

# Влияние скорости кросс-релаксации на поперечную динамику излучения широкоапертурного лазера

А.П.Заикин, Н.Е.Молевич

*Рассмотрено влияние конечного времени релаксации поляризации на поперечную структуру оптического поля широкоапертурного лазера. Найдены условия возникновения периодических автоволн при положительной и отрицательной отстройках частоты. Показано, что эти условия сильно зависят от скорости кросс-релаксации. Установлено, что при больших скоростях кросс-релаксации динамика лазерных систем с конечной апертурой удовлетворительно описывается упрощёнными моделями, в которых поляризация адиабатически устранена.*

**Ключевые слова:** лазер, оптическое поле, динамика, автоволны, поляризация среды.

## 1. Введение

Лазеры с широкой апертурой, снабженные плоскопараллельным или устойчивым резонатором, обычно генерируют излучение в виде совокупности многих поперечных резонаторных мод. Картина излучения бывает стационарной лишь в случае малого превышения порога генерации, иначе наблюдается конкуренция мод, их чередование и в результате – хаотическая пространственно-временная картина оптического лазерного поля. Такое хаотическое поведение может смениться регулярной упорядоченной картиной поля, когда несколько мод излучают взаимосвязано. В работах [1, 2] подробно рассмотрен один из случаев конкуренции мод, названный там кооперативным захватом модовых частот.

Это самосогласованное взаимодействие лазерных мод можно проследить, когда их число невелико, что наблюдается при числе Френеля  $N_F \sim 10$ . С ростом  $N_F$  уменьшается относительное влияние боковых границ резонатора на формирование оптического поля и возрастает влияние других механизмов организации поля. В работах [3–8] показано, что пространственно-временная динамика развития лазерной генерации зависит от величины и знака отстройки частоты атомарного перехода от частоты резонаторной моды. Условия и методы получения результатов в этих работах существенно различались.

В [7, 8] рассмотрены лазеры, в которых поляризация активной среды релаксирует столь быстро, что считается будто она мгновенно следует за изменениями оптического поля. Такая модель в литературе часто называется стандартным адиабатическим исключением (САИ) поляризации. Применение САИ позволило выполнить расчёты устойчивости стационарного лазерного поля в за-

висимости от величины и знака частотной отстройки в аналитическом виде. В такой модели проведено исследование возможных режимов генерации, получены достаточно обширные аналитические результаты, имеющие сравнительно общий характер, рассчитана детальная динамика картины лазерного поля для всех характерных режимов генерации.

В работах [4, 5] полагалось, что время изменения поляризации активной среды конечно, и полная система уравнений Максвелла – Блоха была исследована численно для выбранных параметров лазера. Авторы пришли к выводу, что адекватное описание исследуемой системы возможно лишь при полном учёте поляризации активной среды, как бы быстро она не следовала за изменением оптического поля. Попытки учитывать влияние поляризации приближенно, используя время её релаксации как малый параметр, обязательно приводили к тому, что характер полученного решения уравнений менялся качественно. Такие выводы ставят вопрос о пределах применимости результатов работ, где использовались различные способы адиабатического исключения поляризации, включая САИ [7, 8] или методы получения проекции исходной системы на центральное многообразие (ЦМ) [3]. По этой причине представляется важным и интересным более подробно рассмотреть свойства лазерных оптических полей в зависимости от такого параметра, как время кросс-релаксации активной среды, и особенно в предельном случае, когда он стремится к нулю.

## 2. Модель лазера и линейный анализ устойчивости

Рассмотрим широкоапертурный лазер, излучающий на одной продольной моде плоскопараллельного резонатора, заполненного двухуровневой активной средой с однородным профилем уширения линии лазерного перехода. В предельном случае неограниченной апертуры в безразмерном виде система уравнений Максвелла – Блоха имеет вид

$$\frac{\partial E}{\partial t} - i \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \frac{v}{2} (-E + iP) + iv\Delta_c E,$$

А.П.Заикин. Самарский филиал Физического института им. П.Н.Лебедева РАН, Россия, 443011 Самара, ул. Ново-Садовая, 221; e-mail: zaikin@fian.smr.ru

