

# Динамика полупроводникового лазера с запаздывающей обратной связью в зависимости от числа стационарных решений

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев

*Исследованы режимы генерации диодного лазера с внешним зеркалом в рамках уравнений Лэнга–Кобаяши (ЛК) в пределе малого расстояния до зеркала. Система уравнений ЛК интегрируется напрямую с помощью разработанного комплекса программ. Кроме того, численно находятся точки неустойчивости и бифуркации решений путём вычисления контурного интеграла и производится расчёт спектра показателей Ляпунова. Выявлены зоны гистерезиса динамики генерации лазера, возникающие при изменении фазы отражённого сигнала. Найдены параметры, при которых в фазовом пространстве сосуществуют два и три аттрактора, отвечающие разным динамическим режимам. Показано, что при прочих фиксированных параметрах рост накачки приводит к хаотическому режиму по классическому сценарию через бифуркации удвоения периода колебаний. Найдены области параметров, в которых генерируются пакеты регулярных пульсаций и наблюдается переход таких пакетов в хаотический режим.*

**Ключевые слова:** полупроводниковый лазер с внешним зеркалом, динамика излучения.

## 1. Введение

Динамика генерации диодного лазера зачастую характеризуется сложностью и плохой воспроизводимостью. В отсутствие контроля количества поперечных мод в спектре пульсаций излучения имеются характерные частоты в десятки и сотни мегагерц, а хаос, если он развивается, наблюдается и во времени и в пространстве. При условии стабилизации одной поперечной моды нелинейность среды в сочетании с неоднородностью лазерного поля также могут быть причиной возбуждения низкочастотных пульсаций поля [1]. С точки зрения использования хаотических сигналов для оптической связи требуются высокая частота (более 1 ГГц) и воспроизводимость режимов пульсаций. Одним из вариантов, позволяющих обеспечить оба условия, является использование дополнительного зеркала, отодвинутого на определенное расстояние от одномодового (по поперечным и продольным индексам) диодного лазера. Для условий, когда отражение от внешнего зеркала много меньше, чем от грани полупроводника, Лэнг и Кобаяши [2] вывели динамические уравнения, получившие широкое распространение при изучении динамики хаотических лазеров.

Математическая особенность уравнений Лэнга–Кобаяши (ЛК) связана с запаздыванием поля, отражённого от внешнего зеркала, на время  $\tau_L$ , что приводит к появлению функции со сдвинутым аргументом. Решение уравнений со сдвинутым аргументом однозначно определяется, строго говоря, заданием функций на интервале  $[-\tau_L, 0]$ , что эквивалентно появлению у системы бесконечного числа степеней свободы. Это обстоятельство,

радикально отличающее такие системы от более традиционных лазерных систем с хаотической динамикой, потребовало модификации математических методов её исследования.

В работе [3] рассмотрена проблема расчёта показателей Ляпунова для бесконечномерной системы, характеризующих её динамическую устойчивость. Была предложена процедура расчёта и найдена связь этих показателей с различными определениями фрактальной размерности, связанной со структурой интегральных кривых в фазовом пространстве в режиме динамического хаоса. Как показывают многочисленные расчёты, размерность аттракторов, которые являются множествами фрактальной (дробной) размерности, вложенными в бесконечномерное фазовое пространство, оказывается конечной. Ограничивая в численных расчётах размерность фазового пространства достаточно большим числом  $N$ , можно найти спектр показателей Ляпунова ( $N$  значений). Если при увеличении  $N$  положительные показатели, свидетельствующие о динамической неустойчивости системы, изменяются мало, можно полагать, что эти показатели найдены правильно. Вопрос об эквивалентности дискретной системы уравнений, заменяющей в численных расчётах дифференциальные уравнения, решается путём повышения точности расчётов до сходимости.

Система ЛК-уравнений обладает пятью управляющими параметрами, и динамика излучения ещё слишком сложна, так что до полного понимания её далеко. В численных расчётах и экспериментально при различных значениях управляющих параметров наблюдались такие нелинейные динамические явления, как удвоение периода [4], квазипериодический сценарий перехода к хаосу [5], ижеда-сценарий перестройки динамики системы [6], каскады бифуркаций [7].

В [5] изучена эволюция динамического поведения решений ЛК-уравнений с увеличением силы обратной связи (ОС) для большого времени задержки. Найдено, что предельный цикл через бифуркацию преобразуется в квази-

А.П.Напартович, А.Г.Сухарев. ФГУП «ГНЦ РФ – Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований», Россия, 142190 Троицк, Московская обл.; тел.: (95) 334 04 50, e-mail: apn@triniti.ru, sure@triniti.ru

Поступила в редакцию 29 декабря 2003 г., после доработки – 6 апреля 2004 г.

периодическое решение с двумя несоизмеримыми частотами, так что траектории в фазовом пространстве покрывают двумерный тор. Затем появляется третья несоизмеримая частота, рождающая трехмерный тор, который быстро эволюционирует в хаотический аттрактор. Дальнейший рост силы ОС приводит к рождению еще одного хаотического аттрактора. Эксперимент в [5] демонстрирует, что спектр интенсивности излучения лазера содержит набор частот, отвечающий обоим аттракторам. При высоком временном разрешении можно увидеть, что сигналы для разных аттракторов антикоррелированы и происходит случайное переключение с одного аттрактора на другой.

Когда частота релаксационных колебаний кратна обратному времени задержки пучка, который отражается от внешнего зеркала, удаленного на расстояние  $L$  ( $v_{ec} = c/2L$ ), переход к хаосу происходит через цепочку удвоенных периодов [4].

Для лазера вблизи порога генерации с частотой кругового обхода  $v_{ec} = 1$  ГГц обнаружен переход к хаосу через каскад бифуркаций [7]. Устойчивая генерация с ростом силы ОС дестабилизируется, проходя через серию бифуркаций Хопфа, и становится хаотической, затем возникают редкие глубокие провалы мощности лазера, которые авторы связывают с низкочастотными флуктуациями (НЧФ). При дальнейшем росте силы ОС опять возникает устойчивая генерация, но на другой частоте и с более высокой интенсивностью, после чего предыдущий сценарий повторяется. Экспериментально обнаружено сосуществование двух режимов: моды НЧФ и стационарной генерации.

В описанных выше работах, посвященных исследованию лазеров с большим временем задержки ОС, естественной мерой частоты кругового обхода  $v_{ec}$  являлась частота  $v_{ro}$  релаксационных колебаний лазера. Для коротких резонаторов ( $v_{ec} \gg v_{ro}$ ) в [8] наблюдался режим, в котором излучение лазера представляло собой периодическую последовательность пакетов регулярных пульсаций (ПРП). Каждый пакет состоял из световых импульсов с частотой следования  $v_{ec}$ , а частота повторения ПРП была примерно на порядок меньше частоты пульсаций. При малой задержке динамика лазера с запаздывающей связью оказывается сходной с динамикой пары диодов с оптической связью без задержки [9] и демонстрирует двухчастотный (квазипериодический) сценарий перехода к хаосу.

