

# Прецизионная лазерная спектроскопия атомов водорода и гелия

Е.В.Бакланов

*Дан обзор экспериментов по прецизионному измерению частот переходов атомов водорода и гелия, выполненных методами лазерной спектроскопии.*

**Ключевые слова:** прецизионная лазерная спектроскопия, двухфотонное поглощение, лэмбовский сдвиг, стандарт частоты.

	Содержание
1. Введение . . . . .	698
2. Устранение доплеровского уширения . . . . .	699
2.1. Метод двухфотонного поглощения без доплеровского уширения	
2.2. Математический аппарат	
3. Прецизионная спектроскопия атома водорода . . . . .	701
3.1. Уровни энергии атома водорода	
3.2. Измерение частоты перехода $1S - 2S$ атома водорода	
3.3. Спектроскопия $2S - nS$ - и $2S - nD$ -переходов	
3.4. Определение постоянной Ридберга и лэмбовского сдвига уровней	
3.5. Изотопический сдвиг	
3.6. Спектроскопия ультрахолодных атомов водорода в ловушке	
3.7. Конденсация Бозе–Эйнштейна	
4. Измерение частот переходов атома гелия . . . . .	705
4.1. Переходы между синглетными уровнями	
4.2. Триплетная часть спектра	
4.3. Сравнение теории и эксперимента	
4.4. Тонкая структура уровня $2^3P$	
4.5. Запрещенный переход $2^1S - 2^3S$	
5. Заключение . . . . .	709
6. Приложение. Поглощение оптического излучения атомом . . . . .	709
6.1. Квантовая система с произвольными моментами уровней	
6.2. Кинетические уравнения для матрицы плотности	
6.3. Вероятность перехода под действием поля	
6.4. Резонансное поглощение слабого поля	
6.5. Двухфотонное поглощение	
7. Литература . . . . .	713

## 1. Введение

Методы нелинейной лазерной спектроскопии позволили существенно увеличить спектральное разрешение классической спектроскопии и исследовать структуру линии, скрытую доплеровским уширением [1, 2]. Наибольшее распространение получили два метода – метод насыщенного поглощения и метод двухфотонного поглощения без доплеровского уширения. Используются различные варианты реализации этих методов: ячейка с

газом низкого давления, пучок холодных атомов, атомы в магнитооптической ловушке.

В данном обзоре описаны основные эксперименты по спектроскопии атомов водорода и гелия. Большинство экспериментов по прецизионным измерениям частот переходов этих атомов были выполнены с помощью двухфотонного поглощения без доплеровского уширения.

Спектроскопия атома водорода всегда играла ведущую роль в развитии квантовой механики и атомной физики. Как простейший атом, водород позволяет проводить уникальное сопоставление фундаментальных экспериментов и теории. Достаточно сказать, что открытие лэмбовского сдвига явилось основой развития современной квантовой электродинамики.

Атом гелия является следующей по сложности кван-

**Е.В.Бакланов.** Институт лазерной физики СО РАН, Россия, 630090 Новосибирск, просп. Лаврентьева, 13/3; e-mail: bakl@laser.nsc.ru

Поступил в редакцию 14 апреля 2004 г.

товой системой после водорода. К настоящему времени для атома гелия (и других трехчастичных систем) развиты эффективные численные методы, позволяющие с высокой точностью находить уровни энергии. Сравнение с экспериментом позволяет получить новые результаты: более точно может быть проверена квантовая электродинамика, поскольку лэмбовский сдвиг основного состояния атома гелия на порядок больше, чем у водорода; атом гелия как простейшая многоэлектронная система может служить основой для расчета более сложных систем. С экспериментальной точки зрения гелий имеет ряд преимуществ перед водородом: это инертный газ, с которым проще проводить эксперименты, и кроме того, радиационные ширины переходов триплетной части спектра гелия меньше, чем в водороде.