Н.Е.Молевич. Самарский государственный аэрокосмический университет им. С.П.Королева, Россия, 443086 Самара, Московское ш., 34; e-mail: molevich@mb.ssau.ru

$$\frac{\partial N}{\partial t} = N_{un} - N + i \frac{EP^* - E^*P}{2}, \quad (1)$$

$$\Gamma \frac{\partial P}{\partial t} + (1 + i\Delta_a)P = -iEN.$$

Здесь безразмерные величины  $t, x, E, P$  связаны с размерными величинами  $t_d, x_d, E_d, P_d$  соотношениями  $t = t_d/T_i, x = x_d[2k/(T_i c)]^{1/2}, E = E_d/E_s, P = P_d/P_s; N = g/g_{th}, N_{un} = g_{un}/g_{th}; \Gamma = 1/(\gamma T_i)$  – безразмерное время кросс-релаксации;  $T_i$  – время релаксации инверсии;  $k = \omega/c; E_s, P_s$  – амплитуды насыщения электрического поля и поляризации;  $g, g_{un}$  и  $g_{th}$  – текущий, ненасыщенный и пороговый коэффициенты усиления, усреднённые по длине резонатора;  $\gamma$  – обратное время релаксации поляризации (скорость кросс-релаксации);  $v = cT_i g_{th}; \Delta_c = (\omega - \omega_c) \times (c g_{th})^{-1}$  – отстройка частоты генерации  $\omega$  от частоты моды пустого резонатора  $\omega_c$ , нормированная на ширину линии резонатора;  $\Delta_a = (\omega_a - \omega)/\gamma$  – отстройка от частоты центра линии усиления активной среды  $\omega_a$ , нормированная на скорость кросс-релаксации.

Стационарное однородное нетривиальное решение этой системы уравнений имеет вид

$$N_{st} = 1 + \Delta_a^2, \quad I_{st} = N_{un} - (1 + \Delta_a^2),$$

$$I_{st} = |E_{st}|^2, \quad P_{st} = -iE_{st}(1 - i\Delta_a), \quad \Delta_c = \Delta_a/2.$$

Устойчивость данного стационарного решения нужно определять стандартным образом, т. е. исследуя поведение малых отклонений от стационарного решения. Представим для этого решение (1) в виде  $E = E_{st}(1 + e), P = P_{st}(1 + p), N = N_{st}(1 + n)$ , где  $e, p, n$  – малые относительные отклонения от стационарного состояния, и подставим его в систему уравнений (1). Оставив в уравнениях лишь первые степени малых величин, получим линеаризованную систему, где введены обозначения  $e = Z + iY, p = u + iv$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} - i \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} &= v \frac{(1 - i\Delta_a)p - e}{2} + iv\Delta_c e, \\ \frac{\partial n}{\partial t} &= -n - I_{st} \frac{Z + u + \Delta_a(v - Y)}{N_{st}}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Gamma \frac{\partial p}{\partial t} + (1 + i\Delta_a)p = -i \frac{N_{st}E_{st}}{P_{st}} (n + e).$$

Характеристическое уравнение системы (2) для возмущений  $e, n, p \sim \exp(\lambda t - iqx)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma^2 \lambda^5 + [(v + 1)\Gamma^2 + 2\Gamma] \lambda^4 + \left\{ \Gamma^2 \left[ \frac{v^2(1 + \Delta_a^2)}{4} \right. \right. \\ \left. \left. + v(1 - \Delta_a q^2) + q^4 \right] + \Gamma(2 - v\Delta_a^2 + v + I_{st}) + 1 + \Delta_a^2 \right\} \lambda^3 \\ + \left\{ \Gamma^2 \left[ \frac{v^2(1 + \Delta_a^2)}{4} - \Delta_a q^2 v + q^4 \right] + \Gamma \left( \frac{3vI_{st}}{2} - v\Delta_a^2 + 2q^4 \right. \right. \\ \left. \left. - 2\Delta_a q^2 v + v \right) + N_{un} \right\} \lambda^2 + \left\{ \Gamma \left[ I_{st} \left( q^4 + \frac{v^2}{2} - \frac{v\Delta_a q^2}{2} \right) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left. + 2q^4 - 2\Delta_a q^2 v \right] + q^4(1 + \Delta_a^2) + vI_{st} \right\} \lambda \\ + q^4 N_{un} - \Delta_a q^2 v I_{st} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