Возможность формирования хаотического аттрактора высокой размерности с высокой частотой модуляции представляет интерес для криптографических систем связи [10], позволяя кодировать и передавать широкополосный сигнал (уже достигнута ширина полосы 1.5 ГГц).

Хорошо известно, что уравнения ЛК имеют так называемые стационарные решения [11]. Число разных решений и их устойчивость зависят от комбинаций параметров, из которых наиболее важными являются сила и время задержки ОС. В настоящей работе мы пытаемся увязать характер решений с количеством и устойчивостью так называемых стационарных решений уравнений ЛК. Система уравнений ЛК интегрируется напрямую с помощью разработанного комплекса программ (адаптированный метод Гира для задач с ОС). Кроме того, путём вычисления контурного интеграла находятся точки неустойчивости и бифуркации решений и в соответствии с работой [3] производится расчёт спектра пока-

зателей Ляпунова. Исследования ограничиваются рассмотрением относительно малых времён задержки, обеспечивающих высокую частоту пульсаций.

## 2. Стационарные решения уравнений ЛК и их устойчивость

Лазерные системы с внешней обратной связью изучаются довольно интенсивно (основы теории и результаты, полученные вплоть до 2000 г., можно найти в [11]). Уравнения ЛК, описывающие лазерный диод с обратной оптической связью, в безразмерных переменных имеют следующий вид:

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = (1 - iR)NX(\tau) + iMX(\tau - \tau_L) \exp(i\kappa), \quad (1)$$

$$\kappa = \omega_0 \tau_L - \frac{\pi}{2},$$

$$T \frac{\partial N}{\partial \tau} = P - N - (1 + 2N)X^2, \quad (2)$$

где уравнение для комплексного поля  $X = E \exp(i\varphi)$  можно расщепить на два вещественных уравнения:

$$\frac{\partial E}{\partial \tau} = NE(\tau) - ME(\tau - \tau_L) \sin[\kappa + \varphi(t - \tau_L) - \varphi], \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = -RN + M \left[ \frac{E(t - \tau_L)}{E(t)} \right] \cos[\kappa + \varphi(t - \tau_L) - \varphi]. \quad (4)$$

Здесь  $\tau_L$  – время задержки в петле обратной связи длиной  $2L$ ;  $\omega_0$  и  $E$  – частота и амплитуда электромагнитного поля. Усиление активной среды при не слишком большом превышении порога генерации может быть приближенно представлено линейной функцией плотности носителей  $\mathcal{N}$ :  $G(\mathcal{N}) = 1/\tau_{ph} + g(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{th})$ , где  $g = \partial G/\partial \mathcal{N}$  – дифференциальное усиление среды. Пороговое усиление равно обратному времени жизни фотона  $\tau_{ph}$  для полупроводникового лазера без внешнего резонатора. Безразмерные переменные определены следующим образом: амплитуда поля  $X = (\frac{1}{2}g\tau_s)^{1/2} \mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}$  – комплексная амплитуда физического поля), инверсная населенность, отсчитываемая от порога,  $N = \frac{1}{2}g\tau_{ph}(\mathcal{N} - \mathcal{N}_{th})$  и нормированная интенсивность накачки  $P = \frac{1}{2}g\tau_{ph}(p\tau_s - \mathcal{N}_{th})$ . Время жизни носителей  $T = \tau_s/\tau_{ph}$ , текущее время  $\tau = t/\tau_{ph}$  и сила ОС от внешнего зеркала  $M = (R_c/R_d)^{1/2} \times (\tau_{ph}/\tau_d)$  ( $R_c$  и  $R_d$  – коэффициенты отражения от зеркала и торца диода,  $\tau_d$  – время кругового обхода диода) также были обезразмерены на время жизни фотона. Антиволноводный параметр  $R$  пропорционален отношению производной показателя преломления по населённости к дифференциальному усилению среды  $R = -2k_0(\partial n/\partial \mathcal{N}) \times (\partial G/\partial \mathcal{N})^{-1}$ .

Уравнения (2)–(4) имеют так называемые стационарные решения [11], которые характеризуются ненулевой частотой  $\Omega = \partial \varphi/\partial \tau = \text{const}$ , в то время как  $\partial E/\partial \tau = \partial N/\partial \tau = 0$ . Стационарные решения находятся из следующих уравнений:

$$\frac{N}{M} = \sin(\kappa - \Omega \tau_L), \quad (5)$$

$$RN + \Omega = M \cos(\kappa - \Omega \tau_L), \quad (6)$$

$$P = N + (1 + 2N)E^2. \quad (7)$$

Из уравнений (5), (6) может быть выведено трансцендентное уравнение для частоты  $\Omega$  [11]:

$$\Omega = M(1 + R^2)^{1/2} \sin[\Omega\tau_L - \kappa + \arctan(1/R)]. \quad (8)$$

Число решений этого уравнения определяется одним параметром, который принято называть эффективной силой ОС:  $s = M\tau_L(1 + R^2)^{1/2}$  [11]. В уравнения ЛК входят пять внешних параметров: превышение накачки над порогом  $P$ , время жизни носителей  $T$ , время запаздывания ОС  $\tau_L$ , амплитуда  $M$  и фаза обратной связи  $\kappa$ . Эффективная сила ОС  $s$ , определяющая число стационарных решений, зависит только от произведения двух из них (мы игнорируем возможность варьирования величины  $R$ ). Несмотря на то что формально стационарные решения содержат зависимость от времени, анализ их устойчивости по отношению к малым возмущениям, экспоненциально зависящим от времени [11], сводится к системе уравнений для вариаций коэффициентов, соответствующих инверсии населенности  $n_{inv}$ , амплитуде поля  $\alpha$  и фазе поля  $\psi$ :

$$\lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \\ n_{inv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N(1 - e^{-\lambda\tau_L}) & ME(1 - e^{-\lambda\tau_L}) \cos(\kappa - \Omega\tau_L) & E \\ (-\frac{M}{E})(1 - e^{-\lambda\tau_L}) \cos(\kappa - \Omega\tau_L) & N(1 - e^{-\lambda\tau_L}) & -R \\ (-\frac{2E}{T})(1 + 2N) & 0 & -\gamma \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ \psi \\ n_{inv} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где  $\gamma T = (1 + 2P)/(1 + 2N)$ .

