp\left(q \frac{w - w_0}{\tau}\right) + \exp\left(-3q \frac{w - w_0}{\tau}\right) \right]^{-1}, \quad (3)$$

где r – амплитудный числовой множитель; $q = 1.59$; τ – длительность импульса $f(w)$ на полувысоте. Огибающая $f(w)$ описывает одиночный импульс колоколообразной формы, крутизна переднего фронта которого больше крутизны заднего. По форме такая огибающая соответствует огибающим лазерных импульсов в экспериментах по изучению СИП в кристалле рубина [3] и парах рубидия [11]. Огибающая (2) описывает 0π -импульс, полученный наложением двух противофазных импульсов, смещённых относительно друг друга на время Δw . Такая конструкция входного 0π -импульса моделирует экспериментальный способ его получения, реализованный и в работе [3].

Краевая задача (1)–(3) решалась численно. Исползованная для этой цели программа описана в работах [4, 12, 13], в которых также обсуждаются методы контроля правильности вычислений.

3. Способ представления результатов расчёта

Результаты расчёта представлены графиками функции $A_s(w)$, где $A_s(w) = |a(s = \text{const}, w)|$; через A_{sm} обозначено наибольшее значение функции $A_s(w)$. В рассматриваемом случае точного резонанса величина $a(s, w)$ действительна и, следовательно, $a(s, w) = \pm A_s(w)$. На графиках

как функции $A_s(w)$ полярность огибающей $a(s, w)$ обозначена знаками «+» и «-». Если полярности чередуются, то эти знаки ставятся только около некоторых субимпульсов.

В качестве интегральной характеристики огибающей рассматривается функция

$$\Theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(w) dw,$$

имеющая смысл площади под графиком модуля функции $a(s, w)$ при фиксированном s . В теории СИП [5] площадь импульса $\Theta(s)$ определяется интегралом непосредственно от самой функции $a(s, w)$. В случае точного резонанса и 0π -импульса на входе, а именно таким является импульс (2), согласно теореме площадей [5] равенство $\Theta(s) = 0$ выполняется для всех s .

Чтобы охарактеризовать колоколообразные огибающие $F_s(w)$, возникающие в результате расчёта, используются две безразмерные величины: F_{sm} – наибольшее значение и τ_p – половина длительности импульса по уровню $\text{sech}(1)F_{sm}$. Если указанная огибающая не деформируется с ростом s , то в рассмотрение вводится скорость v движения этой огибающей в системе отсчёта s, w : $v = (dw_m/ds)^{-1}$, где $w_m = w_m(s)$ – зависимость от s значения w , при котором $F_s(w) = F_{sm}$. Если $F_s(w)$ является огибающей 2π -импульса, то согласно теории СИП [5]

$$F_s(w) = F_{sm} \text{sech}\left(\frac{w - s/v}{\tau_p}\right), \quad (4)$$

$$v = \sqrt{\pi} \left[\tau_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\varepsilon^2)}{1 + \tau_p^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \right]^{-1},$$

$$F_{sm} = 2/\tau_p, \quad (5)$$

причём F_{sm} фактически от s не зависит. В нашей работе импульс, обнаруженный в расчёте, объявляется 2π -импульсом, если при подстановке его параметров F_{sm} , τ_p и v в формулы (4) и (5) эти равенства выполняются с погрешностью менее 2%.

В качестве энергетической характеристики рассматривается параметр $e_s = E(s)/E(0)$, где $E(s)$ – энергия, перенесённая излучением через единицу площади поперечного сечения на расстояние s от входа в резонансную среду.