При  $I_{st} > 0$  уравнение (3) имеет пять корней, один из которых ( $\lambda_1$ ) является вещественным. Область значений  $q$ , где этот корень положителен, определяет область длинноволновой (седловой) неустойчивости с образованием пространственно-неоднородных стационарных структур [9–11]. Знак  $\lambda_1$  определяется знаком свободного члена в полиноме (3):  $\lambda_1 \geq 0$  при  $0 \leq q \leq q_0$  (рис.1), где

$$q_0 = \left( \frac{v\Delta_a I_{st}}{N_{un}} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Заметим, что (4) – это точное выражение для  $q_0$ . Оно отличается множителем  $[2(1 + \Delta_a^2)]^{1/2}$  от найденного в работе [6] приближённого выражения. Поскольку соотношение (4) не зависит от  $\Gamma$ , то оно точно совпадает с выражениями, получаемыми при различных способах адиабатического исключения поляризации [3, 4]. С ростом  $\Gamma$  инкремент неустойчивости  $\lambda_1$  уменьшается.

На рис.1 приведены лишь те корни дисперсионного уравнения, которые хотя бы в некоторой области  $q$  имеют положительную реальную часть. При  $\Delta_a > 0$  кроме корня  $\lambda_1$  имеется ещё и пара комплексно-сопряжённых корней  $\lambda_{2,3} = A \pm i\Omega$ , для которых вещественная часть  $A$  положительна в диапазоне  $q_{left} < q < q_{right}$  (где  $q_{left}, q_{right}$  – левая и правая границы диапазона). Диапазоны положительных значений  $\lambda_1$  и  $A$  при не слишком малых  $\Gamma$  перекрываются. В области  $q < q_0$  число неустойчивых корней всегда нечетно (один или три), поэтому, как показано в [9] (с. 57), здесь возможна только неустойчивость, ведущая к образованию стационарных во времени неоднородных распределений поля в пространстве. В области  $q_0 < q < q_{right}$  существует коротковолновая неустойчивость типа бегущих периодических волн [6–9].

В соответствии с рис.1 это означает, что при положительной отстройке могут существовать решения уравнений Максвелла – Блоха в виде стоячих периодических и бегущих периодических волн, а также в виде сложных картин, основанных на их комбинации. Для тех же па-

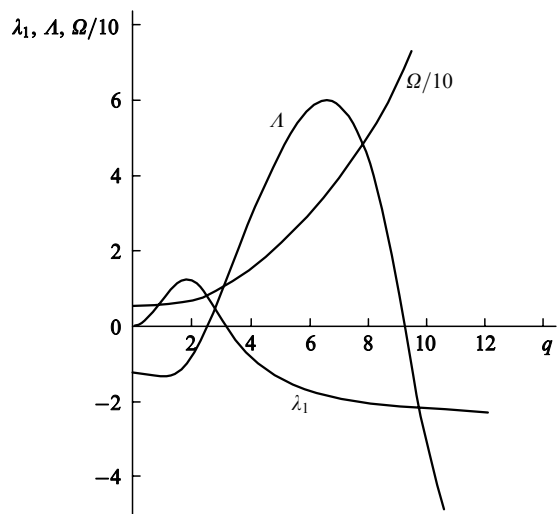


Рис.1. Корни характеристического уравнения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 = A + i\Omega$ , полученные при  $\Gamma = 0.03, N_{un} = 5, v = 16.8, \Delta_a = 1$ .

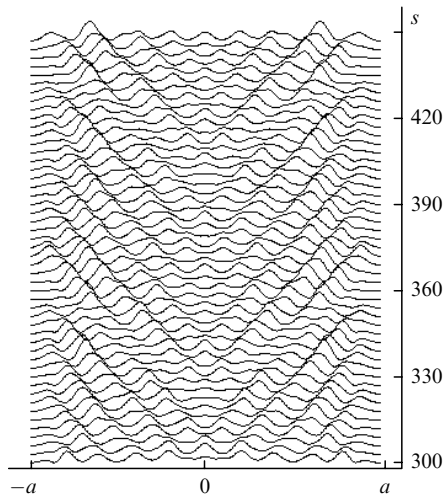


Рис.2. Динамика оптического лазерного поля, рассчитанная для  $\Gamma = 0.03$ ,  $N_{\text{un}} = 5$ ,  $\nu = 16.8$ ,  $A_a = 1$ ,  $N_F = 200$ ;  $s$  – число полных проходов излучения резонатора;  $a$  – полуширина апертуры.