Показатель экспонент  $\lambda$  находится из трансцендентного уравнения

$$g_3(\lambda) = (\gamma + \lambda) \{ [M(1 - e^{-\lambda\tau_L}) \sin(\kappa - \Omega\tau_L) - \lambda]^2 + M^2(1 - e^{-\lambda\tau_L})^2 \cos^2(\kappa - \Omega\tau_L) \} - [2(P - N)/T] \quad (10)$$

$$\times \{ M(1 - e^{-\lambda\tau_L}) [R \cos(\kappa - \Omega\tau_L) + \sin(\kappa - \Omega\tau_L)] - \lambda \} = 0.$$

Наличие корня  $\lambda = 0$  обусловлено произвольностью начала отсчёта фазы. Устойчивость стационарных решений определяется знаком реальной части  $\lambda$ . Решение неустойчиво при  $\text{Re}\lambda > 0$ . Чтобы исключить корень в начале координат, введём функцию  $g_2(\lambda) \equiv g_3(\lambda)/\lambda$ .

Уравнение (10) принимает вид

$$g_2(\lambda) = \lambda(\gamma + \lambda) [1 + M^2 f^2 + 2Mf \sin(\Omega\tau_L - \kappa)] + \{ 2[P + M \sin(\Omega\tau_L - \kappa)]/T \} \{ 1 - Mf(1 + R^2)^{1/2} \times \cos[\Omega\tau_L - \kappa + \arctan(1/R)] \} = 0, \quad (11)$$

где  $f = (1 - e^{-\lambda\tau_L})/\lambda$ . Число нулей уравнения (11) в правой комплексной полуплоскости может быть известным образом выражено через контурный интеграл, охватывающий правую полуплоскость,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\text{Re}\lambda > 0} d\lambda \frac{g_2'(\lambda)}{g_2(\lambda)}.$$

Этот контурный интеграл может быть сведен к интегралу вдоль мнимой оси. Тогда число нулей (11) в правой полуплоскости определяется выражением

$$n = 1 - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{i\infty} d\lambda \frac{g_2'(\lambda)}{g_2(\lambda)}.$$

Указанный интеграл находился численно с помощью одной из подпрограмм пакета. Развитие неустойчивости имеет место в момент, когда один из нулей уравнения (11) переходит из левой полуплоскости в правую ( $n = 1$ ). Бифуркация Хопфа соответствует одновременному пересечению мнимой оси (симметрично относительно нуля) двумя корнями. При этом происходит перестройка режима генерации – возникают осцилляции на частоте, совпадающей с мнимой частью корней.

В приближении короткого резонатора,  $M\tau_L \ll 1$ , можно получить оценку частоты колебаний поля в точках бифуркации Хопфа. Полагая  $\lambda = i\omega$ , получаем два комплексно-сопряженных корня с точностью до второго порядка по  $\omega\tau_L \ll 1$ :

$$\omega^2 = \frac{2(P - N)}{T} \times \frac{1 - M\tau_L(1 + R^2)^{1/2} \sin(\kappa - \Omega\tau_L + \arctan R)}{1 + M^2\tau_L^2 - 2M\tau_L \sin(\kappa - \Omega\tau_L)}; \quad (12)$$

критическое значение фазы  $\kappa = \kappa_{cr}$  находится из уравнения (в дополнительном предположении, что  $M \ll P$  и с учётом уравнения (5))

$$\frac{\gamma T}{P\tau_L} + 2M\tau_L [M\tau_L - \sin(\kappa_{cr} - \Omega\tau_L)] + M\tau_L(1 + R^2)^{1/2} \times \sin(\kappa_{cr} - \Omega\tau_L + \arctan R) = 0. \quad (13)$$

В грубом приближении частота лазерных осцилляций имеет порядок частоты релаксационных колебаний  $(2P/T)^{1/2}$ . В действительности же в пределах применимости формул (12), (13) изменение частоты колебаний с вариацией эффективной силы ОС  $s$  оказывается заметным.

### 3. Расчётные методики

Система уравнений (2)–(4) решалась одним из вариантов метода Гира. Преимущество метода Гира перед другими многошаговыми методами численного интегрирования жестких систем состоит в легкости изменения шага и порядка интегрирования. Особенности используемой расчётной программы описаны в Приложении 1.

Для вычисления спектра показателей Ляпунова в системах с запаздыванием применяется процедура Паккарда и Такенса. Согласно теореме Такенса необходимо использовать пространство вложения с размерностью, которая не менее чем в два раза плюс единица больше размерности исследуемого аттрактора. При этом условии ожидается, что спектр положительных показателей Ляпунова, находимый для конечной системы, будет адекватен спектру для исходной бесконечномерной системы.

При малой размерности аттрактора (в случае короткого внешнего резонатора) пространство вложения мо-

жет совпадать с размерностью системы  $n$ . С ростом времени задержки в цепи ОС размерность аттрактора растёт. Тогда по обобщенной процедуре Паккарда и Такенса [12] конструируется новое пространство вложения размерности  $m * n$ , являющееся объединением фазовых пространств, образованных векторами состояния системы в моменты времени  $i, i + 1, \dots, i + m - 1$ . Из теоремы Такенса следует, что почти для любых реализаций динамической системы, сконструированной подобным образом, её аттрактор будет иметь те же свойства, что и искомым, если только размерность построенного пространства вложения окажется достаточной для описания свойств искомого аттрактора с хаусдорфовой размерностью  $d_H$  ( $m * n \geq 2d_H + 1$ ).

При таком условии размерность аттрактора и спектр ляпуновских показателей, найденные для конечномерного пространства, служит хорошим приближением этих величин для искомого аттрактора. Для уравнений ЛК число уравнений  $n = 3$ . Число  $m$  естественно ограничить числом сеточных узлов, попадающих в интервал задержки при выбранном шаге интегрирования:  $m = \tau/h$ . Шаг интегрирования определяется требованиями точности, так что  $m$  оказывается пропорциональным времени запаздывания. Уже при  $\tau = 10$  брать для расчётов максимальное значение  $m = 2000$  нереально. Однако нет необходимости вычислять большое количество показателей Ляпунова. Когда показатель равен большому отрицательному числу, то для аттрактора это измерение исчезает (компактифицируется). Практика показывает, что для нахождения положительных показателей Ляпунова при  $\tau = 80$  достаточно взять  $m = 3 - 4$ . Детали расчета показателей Ляпунова вынесены в Приложение 2.

#### 4. Результаты численного расчёта динамики системы

Анализ решений уравнений ЛК удобно начинать с рассмотрения частоты стационарного решения  $\Omega$ , которая при фиксированной эффективной силе ОС может быть построена как функция фазы ОС  $\kappa$  (ввиду очевидной периодичности по  $\kappa$  достаточно рассмотреть область  $0 < \kappa < 360^\circ$ ). Чем больше при фиксированной фазе эффективная сила ОС, тем больше число стационарных решений. Наш подход ориентирован на анализ изменений в динамике генерации по мере роста эффективной силы ОС, сопровождаемого усложнением динамики. Основное внимание уделяется изучению роли параметра фазы ОС, который трудно контролировать в эксперименте. Наличие многих параметров в задаче делает проблему классификации режимов и сценариев развития хаоса чрезвычайно сложной.