4. Результаты расчётов

Расчёты, проделанные при различных комбинациях параметров $r, \tau, \Delta w$ и условиях, что $|\Delta w - \tau|/\tau < 0.3$, хорошо согласуются со следующим предположением: качественная картина эволюции излучения определяется тем, в каком из интервалов (Θ_{i-1}, Θ_i) ($i = 1, 2, 3, \dots$) заключена площадь $\Theta(0)$ входного лазерного импульса. Числа Θ_i задаются формулами

$$\Theta_i = \left(4 \left[\frac{i}{2} \right] + 3 \left\{ \frac{i}{2} \right\} \right) \pi, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

где $[a]$ и $\{a\}$ – символы целой и дробной частей числа a . Это утверждение иллюстрируется ниже на основе расчётов, для которых в (2), (3) полагалось, что $\tau = \Delta w = 22$. При таком значении τ огибающая (3) соответствует (под-

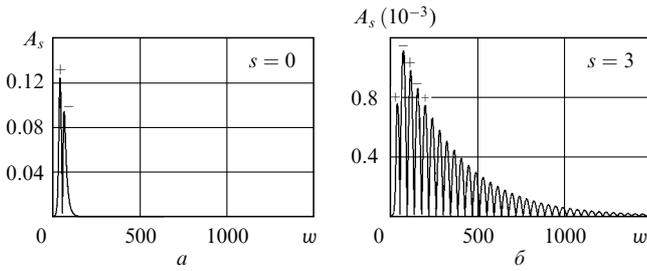


Рис.1. Формирование затухающего 0π -импульса при $\Theta(0) = 1.43\pi$: входной 0π -импульс (а) и затухающий 0π -импульс при $s = 3$ (б).

робнее см. [13]) огибающим лазерных импульсов, использованных в экспериментах по изучению СИП в парах рубидия [11]. Отметим, что при данном выборе параметров τ и $\Delta\omega$ справедливо соотношение $\Theta(0) = 19.89r$. Полагая последовательно $i = 1, 2, 3, \dots$, рассмотрим следующие варианты.

Вариант 1: $i = 1, 0 < \Theta(0) < 1.5\pi$. На рис.1 представлены результаты расчёта при $\Theta(0) = 1.43\pi$. Знаки «+» и «-» отмечают полярность пиков, причём в данном случае полярности чередуются. Расчёт показал, что при $s > 2$ импульс убывает, незначительно увеличиваясь по длительности, таким образом, что

$$\Theta(s) = \Theta(2) \exp[-\sqrt{\pi}(s - 2)]. \quad (7)$$

Формула (7) имеет вид теоремы площадей для слабого сигнала [14, 15], но отличается от неё заменой площади $\Theta(s)$ на площадь $\Theta(s)$. При $s > 2$ в системе отсчёта s, w импульс неподвижен и, следовательно, в лабораторной системе отсчёта его скорость равна c/η . Такой импульс далее называется затухающим 0π -импульсом.

Вариант 2: $i = 2, 1.5\pi < \Theta(0) < 4\pi$. На рис.2 представлены результаты расчёта при $\Theta(0) = 1.8\pi$. Как и в предыдущем случае полярности пиков чередуются. Из рис.3 следует, что при $s > 2$ энергия e_s импульса неизменна, а пиковое значение A_{sm} осциллирует. Подобный импульс, форма которого не является стационарной, в теории нелинейных волн называется бризером [16, 17] (далее 0π -бризер). Тонкой линией на рис.2,б,в изображена огибающая $F_s(w)$ функции $A_s(w)$. Расчет показал, что эта «вторичная огибающая» определяется формулами (4) при замене условия (5) условием

$$F_{sm} = 4/\tau_p, \quad (8)$$

где в данном случае $F_{sm} = 0.0738$ – пиковое значение огибающей $F_s(w)$. Отметим, что расхождение между значе-