раметров (приведённых на рис.1), но при отрицательной расстройке ( $A_a < 0$ ) все корни дисперсионного уравнения (3) имеют отрицательные реальные части. Это означает, что стационарное однородное поле устойчиво.

На рис.2 показана пространственно-временная структура оптического поля при  $N_F = 200$  для условий рис.1. При этом для расчёта структуры оптического поля применялся метод численного счёта, подробно описанный в [7, 8]. В настоящей работе имеется отличие от этого метода только лишь в описании активной среды, т. к. поляризация откликается не мгновенно, а с некоторой инерцией. Поэтому наряду с инверсией и оптическим полем рассчитывается изменение во времени пространственного распределения поляризации. Полученная при указанных условиях картина автоволн близка к картине идеальных периодических волн. Число волн на апертуре хорошо аппроксимируется величиной  $n \sim \bar{a}q_{\text{max}}/\pi \approx 11.5$ , где  $\bar{a} = (4\pi N_F \tau / T_i)^{0.5} = 5.6$  – безразмерная полуширина апертуры,  $\tau$  – время полного обхода резонатора,  $q_{\text{max}} = 6.5$  – волновое число, соответствующее максимуму  $A$  (см. рис.1).

### 3. Пространственно-временная структура оптического поля при больших скоростях кросс-релаксации

Особое значение имеет поведение лазера в случае высокой скорости релаксации нелинейной поляризации активной среды, когда параметр  $\Gamma \ll 1$ . Тогда поляризация практически мгновенно изменяется вслед за изменением других параметров системы. Возникает вопрос: можно ли пренебречь столь малой инерционностью поляризации и адиабатически исключить её из уравнений?

В работе [4] впервые установлено, что качественные свойства уравнений, описывающих работу лазера в приближении мгновенной скорости релаксации поляризации (при  $\Gamma = 0$ ) так сильно изменяются, что подобное приближение становится неприменимым. Но этот результат получен без учёта конечности апертуры. Ниже показано, что при  $\Gamma \rightarrow 0$  возможно описание реальной лазерной системы с помощью как полной системы уравнений (1), так и приближения мгновенной кросс-релаксации.

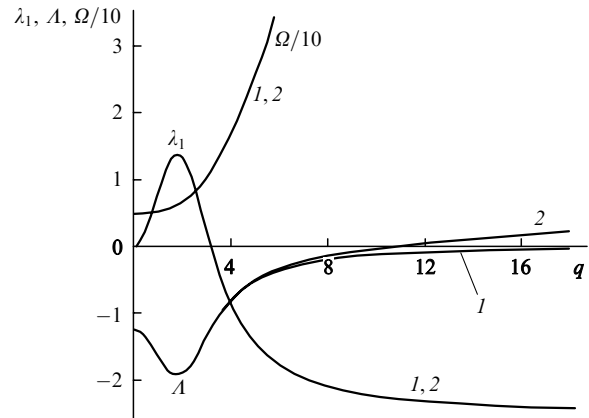


Рис.3. Корни характеристического уравнения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 = A + i\Omega$ , полученные при  $N_{\text{un}} = 5$ ,  $\nu = 16.8$ ,  $A_a = 1$ ,  $\Gamma = 0$  (1) и  $10^{-4}$  (2).

Рассмотрим сначала решение дисперсионного уравнения (3) (не учитывающее конечность апертуры) для  $\Gamma \ll 1$ ,  $A_a > 0$  (рис.3). Уменьшение скорости кросс-релаксации при  $\Gamma = 0 - 0.01$  практически не влияет на инкремент длинноволновой стационарной неустойчивости  $\lambda_1$ . Поэтому при описании этого вида неустойчивости использование приближения мгновенной релаксации возможно в широком интервале значений скорости кросс-релаксации.

Более существенные изменения имеют место для периодических волн. При  $\Gamma = 0$ ,  $A_a > 0$  неустойчивость этого типа вообще не существует. Без использования приближения мгновенной релаксации реальная часть пары комплексно-сопряжённых корней остаётся положительной в некотором диапазоне  $q$  даже при  $\Gamma \rightarrow 0$ . Однако этот диапазон с уменьшением  $\Gamma$  все больше смещается в область высоких волновых чисел  $q$  и высоких частот  $\Omega \sim q^2$ . При этом левая граница коротковолновой неустойчивости  $q_{\text{left}}$  возрастает с уменьшением  $\Gamma$  примерно как  $\Gamma^{-0.25}$ , а  $q_{\text{max}}$  и правая граница коротковолновой неустойчивости  $q_{\text{right}}$  – как  $\Gamma^{-0.5}$ . Максимальное значение  $A$  изменяется мало, а скорость автоволн, наоборот, резко возрастает ( $\Omega/q \sim q$ ). Для левой границы неустойчивости при малых скоростях кросс-релаксации справедлива оценка

$$q_{\text{left}} \approx \left( \frac{I_{\text{st}}}{2\Gamma} \right)^{0.25}, \quad (5)$$