Основой для прецизионного измерения частот переходов атомов и молекул являются стандарты частоты – стабильные лазеры, привязанные каким-либо способом к абсолютной шкале частот [3–7]. Стандарт частоты лежит в основе спектрометра – устройства, позволяющего регистрировать линию поглощения перехода. Как правило, спектрометр для прецизионных измерений представляет собой сложную установку, состоящую из нескольких стабильных лазеров, нелинейных кристаллов для умножения частот, устройства для получения холодных атомов в атомном пучке или ловушке, а также системы регистрации резонанса поглощения и других элементов.

Кроме спектрометра необходим прибор для абсолютного измерения частоты – оптические часы, позволяющие выполнить деление оптической частоты стандарта до радиодиапазона для того, чтобы сравнить ее с эталонной частотой микроволнового стандарта. Напомним, что эталоном частоты является цезиевый стандарт, частота излучения которого привязана к центру перехода сверхтонкой структуры атома цезия ( $\nu = 9192631770$  Гц).

Первые оптические часы были слишком сложны для широкого применения. Для перекрытия большого частотного диапазона использовалась длинная цепочка синхронизованных по фазе лазеров, которые охватывали оптическую и субмиллиметровую области спектра, множество нелинейных элементов для выделения сигналов промежуточной частоты, генераторы СВЧ и радиодиапазонов. Однако такие схемы позволяли синтезировать и измерять только несколько дискретных частот.

Ситуация кардинально изменилась за последние четыре года. Использование фемтосекундных лазеров существенно упростило процесс измерения оптических частот. Непрерывный фемтосекундный лазер излучает периодическую последовательность импульсов. В частотной области спектр излучения такого лазера представляет собой набор эквидистантных частотных компонент (режим самосинхронизации мод), заполняющих всю ширину спектра. Генератор, излучающий такой набор частот, называется комб-генератором (от comb – гребенка). Если какую-либо компоненту комб-генератора привязать к стандарту частоты, принятому в качестве эталона, то абсолютные значения частот всех других компонент будут известны. По существу получается оптическая линейка, позволяющая эффективно решать проблему абсолютного измерения оптических частот. С помощью фемтосекундных комб-генераторов были выполнены прецизионные измерения частот практически всех основных оптических стандартов (см. обзоры [8–12]).

В прецизионной лазерной спектроскопии при определении частот переходов важную роль играет теория. Необходимо учесть влияние на сдвиг частоты перехода различных факторов: интенсивности и поляризации поля, плотности рабочих атомов, внешних электрических и магнитных полей и др. Теория должна адекватно описывать интересующие нас явления при взаимодействии атома с полем, для чего необходимо использовать аппарат квантовой теории углового момента [13–19] и кинетические уравнения для матрицы плотности атома в представлении неприводимых тензорных операторов. Квантовая теория углового момента широко используется в других разделах атомной физики, в ядерной физике, теории элементарных частиц. В лазерной физике она «заменяет» двухуровневую модель, позволяет учесть вырождение уровней (см., напр., [15, 16]). Основы теории взаимодействия оптического излучения с атомом при произвольных моментах уровней приведены в Приложении.

## 2. Устранение доплеровского уширения

Разрешение классической спектроскопии в газе ограничивается доплеровской шириной линии, которая при комнатной температуре составляет порядка 1 ГГц. Естественный путь повышения разрешения – охлаждение газа. Однако этот путь малоэффективен, т. к. доплеровская ширина медленно убывает при уменьшении температуры (как  $\sqrt{T}$ ).

Устранение доплеровского уширения достигается с помощью методов нелинейной лазерной спектроскопии. Эти методы позволяют получать узкие резонансы с однородной шириной на фоне доплеровски уширенной линии. В прецизионной лазерной спектроскопии водорода и гелия используются в основном два метода: метод насыщенного поглощения и метод двухфотонного поглощения без доплеровского уширения. Они хорошо дополняют друг друга: первый используется для спектроскопии разрешенных переходов, второй – для запрещенных.