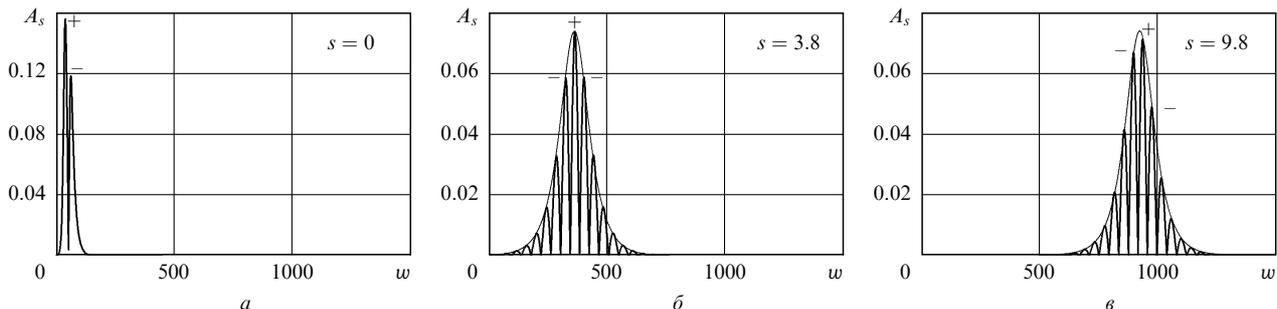


Рис.2. Формирование 0π -бризера при $\Theta(0) = 1.8\pi$: входной 0π -импульс (а), 0π -бризер при $s = 3.8$ (б) и $s = 9.8$ (в). Тонкой линией изображена «вторичная огибающая» 0π -бризера $F_s(w)$.

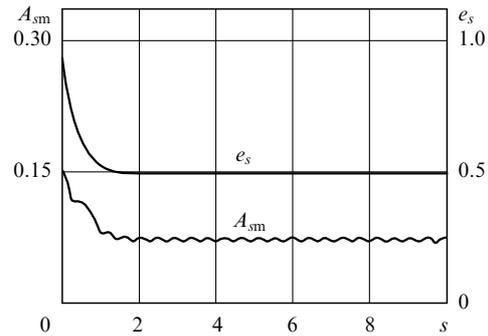


Рис.3. Зависимость от s пикового значения A_{sm} огибающей $A_s(w)$ и энергии e_s при формировании 0π -бризера в случае $\Theta(0) = 1.8\pi$.

ниями v (вычисленным по формулам (4) и (8) при указанном F_{sm} и полученным непосредственно из зависимостей $A_s(w)$) не превышает 1 %.

Поскольку огибающая $F_s(w)$ с ростом s не деформируется, естественно принять её скорость v и длительность τ_p за скорость и длительность (по уровню $\text{sech}(1)F_{sm}$) самого 0π -бризера. Таким образом, из формул (4), (5), (8) следует, что при одинаковых τ_p скорости 0π -бризера и 2π -импульса одинаковы, но 0π -бризер вдвое больше 2π -импульса по пиковой напряжённости электрического поля. Возможность существования импульса с подобными свойствами в отсутствие неоднородного уширения была предсказана в [1] при анализе частных решений уравнения \sin -Гордона. Однако полученная в [1] связь между v и τ_p существенно отличалась от связи, представленной в нашей работе. Численный анализ [2] с учётом неоднородного уширения также выявил возможность возникновения 0π -бризера, но детали его структуры в [2] не исследовались.

На рис.4 представлены результаты расчётов при $\Theta(0) = 1.56\pi$ и $\Theta(0) = 3.7\pi$. Видно, что с ростом $\Theta(0)$ длительность 0π -бризера и число субимпульсов в нём уменьшаются, а пиковое значение возрастает.

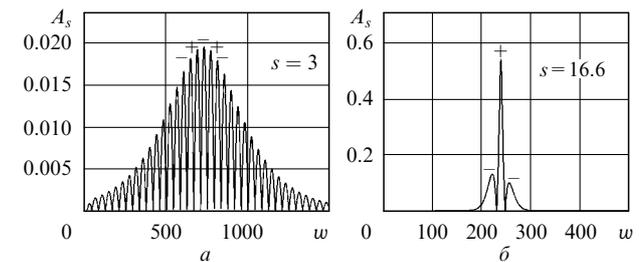


Рис.4. Структура 0π -бризера при $\Theta(0) = 1.56\pi, s = 3$ (а) и $\Theta(0) = 3.7\pi, s = 16.6$ (б).