полученная в [3] при адиабатическом исключении поляризации из первоначальной системы Максвелла – Блоха методом ЦМ.

Сдвиг неустойчивости при  $\Gamma \rightarrow 0$  в область больших значений  $q$  соответствует возникновению оптических волн, распространяющихся под столь большим углом к оси резонатора, что они быстро покидают его объём. Таким образом, с учётом конечности апертуры периодические возмущения просто не успеют развиваться до заметного уровня. В связи с этим главную роль будет играть длинноволновая неустойчивость, хорошо описываемая САИ. В подтверждение этого на рис.4 приведена пространственно-временная структура оптического поля, полученная при  $\Gamma = 0$  и  $A_a > 0$  [7], с учётом конечности апертуры. Такая структура соответствует структуре поля, описанной в [6]: при сильной модуляции оптического поля, вызванной длинноволновой неустойчивостью, про-

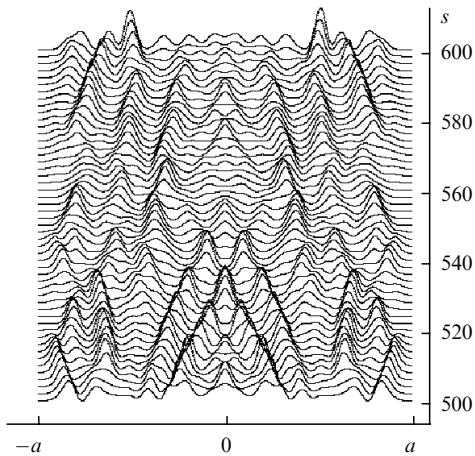


Рис.4. Динамика оптического лазерного поля, рассчитанная для  $\Gamma = 0, N_{un} = 9.5, v = 8.4, A_a = 0.8, N_F = 300$ .

исходит переход к хаотической пространственно-временной картине оптического поля.

Рассмотрим теперь, как меняется динамика лазерного излучения с изменением скорости кросс-релаксации при отрицательной частотной отстройке. Соответствующие зависимости корней характеристического уравнения (3) от  $q$  при разных  $\Gamma$  представлены на рис.5. При  $A_a < 0$  вещественный корень  $\lambda_1$  всегда отрицателен. Одна пара комплексно-сопряжённых корней также всегда имеет отрицательную реальную часть (на рис.5 эти корни не указаны). Другая пара корней имеет положительную реальную часть  $A$  только при  $\Gamma < \Gamma_{cr}$ , где

$$\Gamma_{cr} \approx 2I_{st}A_a(1 + A_a^2)^2 \frac{q^2 - q_{bif}^2}{Z(q)},$$

$$Z(q) = 4A_a(1 + A_a^2)^2 q^6 + I_{st}(3 - 2A_a^2 - 5A_a^4)q^4$$

$$+ A_a\{4(1 + A_a^2)^2 + I_{st}v(3A_a^4 + 2A_a^2 - 1) + I_{st}[A_a^4 - 2A_a^2 - 3 - 2I_{st}(1 + A_a^2)]\}q^2 - I_{st}\{I_{st}^2 + I_{st}[5 + A_a^2 + 3(1 + A_a^2)v] + 4(1 + A_a^2) - 2v(A_a^4 - 2A_a^2 - 3)\}.$$

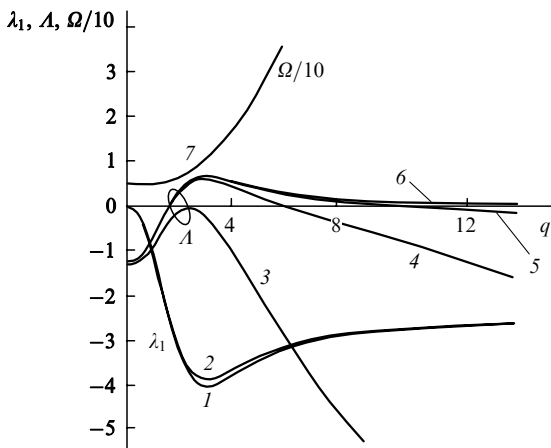


Рис.5. Корни характеристического уравнения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2 = A + i\Omega$ , полученные при  $N_{un} = 5, v = 16.8, A_a = -1, \Gamma = 0$  (2, 6, 7),  $10^{-4}$  (2, 5, 7),  $10^{-3}$  (2, 4, 7) и 0.013 (1, 3, 7).