В основе метода насыщенного поглощения лежит явление селекции атомов по скоростям при резонансном взаимодействии встречных волн с газом [1, 2]. Этот эффект позволяет получать резонансы с однородной шириной в центре доплеровски уширенной линии. В прецизионной спектроскопии атома гелия этот метод используется для измерения частот переходов  $2^3S - 2^3P$  и  $2^3S - 3^3P$ . С помощью метода двухфотонного поглощения были измерены частоты переходов  $1S - 2S$ ,  $1S - 3S$ ,  $2S - nD$  атома водорода и  $1^1S - 2^1S$ ,  $2^1S - n^1D$ ,  $2^3S - 3^3D$  атома гелия.

### 2.1. Метод двухфотонного поглощения без доплеровского уширения

Этот метод нелинейной спектроскопии был предложен В.П.Чеботаевым и его сотрудниками [20]. Чтобы пояснить физическую основу метода, рассмотрим двухфотонное поглощение в поле двух встречных волн с частотой  $\omega$ . В системе координат, связанной с движущимся атомом, условие резонанса при поглощении двух встречных фотонов есть

$$\omega_+ + \omega_- = \omega_{21},$$

где  $\omega_{21} = (E_2 - E_1)/\hbar$  – частота атомного перехода;  $\omega_{\pm} = \omega \pm \mathbf{k}\mathbf{v}$  – частоты встречных волн, которые из-за эффекта Доплера отличаются от  $\omega$ ;  $\mathbf{k}$  – волновой вектор;  $\mathbf{v}$  – скорость атома. Поскольку  $\omega_+ + \omega_- = 2\omega$ , то условие резонанса  $2\omega = \omega_{21}$  выполняется для любого атома независимо от направления и величины его скорости. Форма линии двухфотонного поглощения

$$f(\omega) = \frac{\Gamma^2}{(2\omega - \omega_{21})^2 + \Gamma^2} + f_D(\omega)$$

представляет собой узкий резонанс с однородной шириной перехода  $\Gamma$  и широкий доплеровский контур  $f_D(\omega)$ , обусловленный двухфотонным поглощением однонаправленных фотонов. Рис.1 иллюстрирует метод двухфотонного поглощения без доплеровского уширения, который использован в [21] для наблюдения сверхтонкого расщепления частоты перехода  $1S - 2S$  атома водорода. Об измерении частоты этого перехода пойдет речь в п.3.2.

Двухфотонный резонанс обладает следующими тремя важными для спектроскопии свойствами: все атомы независимо от скорости вносят вклад в резонанс, отсутствует эффект отдачи при поглощении встречных фотонов, многие двухфотонные переходы имеют малую естественную ширину.

Вероятность двухфотонного перехода найдена в [22, 23]. Конкретные значения вероятностей  $2S - nS$ - и  $2S - nD$ -переходов атома водорода вычислены в [23]. Общий случай стоячей волны с произвольной поляризацией рассмотрен в Приложении.

Основной недостаток метода двухфотонного поглощения – малая вероятность перехода по сравнению с однофотонным поглощением. Для увеличения интенсивности резонанса в [24] было предложено использовать двухфотонное поглощение сверхкоротких импульсов встречных волн, эта возможность была проанализирована в [25].

Причины уширения и сдвига резонанса двухфотонного поглощения в поле стоячей волны рассмотрены в [22, 23, 26 – 30]. К ним относятся пролетное уширение, квадратичный доплеровский сдвиг, эффект Штарка в поле излучения и другие эффекты, дающие меньший вклад.

Эксперименты по двухфотонному поглощению в водороде и гелии были выполнены с использованием пучков холодных атомов. Основной вклад в ширину резонанса дает пролетное уширение, которое определяется временем взаимодействия атома с лазерным пучком. На рис.2 показана область взаимодействия атома со свето-

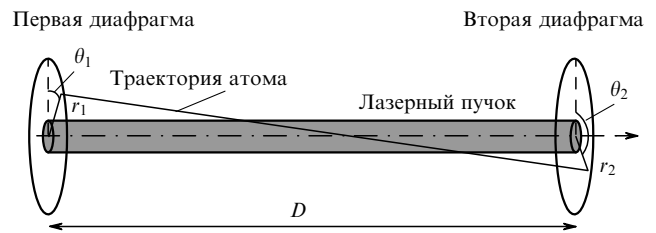


Рис.2. Траектория атома при продольном взаимодействии с атомным пучком.