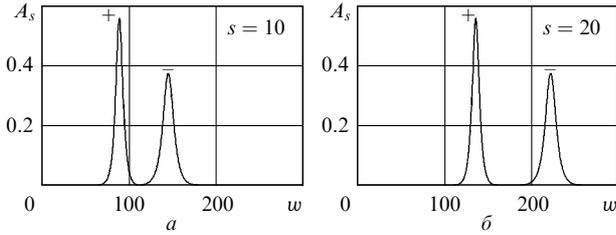


Рис. 5. Эволюция разделяющегося 0π -импульса при $s = 10$ (а) и $s = 20$ (б); $\Theta(0) = 5\pi$.

Вариант 3: $i = 3$, $4\pi < \Theta(0) < 5.5\pi$. Результаты расчёта для $\Theta(0) = 5\pi$ представлены на рис.5. Изображённые на нём отдельные импульсы являются 2π -импульсами различной полярности. Имея разные длительности, эти импульсы движутся с различными скоростями. Подобная двухимпульсная конфигурация поля рассматривалась в работах [1, 2] и была названа разделяющимся 0π -импульсом.

Вариант 4: $i = 4$, $5.5\pi < \Theta(0) < 8\pi$. Результаты расчёта при $\Theta(0) = 7\pi$ представлены на рис.6,а. В данном случае образуются разделяющийся 0π -импульс (импульсы 1 и 2) и 0π -бризер (импульс 3).

Вариант 5: $i = 5$, $8\pi < \Theta(0) < 9.5\pi$. Результаты расчёта для $\Theta(0) = 9\pi$ приведены на рис.6,б. В данном случае возникают два разделяющихся 0π -импульса, первый из которых образован первой парой импульсов, а второй – второй парой.

Вариант 6: $i = 6$, $9.5\pi < \Theta(0) < 12\pi$. Результаты расчёта при $\Theta(0) = 10.5\pi$ приведены на рис.6,в. Импульсы 1 и 3 образуют первый разделяющийся 0π -импульс, а импульсы 2 и 4 – второй разделяющийся 0π -импульс. С ростом s импульс 3 обгоняет импульс 2 и 2π -импульсы выстраиваются в порядке убывания их пиковых значений. Импульс 5 является 0π -бризером.

Если экстраполировать результаты расчётов в сторону больших i , то можно подвести следующий итог. Пусть $\Theta(0)$ – площадь под графиком модуля огибающей входного 0π -импульса. При $\Theta(0) < 1.5\pi$ формируется только затухающий 0π -импульс. При $\Theta(0) > 1.5\pi$ возможно образование нескольких разделяющихся 0π -импульсов и одного 0π -бризера. Число разделяющихся 0π -импульсов равно $[\Theta(0)/4\pi]$, а 0π -бризер образуется только при условии $\{\Theta(0)/4\pi\} > 3/8$, т. е. если остаток от деления $\Theta(0)$ на 4π превышает 1.5π .

Отметим, что наши расчёты позволяли определять критические значения Θ_i площади входного 0π -импульса с точностью около 0.1π . Расчёты, проделанные для больших значений Δw ($\Delta w = 4\tau$), показали, что пороговое для образования 0π -бризера значение $\Theta(0)$ находится вблизи 1.2π . Поэтому не исключается возможность слабой зависимости Θ_i от Δw .