С уменьшением  $\Gamma$  левая граница неустойчивости  $q_{left}$  стремится к

$$q_{bif} = \left[ \frac{N_{un}}{|A_a|(1 + A_a^2)} \right]^{1/2}. \tag{6}$$

Частота при этом определяется соотношением

$$\omega_{bif} = \frac{[N_{un}^2 + A_a^2 v I_{st}(1 + A_a^2)]^{1/2}}{|A_a|(1 + A_a^2)}. \tag{7}$$

Формулы (6), (7) точно соответствуют условиям возникновения бифуркации Андронова – Хопфа, полученным в пределе  $\Gamma = 0$  в [7, 8]. Этот предел рассматривался ранее в [4], но там было дано ошибочное условие возникновения бифуркации Андронова – Хопфа. Выражение (6) получено также методом ЦМ в [3], где приведено соотношение для бифуркационной частоты  $\omega_{bif}$ , отличающееся от (7) первым слагаемым в подкоренном выражении. Такое соотношение не подтвердилось проведённым в настоящей работе бифуркационным анализом полной системы уравнений Максвелла – Блоха. В [6] соотношение для  $\omega_{bif}$  вообще содержало только второе слагаемое в подкоренном выражении (7), что приближённо справедливо только при больших значениях  $v$ . Эта частота в [6] была названа характеристической частотой пространственно-временной динамики лазеров класса В (т.е. лазеров с  $\Gamma, v^{-1} \ll 1$ ). Однако в [6] ошибочно полагалось, что  $\omega_{bif}$  не зависит от знака отстройки.

Правая граница неустойчивости  $q_{right}$  смещается при  $\Gamma \rightarrow 0$  в сторону больших волновых чисел и частот  $\Omega \sim q^2$ , причём при малых  $\Gamma$  она хорошо аппроксимируется приближением ЦМ [3]

$$q_{right} \approx \left( \frac{I_{st}}{2\Gamma} \right)^{0.25}. \tag{8}$$

В результате правая граница неустойчивости (8) при  $A_a < 0$  совпадает с её левой границей (5) при  $A_a > 0$ . Таким образом, области  $q$ , где возможна периодическая автоволновая неустойчивость, при разных знаках частотной отстройки не пересекаются.

Заметим, что в [3] указано волновое число (при котором инкремент  $A$  достигал максимального значения)  $q_{max} \sim q_{right}/3^{0.25} \sim \Gamma^{-0.25}$ , что не согласуется с проведённым нами исследованием полной системы уравнений Максвелла – Блоха. В результате этих исследований было установлено, что наиболее неустойчивое волновое число практически не зависело от  $\Gamma$  и задавалось выражением  $q_{max} \sim \sqrt{2} q_{bif}$  (рис.5). Именно это  $q_{max}$  (и соответствующая ему частота) в основном определяет пространственно-временную структуру оптического поля. Форма коротковолнового «хвоста» зависимости  $A(q)$  (где инкременты малы, а скорости автоволн велики) практически не влияет на структуру поля.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что при малых, но не нулевых  $\Gamma$  поведение системы, описываемой полной системой уравнений Максвелла – Блоха, может качественно меняться по сравнению с её поведением в случае  $\Gamma = 0$ . В частности, при  $\Gamma > \Gamma_{cr}$  ( $q = q_{max}$ ) коротковолновая неустойчивость перестаёт существовать при отрицательной частотной отстройке, но существует при положительной отстройке. Эти ситуации совсем не описываются в приближении мгновенной релаксации

поляризации (САИ), но качественно могут быть описаны в приближении ЦМ [3]. В то же время модель Максвелла–Блоха при быстрой кросс-релаксации, когда  $\Gamma \rightarrow 0$ , и модельные уравнения САИ приводят при любом знаке частотной отстройки к практически одинаковым зависимостям  $\lambda_1(q)$ ,  $A(q)$ ,  $\Omega(q)$ , вплоть до больших значений волновых чисел. Автоволны с большими  $q$  не успевают развиться на апертуре конечного размера, и поэтому при расчёте реальных лазерных систем их можно не принимать во внимание.