вой волной, которая образуется двумя встречными лазерными пучками. Для примера остановимся на эксперименте [23], где использовалось двухфотонное поглощение без доплеровского уширения на переходе  $2S - 10D$  атома водорода. Пучок метастабильных атомов вырезается двумя диафрагмами диаметром 7 мм на расстоянии  $D = 1$  м. Для траектории атома, движущегося под углом  $\theta$  к лазерному пучку, ширина линии  $\gamma = 2v \times \sin \theta \ln 2 / (\pi \omega_0)$  [27], где  $v$  – скорость атома ( $\sim 3$  км/с),  $\omega_0$  – радиус лазерного пучка ( $\sim 0.6$  мм). Для наибольшего угла  $\theta$  ширина линии равна 10 кГц.

### 2.2. Математический аппарат

При теоретическом рассмотрении методов лазерной спектроскопии необходимо решать задачи нелинейного взаимодействия оптического излучения с атомом. Наиболее общей формой описания квантово-механической системы является ее описание с помощью матрицы плотности. Матрица плотности атома (молекулы) имеет матричные элементы  $\langle j_i m_i | \rho | j_k m_k \rangle$ , где  $j_{i,k}$  – момент уровня,  $m_{i,k}$  – проекция момента. Каждый из уровней вырожден по проекции момента  $2j + 1$  раз. Если рассматривать систему с двумя уровнями энергии, то при взаимодействии атома с внешним полем необходимо решать кинетические уравнения для матричных элементов  $\langle j_2 m_2 | \rho | j_2 m_2 \rangle, \langle j_1 m_1 | \rho | j_1 m_1 \rangle, \langle j_2 m_2 | \rho | j_1 m_1 \rangle$ . Нетрудно подсчитать, что число этих уравнений равно  $(2j_2 + 1)^2 + (2j_1 + 1)^2 + (2j_2 + 1)(2j_1 + 1)$ . Когда уровни  $j_2$  и  $j_1$  невырождены ( $j_2 = j_1 = 0$ ), приходится решать всего три уравнения. Эти уравнения удается решить во многих случаях аналитически. Однако уже при  $j_2 = 1, j_1 = 0$  имеем 13 уравнений, решение которых даже по теории возмущений при слабом поле представляет серьезную проблему. При произвольных моментах уровней практически невозможно решить задачу аналитически.

Выход из этой ситуации связан с использованием аппарата квантовой теории углового момента [13 – 16] и кинетических уравнений для матрицы плотности атома в представлении неприводимых тензорных операторов. Переход к представлению неприводимых тензорных операторов осуществляется с помощью формул, приведенных в Приложении. Вместо матричных элементов  $\langle j_i m_i | \rho | j_k m_k \rangle$  в  $jm$ -м представлении мы имеем величины  $\rho_{\chi q}(i, k)$ , которые реализуют представление неприводимых тензорных операторов ( $\chi = 0, 1, 2, \dots, j_i + j_k, q = -\chi, \dots, \chi$ ). Нетрудно подсчитать, что всего имеется  $(2j_i + 1) \times (2j_k + 1)$  величин  $\rho_{\chi q}(i, k)$ . Они называются поляризационными моментами матрицы плотности. При решении кинетических уравнений для  $\rho_{\chi q}(i, k)$ , используя теорию возмущений по полю, надо находить только  $\rho_{00}(i, i), \rho_{1q}(i, k)$  и  $\rho_{2q}(i, k)$ , что можно сделать при произвольных моментах уровней.

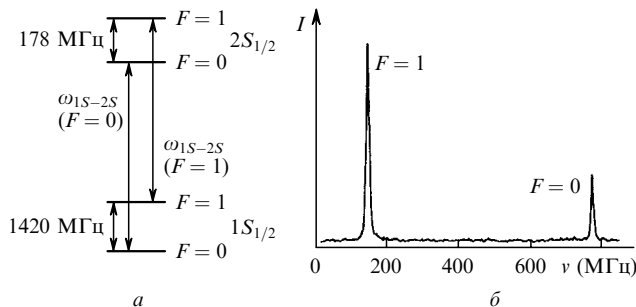


Рис.1. Сверхтонкое расщепление частоты перехода  $1S - 2S$  атома водорода: схема уровней (а) и спектр двухфотонного поглощения (б) [21];  $\nu$  – расстройка частоты.