В численных расчётах нами выбраны фиксированные значения  $T = 1000$  и  $R = 3$ , являющиеся типичными для диодных лазеров. Кроме того, мы ограничились рассмотрением лазера с небольшим превышением накачки  $P$  над порогом. Зависимость  $\Omega(\kappa)\tau_L/s$  для относительно малой эффективной силы связи показана на рис.1 для параметров  $P = 0.2, M = 0.02, \tau_L = 10$ . На кривой отмечены участки, соответствующие устойчивым стационарным решениям, а также области неустойчивости по отношению к хопфовским бифуркациям (наличие двух корней в правой полуплоскости). Видно, что неустойчивость по отношению к хопфовским бифуркациям имеет место в малой окрестности фазы  $\kappa = 90^\circ$ . Первый ляпуновский

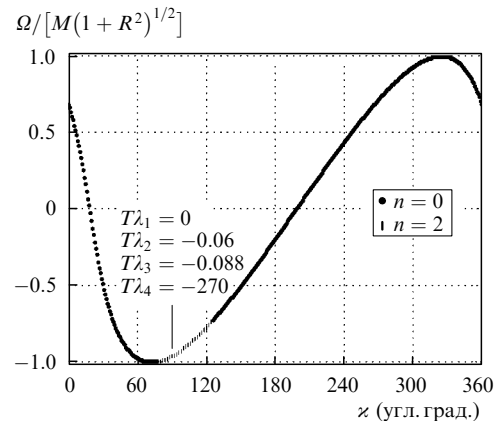


Рис.1. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.2, M = 0.02, \tau_L = 10$ ; здесь и далее  $n$  – число корней с  $\text{Re } \lambda > 0$ .

показатель в этой точке  $T\lambda_1 = 0$ , что связано с произвольном отсчёта фазы, следующие два – слабо отрицательны:  $T\lambda_2 = -0.06, T\lambda_3 = -0.088$ , а уже четвертый равен большому отрицательному числу  $T\lambda_4 = -270$ . Таким образом, в этом случае пространство вложения ограничено тремя измерениями.

За исключением фазы, все величины строго периодичны по времени (на рис.2 показано поведение поля и инверсии), что соответствует наличию предельного цикла в фазовом пространстве. Период колебаний  $T_{osc} = 274$ . Производная от фазы (мгновенное значение частоты) также строго периодична. Однако набег фазы за период оказывается, как правило, не кратным  $2\pi$ . Частота колебаний вблизи нижней точки бифуркации  $\kappa \approx 80^\circ$  (см. рис.1) удовлетворяет формуле (12), положение точки может быть найдено по формуле (13).

С ростом силы или времени запаздывания ОС график  $\Omega(\kappa)\tau_L/s$  становится неоднозначным (рис.3), возникает область, где решения неустойчивы по типу седловой точки (аперриодическое развитие неустойчивости). Интервал, в котором имеется неустойчивость по Хопфу, заметно увеличивается. В общем случае, если одному значению фазы соответствуют несколько стационарных состояний, среди которых есть устойчивые, решение, как правило, выходит на стационар. Поэтому основное внимание в работе уделяется исследованию решений вблизи бифуркаций и в области бистабильности. Форма автоколебаний вблизи крайних точек бифуркации показана на рис.4, а показатели Ляпунова и периоды осцилляций указаны на рис.3. Как видно из рис.4, характер

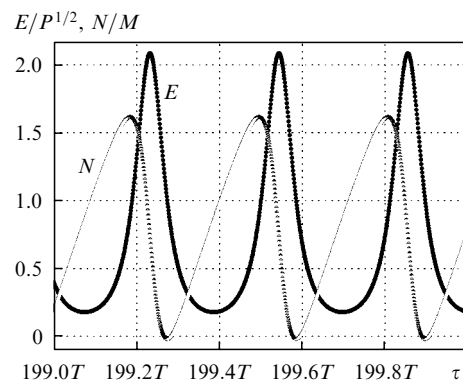


Рис.2. Амплитуда поля  $E$  и инверсия среды  $N$  как функция времени при  $\kappa = 90^\circ, P = 0.2, M = 0.02, \tau_L = 10$ .

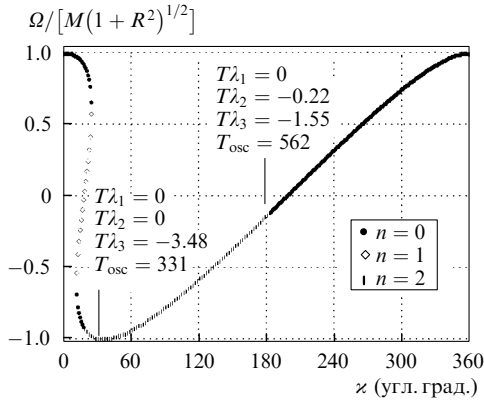


Рис.3. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.2, M = 0.02, \tau_L = 20$ .

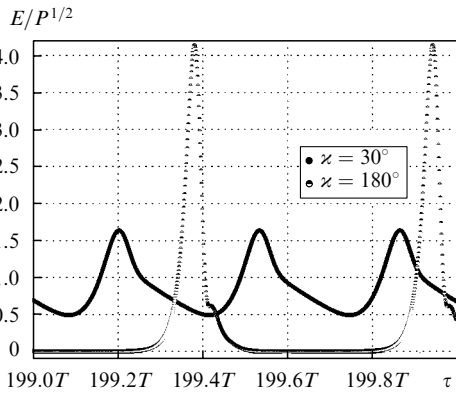


Рис.4. Динамика поля  $E$  при  $\kappa = 30$  и  $180^\circ, P = 0.2, M = 0.02, \tau_L = 20$ .

пульсаций сильно зависит от фазы  $\kappa$ , изменяясь от неполной модуляции при малой фазе до отдельных высоких пиков при фазе  $\kappa = 180^\circ$ . Отметим, что при  $\kappa \approx 30^\circ$  два показателя Ляпунова равны нулю.