#### 4. Заключение

Динамика оптического поля в широкоапертурных лазерах в значительной степени определяется скоростью процессов релаксации активной среды лазера. Результаты бифуркационного анализа позволяют достаточно успешно прогнозировать тип неустойчивости без детального решения полной системы уравнений.

Если время кросс-релаксации соизмеримо со временем релаксации инверсии в активной среде, то при отрицательной частотной отстройке следует ожидать генерации стационарного однородного поля. При положительной частотной отстройке имеются две ветви неустойчивости оптического поля: неустойчивость по отношению к рождению бегущих периодических автоволн и неустойчивость по отношению к образованию стационарных длинноволновых структур.

Если время кросс-релаксации уменьшается так, что  $\Gamma \ll 1$ , то динамические свойства оптического поля лазера изменяются в количественном и качественном отношении. При положительной частотной отстройке ( $\Delta_a > 0$ ) сохраняются оба типа неустойчивости, но бегущие автоволны возможны лишь при высоких пространственных частотах. Это означает, что возникают световые волны, распространяющиеся под большими углами к оси резонатора. В реальных лазерах с конечной апертурой эти волны быстро гаснут, и такая неустойчивость не может развиться.

Для этого же предельного случая ( $\Gamma \ll 1$ ), но при отрицательной частотной отстройке дисперсионное уравнение имеет пару комплексно-сопряжённых корней с положительной вещественной частью в некотором диа-

пазоне волновых чисел. Область максимально неустойчивых волновых чисел (определяющих пространственно-временную структуру оптического поля), а также их левая бифуркационная граница хорошо описываются в приближении мгновенной поляризации. Коротковолновый неустойчивый «хвост» зависимости  $A(q)$ , существующий в этом приближении, практически не влияет на структуру поля.

Динамика лазерного оптического поля, описываемая полной системой уравнений Максвелла–Блоха, при быстрой кросс-релаксации и учёте конечности лазерной апертуры качественно совпадает с результатами упрощённой модели, в которой релаксация поляризации считается мгновенной. С уменьшением времени кросс-релаксации автоволновая неустойчивость перестаёт быть существенной при положительной частотной отстройке, но начинает проявляться в обратном случае – при отрицательной отстройке.

Работа выполнена в рамках проектов российско-американской программы «Фундаментальные исследования и высшее образование» (BRHE), а также при финансовой поддержке Министерства образования РФ, Администрации Самарской области, Американского фонда гражданских исследований и развития (CRDF, проект SA-014-02).

1. Lugiato L.A., Oppo G.L., Tredicce J.R., Narducci L.M., Pernigo M.A. *J. Opt. Soc. Am. B*, **7**, 1019 (1990).
2. Wang Kaige, Pan Qiuli, Yu Xingqi. *Phys. Rev. A*, **59**, 803 (1999).
3. Oppo G.L., D'Alessandro G., Firth W.J. *Phys. Rev. A*, **44**, 4712 (1991).
4. Jakobsen P.K., Moloney J.V., Newell A.C., Indik R. *Phys. Rev. A*, **45**, 8129 (1992).
5. Jakobsen P.K., Lega J., Feng Q., Staley M., Moloney J.V., Newell A.C. *Phys. Rev. A*, **49**, 4189 (1994).
6. Huyet G., Martinoni M.C., Tredicce J.R., Rica S. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4027 (1995).
7. Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е. *Квантовая электроника*, **27**, 246; 249 (1997).
8. Заикин А.П., Кургузкин А.А., Молевич Н.Е. *Изв. вузов Сер. Прикладная нелинейная динамика*, **7**, 87 (1999).
9. Васильев В.А., Романовский Ю.М., Яхно В.Г. *Автоволновые процессы* (М.: Наука, 1987).
10. Маломед Б.А. В кн.: *Нелинейные волны. Структуры и бифуркации* (М.: Наука, 1987, с. 251).
11. Lugiato L.A., Oldano C., Narducci L.M. *J. Opt. Soc. Am. B*, **5**, 879 (1988).