### 3. Прецизионная спектроскопия атома водорода

Водород и другие двухчастичные системы играют фундаментальную роль в атомной физике. Уравнение Шредингера (или Дирака) для них можно решить точно, а затем использовать это решение в качестве нулевого приближения для учета различных поправок по теории возмущений.

В последние годы достигнут существенный прогресс в определении энергии уровней простейших водородоподобных систем. Это относится как к теории, так и к технике эксперимента. Опишем эксперименты по измерению частот переходов с помощью метода двухфотонного поглощения без доплеровского уширения. Эти измерения позволили уточнить постоянную Ридберга и лэмбовский сдвиг уровня основного состояния, что является одним из наиболее точных тестов квантовой электродинамики [31]. Остановимся на спектроскопических исследованиях атомарного водорода при низких температурах в радиочастотной ловушке, которые позволили наблюдать конденсацию Бозе – Эйнштейна [32].

#### 3.1. Уровни энергии атома водорода

Напомним структуру уровней атома водорода (рис.3). Уровни энергии электрона в кулоновском поле неподвижного ядра находятся из точного решения уравнения Дирака

$$E = m_e c^2 \times \left[ 1 + \frac{(Z\alpha)^2}{\{[(j + 1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2} + n - j - 1/2\}^2} \right]^{-1/2}, \quad (1)$$

где  $m_e$  – масса электрона;  $\alpha$  – постоянная тонкой структуры;  $Z$  – число протонов в ядре;  $n$  – главное квантовое число;  $j$  – полный момент электрона. Уравнение Дирака учитывает взаимодействие орбитального момента электрона  $l = 0, 1, 2, \dots$  и его спина  $s = 1/2$ , которые складываются в полный момент  $j$ . Состояния с одним и тем же главным квантовым числом  $n$  и угловым моментом  $j$  оказываются вырожденными. Например, уровни  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  имеют одну и ту же энергию. Учет лэмбовского

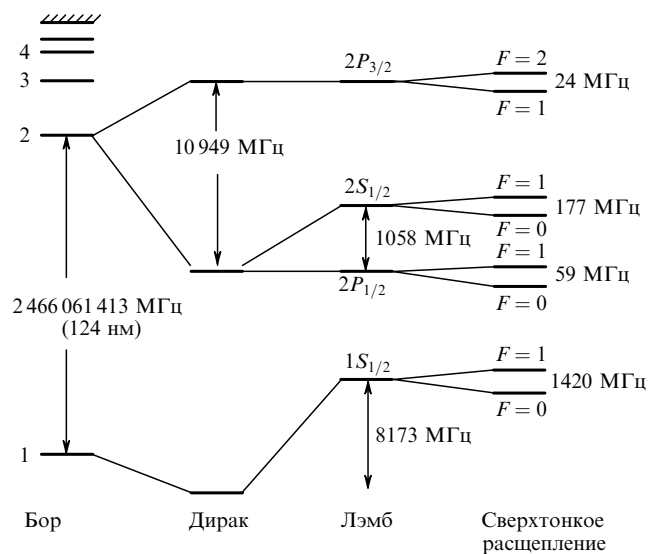


Рис.3. Уровни энергии атома водорода.

сдвига уровней  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  приводит к снятию этого вырождения (рис.3). Взаимодействие электрона со спином ядра  $i = 1/2$  приводит к расщеплению уровня с моментом  $j$  на две компоненты  $F = j \pm 1/2$ .

Эксперименты по прецизионному измерению частот переходов атомов водорода, которые будут описаны ниже, требуют вычисления энергии уровней с гораздо более высокой точностью, чем (1) (см. обзоры [33 – 35]).