Рост эффективной силы связи за счёт увеличения  $M$  до 0.04 приводит к появлению зоны, где могут сосуществовать два устойчивых стационарных решения (рис.5). В результате при изменении фазы ОС возникает область гистерезиса, где решение зависит от направления изменения фазы (отмечена штриховой стрелкой на рис.5). В частности, при уменьшении фазы вдоль нижней ветки с заходом в область бистабильности стационарное решение устойчиво вплоть до перескока в верхнее устойчивое стационарное решение. При увеличении фазы от нуля верхнее стационарное решение устойчиво вплоть до срыва (ли-

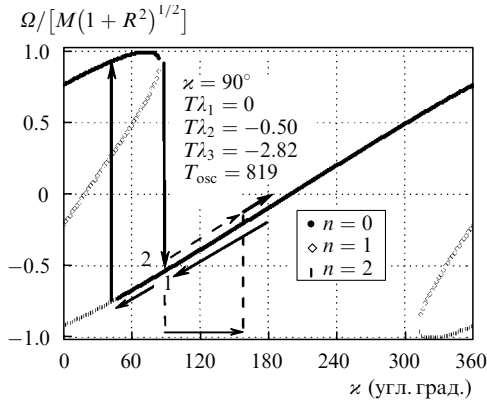


Рис.5. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.2, M = 0.04, \tau_L = 20$ . Стрелкой вдоль оси  $\kappa$  обозначена зона автоколебаний.

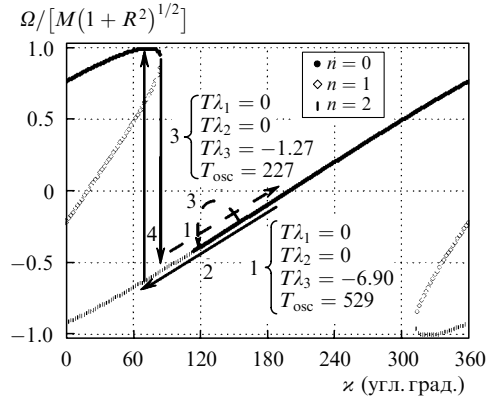


Рис.6. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.2, M = 0.02, \tau_L = 40$ . Штриховой прямой стрелкой обозначена область гистерезиса при увеличении  $\kappa$ ; 4 – точка срыва в стационар, изогнутая стрелка 3 показывает скачок  $\kappa$ , использованный в расчетах.

нейная неустойчивость), указанного вертикальной стрелкой, направленной вниз, на рис.5. Развитие неустойчивости приводит к пиковому режиму с глубокой модуляцией поля и периодом  $T_{osc} = 819$ , близким к времени релаксации инверсии ( $T = 1000$ ). Гистерезис свидетельствует о наличии двух сосуществующих аттракторов в фазовом пространстве (устойчивый узел и предельный цикл).

На рис.6 показано, как изменяются области устойчивости стационарных решений при той же эффективной силе связи, но с другими значениями силы ОС ( $M = 0.02$ ) и времени задержки. В этом случае область бистабильности исчезает, однако гистерезис остаётся. При увеличении фазы от нуля стационарное решение сохраняется до точки срыва 4, после чего возникают автоколебания с периодом  $T_{osc} = 529$  (рис.6, точка 1; рис.7). Осцилляции сохраняются при дальнейшем изменении фазы вплоть до  $\kappa \approx 185^\circ$  несмотря на то, что в этой области стационарное решение устойчиво. При обратном ходе изменения фазы стационарное решение (рис.6, точка 2) сохраняется до  $\kappa \approx 110^\circ$ , после чего возникают автоколебания, близкие по форме к наблюдаемым в точке 1. При  $\kappa \approx 70^\circ$  автоколебания скачкообразно сменяются верхним стационарным состоянием. Оказалось, что при данных параметрах ( $\kappa \approx 120^\circ$ , точка 3) изучаемая система обладает ещё одним аттрактором в виде предельного цикла. Этот аттрактор был обнаружен при изменении фазы скачком от  $\kappa \approx 165^\circ$  до  $\kappa \approx 120^\circ$ . Таким образом, при  $\kappa \approx 120^\circ$  в зависимости от начальных условий может реализоваться один из трёх режимов, показанных на рис.7. Некоторым

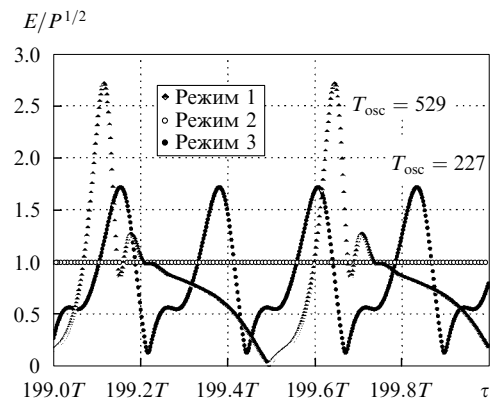


Рис.7. Динамика режимов 1, 2, 3 при  $\kappa = 120^\circ, P = 0.2, M = 0.02, \tau_L = 40$ .

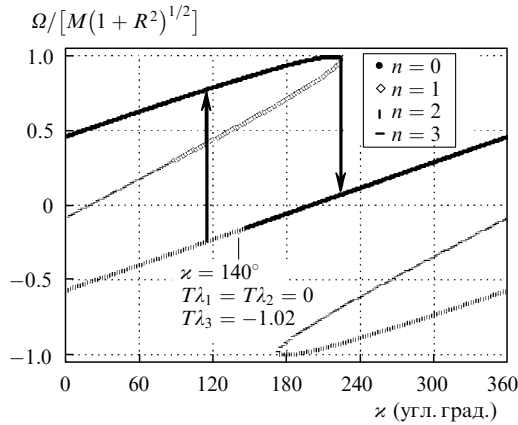


Рис.8. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.2$ ,  $M = 0.04$ ,  $\tau_L = 40$ . Перескоки режимов и область гистерезиса показаны стрелками.

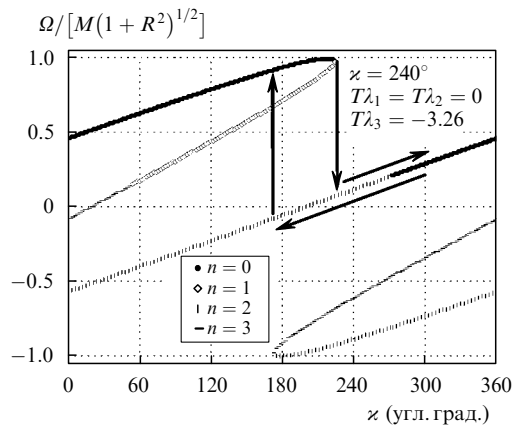


Рис.9. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.2$ ,  $M = 0.02$ ,  $\tau_L = 80$ .

указанием на сложность системы может быть наличие двух нулевых значений показателей Ляпунова для автоколебательных решений. Этот пример демонстрирует сложность структуры фазового пространства уравнений ЛК и необходимость поиска новых методов его полного исследования.