Согласно теории нелинейных волн [16, 17] бризеры, как и солитоны, упруго взаимодействуют при столкновениях. Для проверки этого факта в случае 0π -бризера был проведён расчёт с $a(s = 0, w)$ в виде суммы сдвинутых относительно друг друга на 660 единиц времени w входных импульсов (2) с $\tau = \Delta w = 22$ и площадями $\Theta(0)$, равными 1.8π (первый импульс) и 3π (второй импульс). Результаты этого расчёта для больших s , когда 0π -бризеры уже сформированы, представлены на рис. 7. Как видно из рис. 7,а,в, формы 0π -бризеров до и после столкновения одинаковы. Расчёт показал, что неизменными остаются и скорости 0π -бризеров. В момент перекрывания (рис.7,б) пиковое значение огибающей меньше суммы пиковых значений отдельных 0π -бризеров. Однако это ещё не является свидетельством нелинейности взаимодействия, поскольку огибающая $a(s, w)$ может принимать и положительные и отрицательные значения. Нелинейность процесса проявляется теперь в изменении скоростей обоих 0π -бризеров

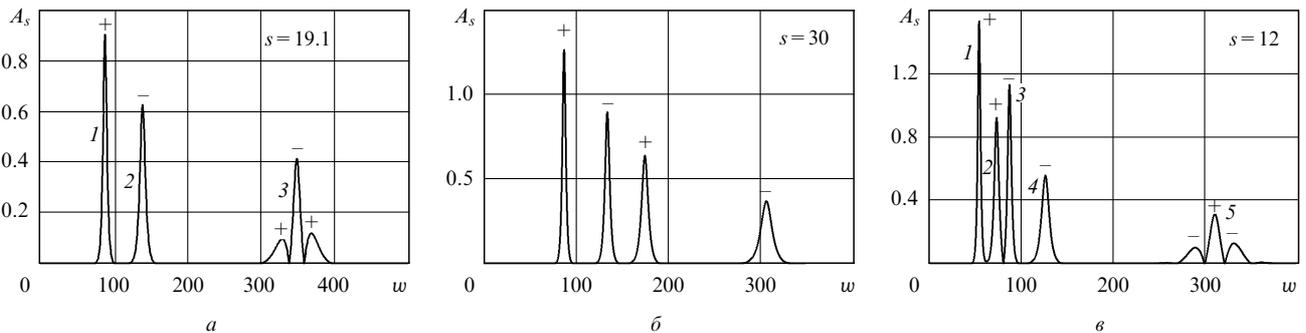


Рис. 6. Сложный 0π -импульс, состоящий из разделяющегося 0π -импульса (1, 2) и 0π -бризера (3) при $\Theta(0) = 7\pi$, $s = 19.1$ (а), двух разделяющихся 0π -импульсов при $\Theta(0) = 9\pi$, $s = 30$ (б) и двух разделяющихся 0π -импульсов (1, 3 и 2, 4) и 0π -бризера (5) при $\Theta(0) = 10.5\pi$, $s = 12$ (в).

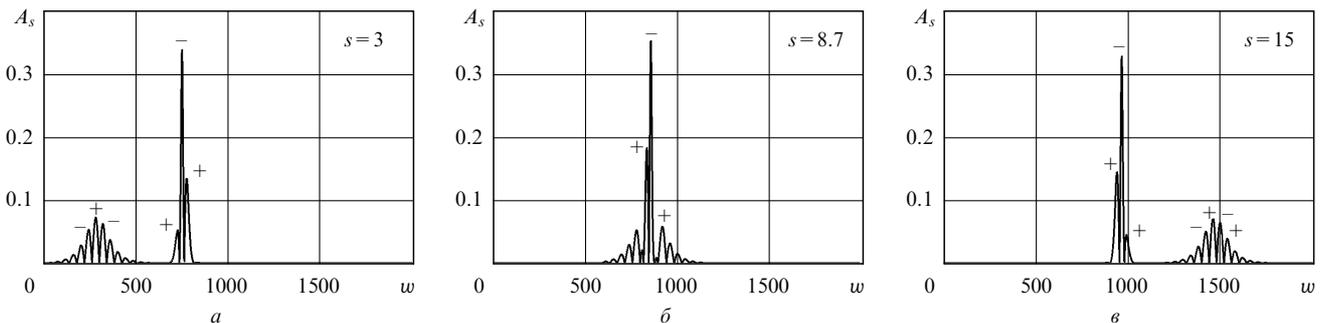


Рис. 7. Взаимодействие 0π -бризеров: изолированные 0π -бризеры до (а) и после (в) столкновения импульсов и структура огибающей при их столкновении (б).