Поправки к энергиям уровней определяются двумя малыми параметрами:  $\alpha$  и  $m_e/M$  (отношение массы электрона к массе протона). Поправки, содержащие  $m_e/M$ , в нерелятивистском пределе приводят к замене массы электрона на приведенную массу  $\mu$ . Релятивистские поправки по  $m_e/M$  имеют более сложную структуру. Они связаны с эффектом отдачи протона при излучении и поглощении фотона в процессе обмена энергией с электроном. Радиационные поправки порядка  $\alpha(Z\alpha)^4$  и выше называются лэмбовским сдвигом уровней. Главная из них связана с изменением собственной энергии электрона при виртуальном излучении и поглощении фотона.

Нахождение поправок к уровням энергии атома водорода является нетривиальной задачей. Необходимо рассчитать тысячи членов, которые затем надо обработать с помощью компьютера. Вычисление многих поправок связано с большими трудностями, они требуют применения методов квантовой электродинамики и часто – устранения УФ и ИК расходимостей.

#### 3.2. Измерение частоты перехода $1S - 2S$ атома водорода

Состояние  $2S$  атома водорода метастабильно, т.к. распад его в основное состояние возможен только за счет двухфотонного перехода. Его время жизни составляет  $\tau = 1/7$  с, естественная ширина  $1S - 2S$ -перехода равна  $\Delta\nu = (2\pi\tau)^{-1} = 1.3$  Гц. Переход  $1S - 2S$  идеально подходит для двухфотонной спектроскопии без доплеровского уширения (длина волны  $\lambda = 243$  нм). При частоте перехода  $\nu = 2466$  ТГц добротность резонанса  $Q = \nu/\Delta\nu = 5 \times 10^{14}$ . Из-за сверхтонкого расщепления линии имеются две частоты перехода  $\omega_{2S-1S}(F=0)$  и  $\omega_{2S-1S}(F=1)$ , отстоящие друг от друга на 1242 МГц (рис.1).

Возможность измерения частоты перехода  $1S - 2S$  с помощью метода двухфотонного поглощения была предложена в 1974 г. [36]. С тех пор было выполнено большое число экспериментов по ее измерению. Наилучшая точность была получена в экспериментах [37, 38], где использовался фемтосекундный лазер с самосинхронизацией мод.

На рис.4 показана схема спектрометра с использованием пучка холодных атомов водорода [39]. Длина волны излучения лазера на красителе 486 нм стабилизировалась по высокодобротному интерферометру, после чего удваивалась и полученное УФ излучение с  $\lambda = 243$  нм направлялось во внешний резонатор, расположенный внутри вакуумной камеры, для возбуждения двухфотонного перехода  $1S - 2S$  в пучке атомов водорода. Для наблюдения формы линии исследуемого перехода УФ излучение перестраивалось с помощью акустооптики. На рис.5 приведен резонанс двухфотонного поглощения без доплеровского уширения на переходе  $1S - 2S$ . Зависимость уширения и сдвига резонанса от температуры связана с квадратичным эффектом Доплера. Ширина резонанса при  $T = 8.7$  К определяется в основном пролетным эффектом и составляет 60 Гц.

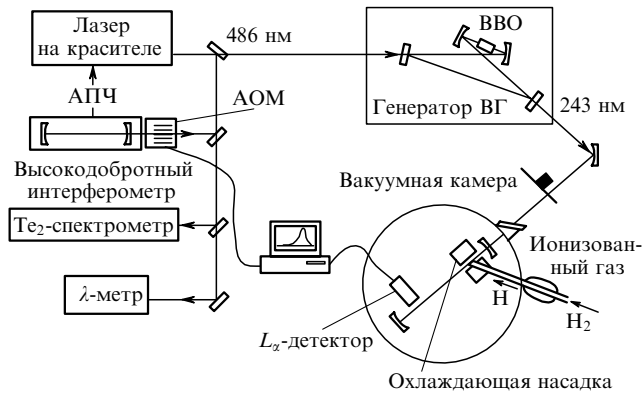


Рис.4. Схема установки по измерению частоты перехода  $1S - 2S$  атома водорода с помощью метода двухфотонного поглощения без доплеровского уширения [39]; АОМ – акустооптический модулятор.