Дальнейший рост эффективной силы связи также производился двумя способами – за счет увеличения  $M$  (рис.8) или времени задержки (рис.9). Как и ранее (ср. с рис.5), с ростом  $M$  уширяется область бистабильности и наблюдается гистерезис. Возникающие после хопфовской бифуркации осцилляции близки к гармоническим с

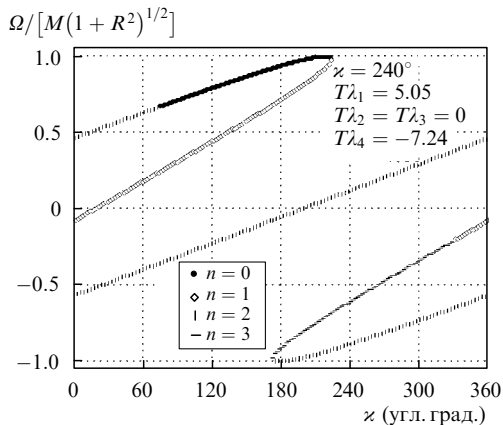


Рис.10. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.6$ ,  $M = 0.04$ ,  $\tau_L = 80$ .

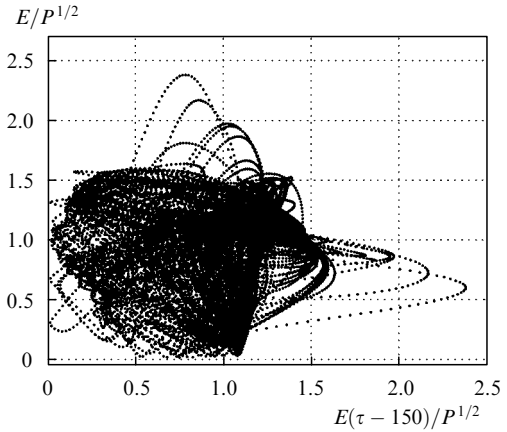


Рис.11. Фазовый портрет для амплитуды поля в хаотическом режиме при  $P = 0.6$ ,  $M = 0.02$ ,  $\tau_L = 80$ ,  $\kappa = 240^\circ$ .

периодом  $1.9\tau_L$  ( $\tau_L = 40$ , рис.8) и  $1.8\tau_L$  ( $\tau_L = 80$ , рис.9). Отсюда можно заключить, что рост силы ОС стабилизирует динамику: колебания становятся слабее, растёт зона устойчивости стационарных решений. С увеличением времени задержки исчезает зона бистабильности (рис.9), но гистерезис усиливается и глубина модуляции колебаний становится больше.

Для параметров  $M = 0.02$  и  $\tau_L = 80$  исследовалось влияние уровня накачки на динамику генерации. При той же форме многозначной кривой  $\Omega(\kappa)\tau_L/s$  повышение накачки приводит к расширению зоны, где отсутствует устойчивое стационарное состояние (ср. рис.9 и 10). При фиксированной фазе повышение накачки приводит через каскад удвоений периода к хаотическому режиму. Фазовый портрет хаотического решения при  $\kappa = 240^\circ$  и  $P = 0.6$  показан на рис.11. Первый положительный показатель Ляпунова для этого режима составляет 5.05, а следующие два значения равны нулю. Размерность по Ляпунову в этом случае равна 3.7. Таким образом, мощность накачки, как и следовало ожидать из общих соображений (увеличение нелинейности), приводит к усложнению режимов генерации.

Увеличение времени задержки в два раза по сравнению с условиями для рис.8 сопровождается ростом числа возможных стационарных решений (рис.12), однако почти все они неустойчивы либо к линейным возмущениям, либо к бифуркации Хопфа. В интервале  $\kappa = 150^\circ - 240^\circ$  устойчивое стационарное решение невозможно. Расчёты показали, что при движении вдоль стационарного сос-

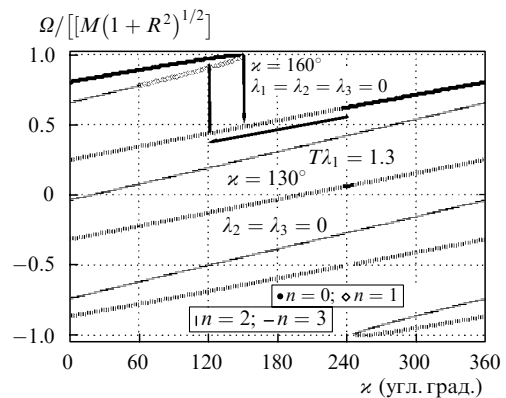


Рис.12. Диаграмма устойчивости стационарных состояний при  $P = 0.2$ ,  $M = 0.04$ ,  $\tau_L = 80$ . Перескоки режимов и область гистерезиса показаны стрелками.

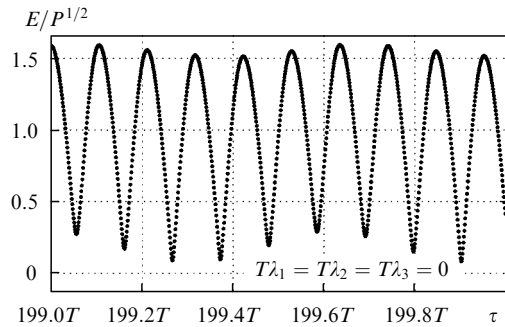


Рис. 13. Динамика поля в режиме пакетов регулярных пульсаций при  $\kappa = 160^\circ$ ,  $P = 0.2$ ,  $M = 0.04$ ,  $\tau_L = 80$ .

тояния в сторону меньших значений фаз в точке бифуркации возникают почти гармонические автоколебания. Лишь вплотную к границе устойчивости верхней ветки стационарных состояний колебания усложняются, принимая вид пакетов регулярных пульсаций, описанный ранее в [8]. При  $\kappa = 160^\circ$  три показателя Ляпунова равны нулю. В этом случае размерность по Ляпунову равна трём (см. Приложение 2), так что фазовое пространство удобно представлять в виде трёхмерного тора.

Из рис. 13 видно, что колебания с характерным периодом  $\sim 0.1T$  промодулированы более низкой частотой. Масштаб быстрых колебаний связан с частотным интервалом между ветками стационарных решений, а те, в свою очередь, с временем запаздывания  $\tau_L$ . Действительно, частотный интервал на рис. 12 равен  $0.57M \times (1 + R^2)^{1/2}$ , что соответствует периоду 87.4, который близок к характерному периоду осцилляций внутри пакета. Это даёт основание для интерпретации динамики системы в терминах трёх мод внешнего резонатора, каждая из которых соответствует измерению тора в фазовом пространстве. Частота релаксационных колебаний  $\omega = (2P/T)^{1/2}$  по оценке равна 0.02 (период 314). Таким образом, период плавной огибающей ПРП примерно равен удвоенному периоду релаксационных колебаний.