внутри зоны перекрывания. Расчёт показал, что больший 0π -бризер выходит из области столкновения на 13 единиц времени w раньше, чем это предписывается скоростью его движения до (и после) столкновения. Малый 0π -бризер, наоборот, задерживается в области столкновения на 57 единиц времени w . Подобное поведение 0π -бризеров аналогично поведению двух солитонов, взаимодействие которых сопровождается фазовым сдвигом их пространственных временных траекторий [16].

5. Заключение

Расчёты, представленные в данной работе, согласуются с известным фактом [1, 2], что СИП реализуется не только оптическими солитонами – 2π -импульсами, но и некоторыми типами 0π -импульсов. Для одного из этих типов с характерными чертами бризера на основе проведённого анализа предложены аналитические выражения, описывающие связь между его пиковым значением, длительностью и скоростью распространения в условиях неоднородного уширения квантового перехода. Другой тип 0π -импульса, не теряющего энергии при распространении, представляет собой пару разнополярных 2π -импульсов разной длительности. Кроме того, расчёт выявил возможность существования затухающего 0π -импульса, площадь под модулем огибающей которого убывает с расстоянием экспоненциально.

Показано, что распад входного 0π -импульса подчиняется некоторой простой закономерности, при формулировке которой входной импульс характеризуется площадью $\Theta(0)$ под графиком модуля огибающей, тогда как в теории СИП площадь определяется как площадь под графиком самой огибающей. Упомянутая закономерность представляет собой правило нахождения структуры 0π -импульса на больших расстояниях по заданному значению $\Theta(0)$.

В представленной работе, посвящённой изучению ко-

герентных эффектов, процессы необратимой релаксации игнорировались. Численный анализ с учетом таких процессов свидетельствует об их нетривиальном влиянии на эволюцию 0π -импульса. Детали этих расчётов с приложением к моделированию эксперимента [3] по наблюдению 0π -бризера в кристалле рубина будут изложены в другой статье. Интересные особенности, возникающие в процессе формирования 0π -импульсов, появляются при отступлении от условий строгого резонанса. Изучение этого вопроса также будет предметом дальнейших исследований.

1. Lamb G.L., Jr. *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 99 (1971).
2. Hopf F.A., Lamb G.L., Jr., Rhodes C.K., Scully M.O. *Phys. Rev. A*, **3**, 758 (1971).
3. Diels J.C., Hahn E.L. *Phys. Rev. A*, **10**, 2501 (1974).
4. Дмитриев А.Е., Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **34** (8) (2004).
5. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 908 (1967); *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969).
6. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. *J. Math. Phys.*, **15**, 1852 (1974).
7. Кауп D.J. *Phys. Rev. A*, **16**, 704 (1977).
8. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30**, 287 (2000).
9. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики. 1961–1963* (М.: изд. АН СССР, 1965).
10. Бутылкин В.С., Каплан А.Е., Хронопуло Ю.Г., Якубович Е.И. *Резонансные взаимодействия света с веществом* (М.: Наука, 1977).
11. Slusher R.E., Gibbs H.M. *Phys. Rev. A*, **5**, 1634 (1972).
12. Вершинин А.Л., Дмитриев А.Е., Паршков О.М., Писной А.Л. *Квантовая электроника*, **32**, 33 (2002).
13. Вершинин А.Л., Дмитриев А.Е., Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **33**, 993 (2003).
14. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
15. Crisp M.D. *Appl. Opt.*, **11**, 1124 (1972).
16. Лэм Дж.Л. *Введение в теорию солитонов* (М.: Мир, 1983).
17. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (М.: Мир, 1988).