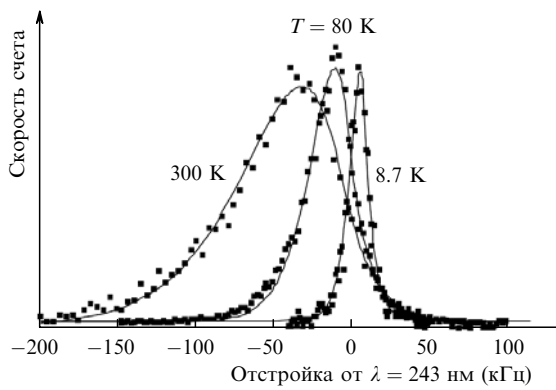


Рис.5. Резонанс двухфотонного поглощения без доплеровского уширения при различных температурах [39].

Частота перехода  $1S - 2S$  определялась с помощью настройки на центр резонанса с последующим измерением абсолютного значения частоты излучения лазера с  $\lambda = 486$  нм. Система измерения частоты 486 нм в [39] представляет достаточно сложную цепочку синхронизированных по частоте лазеров.

Наиболее точное значение частоты лазера  $f$  было получено путем ее сравнения с эталонной частотой цезиевого стандарта [38] (рис.6). Основными элементами такой схемы являются Тi:сапфировый лазер с длительностью импульсов 70 фс и транспортируемые атомные часы на фонтане атомов Cs, обеспечивающие контроль частоты повторения импульсов лазера с относительной погрешностью  $2 \times 10^{-15}$  [40]. Уширение спектра Тi:сапфирового лазера до 45 ТГц достигалось при пропускании его излучения через одномодовое кварцевое волокно. Частотный интервал  $\frac{4}{7}f$  и  $\frac{1}{2}f$ , соответствующий 44 ТГц, был измерен сравнением с конечным числом мод Тi:сапфирового лазера, который был привязан по фазе к цезиевому стандарту.

С учетом сверхтонкой структуры уровней  $1S$  и  $2S$  атома водорода была определена абсолютная частота  $\nu_{1S-2S} = 2\,466\,061\,413\,187\,103$  (46) Гц  $1S_{1/2} (F=1) \rightarrow 2S_{1/2} (F=1)$ -перехода, что соответствует относительной погрешности измерения  $1.8 \times 10^{-14}$ .

### 3.3. Спектроскопия $2S - nS$ - и $2S - nD$ -переходов

Остановимся теперь на прецизионных экспериментах по двухфотонному поглощению на переходах  $2S - nS$  и  $2S - nD$ , описанных в [24, 25, 41 - 43].

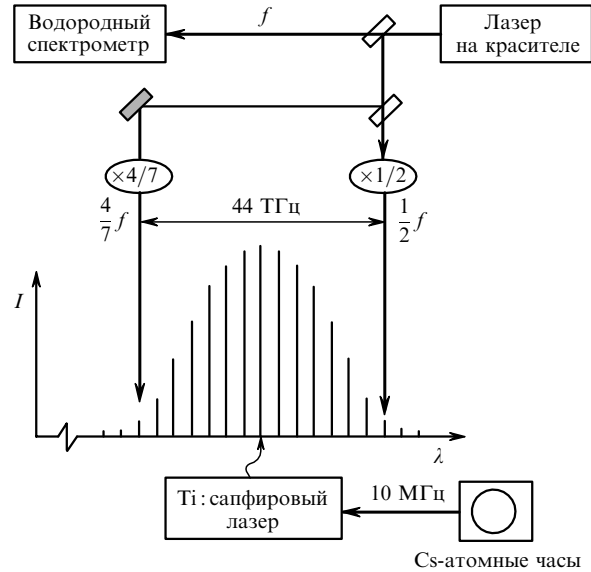


Рис.6. Сравнение частоты перехода  $1S - 2S$  атома водорода и эталонной частоты цезиевого стандарта с помощью фемтосекундного комб-генератора [38].