При дальнейшем уменьшении фазы ОС (рис. 12) наблюдается гистерезис. Вблизи перескока в верхнее стационарное решение ( $\kappa = 130^\circ$ ) режим ПРП переходит к режиму динамического хаоса (появляется положительный показатель Ляпунова) с редкими глубокими провалами поля. В целом динамика генерации близка к экспериментально наблюдаемой в работе [7]. Следует отметить, что режимы ПРП и хаоса с глубокими редкими провалами реализуются в узком интервале значений фаз ОС. Размерность странного аттрактора в режиме хаоса по формуле Каплана – Йорке (Приложение 2) есть  $d_L = 4.12$ . Спектр показателей Ляпунова содержит одно положительное число и два нуля: 1.3, 0, 0,  $-0.7$ ,  $-5$ ,  $-10$ .

## 5. Заключение

Таким образом, мы провели исследование различных режимов генерации диодного лазера с внешним зеркалом в рамках уравнений ЛК, взяв в качестве основы стационарные решения, число которых растёт при увеличении эффективной силы ОС. Система уравнений ЛК интегрируется напрямую с помощью разработанного комплекса программ. Кроме того, численно находятся точки неустойчивости и бифуркации решений путём вычисления контурного интеграла и производится расчёт спектра показателей Ляпунова, следуя работе [3].

С увеличением эффективной силы ОС за счёт самой силы ОС (величины  $M$ ) возникают зоны бистабильности, т. е. два устойчивых стационарных решения при одной и той же фазе ОС. Одновременно проявляется гистерезис с более общим поведением, что связано с наличием двух сосуществующих аттракторов. При росте эффективной силы ОС за счёт времени задержки зона бистабильности не появляется, однако явления гистерезиса остаются. При переключении фазы ОС скачком на конечную величину обнаружен ещё один автоколебательный режим. В результате доказано, что имеется значение фазы ОС, при котором сосуществуют три аттрактора (устойчивый узел и два предельных цикла).

Увеличение мощности накачки при фиксированных остальных параметрах приводит к переходу в хаотический режим через последовательность бифуркаций удвоения периода. Размерность странного аттрактора (3.7) при этом выше, чем для связанной пары диодных лазеров [9]. Дальнейший рост силы ОС для времени задержки  $\tau_L = 80$  (в единицах времени жизни фотона в собственном резонаторе диода) приводит к возникновению режима пакетов регулярных пульсаций [8], который при изменении фазы ОС переходит в характерный хаотический режим с редкими глубокими провалами в генерации [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 01-02-16560) и гранта Президента Российской Федерации (НШ-794.2003.2). Авторы выражают благодарность Laurent Larger (университет Franche-Comté, Франция), предоставившему копию статьи [3], проф. Daan Lenstra за книгу «Fundamental Issues Of Nonlinear Laser Dynamics», а также проф. Bernd Krauskopf за ценные критические замечания.

## Приложение 1

### Формулы численного интегрирования

Численное интегрирование уравнений ЛК опирается на метод Гира [13]. Этот метод строится на основе формул дифференцирования назад для уравнений  $y' = f(x, y)$ ; тогда предсказание имеет вид

$$y_n = \sum_{i=1}^k A_i y_{n-i} + hB_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}),$$

а коррекция –

$$y_n = \sum_{i=1}^k a_i y_{n-i} + hb_0 f(x_n, y_n),$$

где  $A_i$ ,  $B_1$ ,  $a_i$ ,  $b_0$  зависят от порядка  $k$ . Итерационный процесс выполняется с помощью преобразования вида

$$y_n^{(v+1)} = y_n^{(v)} + b_0 [hf(x_n, y_n^{(v)}) - hy_n^{(v)'}]. \quad (\text{П1.1})$$

Введем в рассмотрение векторы  $Y_n$ ,  $Y_n^{(v)}$ , матрицу  $D$  и вектор Нордсика  $Z$ :

$$Y_n = \begin{pmatrix} y_n \\ hy_n' \\ y_{n-1} \\ y_{n-k+1} \end{pmatrix}, \quad Y_n^{(v)} = \begin{pmatrix} y_n^{(v)} \\ hy_n^{(v)'} \\ y_{n-1} \\ y_{n-k+1} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & A_2 & A_k \\ \gamma_1 & \delta_1 & \gamma_2 & \gamma_k \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Z(x_n) = \begin{pmatrix} y(x_n) \\ hy'(x_n) \\ (h^2/2)y''(x_n) \\ (h^3/6)y'''(x_n) \end{pmatrix}.$$

Для вектора  $Y_n$  предсказание и итерационный процесс записываются как

$$Y_n^{(0)} = DY_{n-1}, \quad Y_n^{(v+1)} = Y_n^{(v)} + cF(Y_n^{(v)}), \quad (\text{П1.2})$$

где функция невязки  $F$  и вектор  $c$  таковы:

$$F(Y_n^{(v)}) = hf(x_n, y_n^{(v)}) - hy_n'^{(v)}, \quad (\text{П1.3})$$

$$c = (b_0 \quad 1 \quad 0 \dots 0)^T.$$

В методе Гира в качестве основного используется вектор Нордсика, который связан с вектором  $Y_n$  преобразованием  $Q: QY(x_n) = Z(x_n) + O(h^{k+1})$ . Тогда  $Z_{n-1} = QY_{n-1}$  и

$$\begin{aligned} Z_n^{(0)} &= QY_n^{(0)} = QDY_{n-1} = QD(Q^{-1}Q)Y_{n-1} \\ &= (QDQ^{-1})QY_{n-1} = (QDQ^{-1})Z_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{П1.4})$$

Оказывается, что матрица  $P = QDQ^{-1}$  является треугольной матрицей Паскаля. Введя вектор  $I = Qc = (l_0 \quad l_1 \quad l_2 \dots l_k)^T$ , содержащий коэффициенты Гира, получим из (П1.2)

$$Z_n^{(0)} = PZ_{n-1}, \quad (\text{П1.5})$$

$$Z_n^{(v+1)} = QY_n^{(v+1)} = QY_n^{(v)} + QcF(Y_n^{(v)}) = Z_n^{(v)} + IF(Z_n^{(v)}),$$

т. к. функция невязки зависит только от первых двух компонент вектора  $Y$ , а преобразование  $Q$  первые две компоненты не меняет. Очевидно, что  $Z_n = Z_n^{(0)} + Iw$ , где

$$w = \lim_{v \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^v F(Z_n^{(j)}),$$

а  $F(Z_n) = 0$ . Следовательно,  $F(Z_n^{(0)} + Iw) = 0$ . Решаем это уравнение методом Ньютона:

$$w^{(v+1)} = w^{(v)} - \left[ \frac{\partial F(Z_n^{(0)} + Iw^{(v)})}{\partial Z} I \right]^{-1} F(Z_n^{(0)} + Iw^{(v)}),$$

что эквивалентно процедуре  $Z^{(v+1)} = Z^{(v)} - IWF(Z_n^{(v)})$ . Начальное приближение определяется с помощью (П1.5), а формула для матрицы  $W$  следует из определения формулы невязки (П1.3)

$$W = \left[ \frac{\partial F(Z_n^{(v)})}{\partial Z} I \right]^{-1} = \left[ hl_0 \frac{\partial f(x_n, y_n^{(v)})}{\partial y} - l_1 \right]^{-1}$$

и связана только с якобианом уравнения и первыми двумя коэффициентами метода Гира. Окончательный итерационный процесс выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_n^{(0)} &= PZ_{n-1}, \quad Z^{(v+1)} = Z^{(v)} \\ &- I \left[ hl_0 \frac{\partial f(x_n, y_n^{(v)})}{\partial y} - l_1 \right]^{-1} [hf(x_n, y_n^{(v)}) - hy_n'^{(v)}]. \end{aligned} \quad (\text{П1.6})$$

Поскольку вектор Нордсика состоит из производных, то понижение порядка выполняется путем отбрасывания лишних компонент этого вектора, а увеличение порядка на единицу осуществляется через разность последних компонент двух смежных векторов ( $Z_n$  и  $Z_{n-1}$ ). Прогноз ошибок позволяет выбрать оптимальный шаг и порядок схемы интегрирования. Алгоритм реализован на языке C++, а для учета запаздывающей ОС использовано запоминание промежуточных данных в виде вспомогательных массивов.

## Приложение 2

### Расчет показателей Ляпунова

Рассмотрим некоторую систему нелинейных уравнений  $\dot{x} = F(x, z)$ ,  $z(t) = x(t - \tau)$ , где под  $x(t)$  подразумеваются компоненты вектора, являющиеся функциями времени. Для вектора малых возмущений  $y(t)$  относительно решения  $x(t)$ , определяемого начальными условиями, составляется система линейных уравнений из якобиана исходной системы уравнений на траектории решения

$$\dot{y} = \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right) y + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right) y(t - \tau).$$

Решение этого уравнения находится на шаге интегрирования.

Для решения однородной части уравнения введем матрицы

$$A_n(h) = \exp(G_n), \quad G_n = \left( h \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{t=(n+1/2)h},$$

заданные в точках на серединах отрезков интегрирования уравнения. Это позволяет выполнять расчеты со вторым порядком точности. Экспонента  $A_n(h)$  во втором порядке рассчитывается по формуле  $A_n(h) = (E - G_n/2)^{-1}(E + G_n/2)$ . Для неоднородной части уравнения определим вторую матрицу как

$$B_n = \left( \frac{h}{2} \frac{\partial F}{\partial z} \right)_{t=(n+1/2)h}.$$

Тогда решение уравнения будет определяться оператором вида

$$y_{n+1} = A_n(h) \left[ y_n + \frac{2}{h} \int_0^h A_n^{-1}(t') B_n y(t' - \tau) dt' \right].$$

Решение находится по рекуррентной схеме

$$y_{n+1} = A_n[y_n + B_n y_{n-\tau/h}] + B_n y_{n+1-\tau/h},$$

$$\begin{aligned} y_{n+2} &= A_{n+1} \left[ y_{n+1} + \frac{4}{3} B_{n+1} y_{n+1-\tau/h} \right. \\ &\left. - \frac{1}{3} (A_n B_n y_{n-\tau/h} - B_n y_{n+1-\tau/h}) \right] + \frac{2}{3} B_{n+1} y_{n+2-\tau/h}. \end{aligned}$$

Разбивая ось интегрирования на равные интервалы времени, например длительностью  $\tau$ , и определяя через  $Q_i$  преобразование растяжения (сжатия) единичных век-



торов  $v_i^{(j)}$  на  $i$ -м интервале времени, получаем  $w_i^{(j)} = Q_i v_i^{(j)}$ . Набор новых векторов подлежит ортогонализации на основе метода Грамма – Шмидта:

$$u_i^{(j)} = w_i^{(j)} - \sum_{k=1}^{j-1} (w_i^{(j)}, v_i^{(k)}) v_i^{(k)},$$

где единичные векторы  $v_i^{(j)}$  строятся из уже построенных ортогональных векторов  $u_i^{(j)}$ :  $v_i^{(j)} = u_i^{(j)} / d_i^{(j)}$ ; здесь  $d_i^{(j)} = (u_i^{(j)}, u_i^{(j)})^{1/2}$  – длины векторов. После этого показатели Ляпунова находятся как предел суммы по большому числу интервалов времени

$$\lambda_j = \lim_{m \rightarrow \infty} (m\tau)^{-1} \sum_1^m d_i^{(j)}.$$

По спектру показателей Ляпунова определяется так называемая ляпуновская размерность  $d_L$ . Если упорядочить все  $\lambda_j$  в порядке убывания ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ ), то, согласно формуле Каплана – Йорке [12],

$$d_L = j + \sum_{i=1}^j \frac{\lambda_i}{|\lambda_{j+1}|},$$

где  $j$  определяется из условий  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j \geq 0$ , а  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_j + \lambda_{j+1} < 0$ .

1. Бахерт Х.-Ю., Богатов А.П., Елисеев П.Г. *Квантовая электроника*, **5**, 603 (1978).
2. Lang R., Kobayashi K. *IEEE J. Quantum Electron.*, **16**, 347 (1980).
3. Farmer J. D. *Physica*, **4D**, 366 (1982).
4. Ye J., Li H., McInerney J.G. *Phys. Rev. A*, **47**, 2249 (1993).
5. Mørk J., Mark J., Tromborg B. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 1999 (1990).
6. Fischer I., Hess O., Elsässer W., Göbel E. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 2188 (1994).
7. Hohl A., Gavrielides A. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1148 (1999).
8. Heil T., Fischer I., Elsässer W., Gavrielides A. *Phys. Rev. Lett.*, **87**, 243901 (2001).
9. Напартович А. П., Сухарев А. Г. *Квантовая электроника*, **31**, 147 (2001).
10. Ohtsubo J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **38**, 1141 (2002).
11. Verduyn Lunel S.M., Krauskopf B., in: *Fundamental Issues of Nonlinear Laser Dynamics*. В.Краускопф, D.Lenstra (Eds). (Melville, NewYork: AIP Conference Proceeding, 2000, v. 548, p. 66).
12. Неймарк Ю.И., Ланда П.С. *Стохастические и хаотические колебания* (М.: Наука, 1987, с. 235).
13. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране* (М.: изд-во МГУ, 1990, с. 172).