Принцип измерения частот переходов  $2S - nS$  и  $2S - nD$  иллюстрирует рис.7 [25]. Метастабильный атомный пучок формируется электронным возбуждением из атомного пучка в основном состоянии  $1S$ . Из-за неупругих столкновений с электронами траектория атома отклоняется на угол приблизительно  $20^\circ$ . Эта геометрия используется для уменьшения пролетного уширения – атомный пучок становится коллинеарным с пучком лазера. Метастабильные атомы в состоянии  $2S$  детектируются в конце атомного пучка: электрическое поле  $E$  переводит атом в состояние  $2P$ , а затем два фотоумножителя детектируют лаймановскую линию флуоресценции. Двухфотонное поглощение индуцируется высокостабильным излучением Тi:сапфирового лазера. Когда частота лазера оказывается в резонансе с  $2S - nS$ - (или  $2S - nD$ )-переходом, происходит возбуждение атома в состояние  $nS$  (или  $nD$ ) с последующим каскадным распадом в основное состояние. Этот процесс уменьшает число атомов в состоянии  $2S$ , что приводит к провалу в интенсивности флуоресценции.

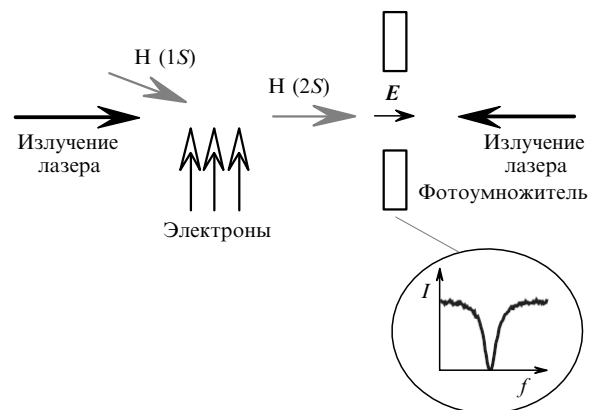


Рис.7. Схема, иллюстрирующая измерение частот переходов  $2S - nS$  и  $2S - nD$  двухфотонного поглощения [26]. В резонансе наблюдается уменьшение населенности метастабильного уровня  $2S$  ( $I$  – интенсивность флуоресценции;  $f$  – частота излучения лазера).

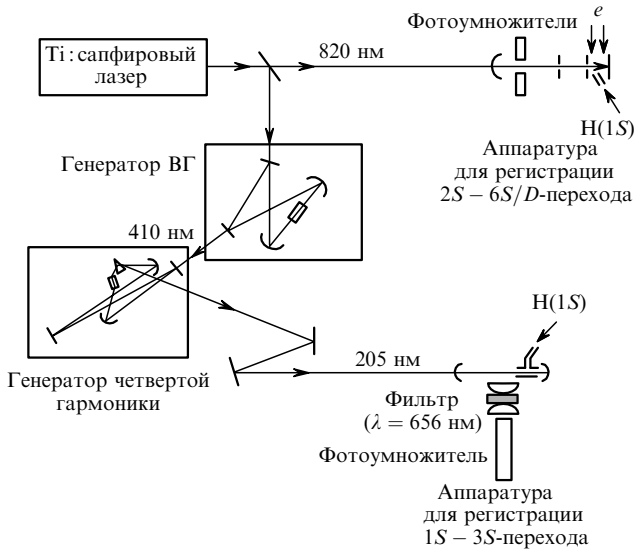


Рис.8. Схема эксперимента для сравнения частот переходов 1S – 3S и 2S – 6S/D атома водорода [26].

На экспериментальной установке (рис.8) сравнивались частоты переходов 2S – 6S и 1S – 3S. Один и тот же Ti:сапфировый лазер использовался для наблюдения двухфотонного поглощения на переходах 2S – 6S (820 нм) и 1S – 3S (205 нм). Атомы водорода, возбужденные в состояние 3S, регистрировались по флуоресценции на переходе 3S – 2P. Измеренная частота перехода 1S – 3S сравнивалась с частотой 2S – 6S. На рис.9 приведена запись 2S – 6D- и 1S – 3S-резонансов для одной и той же шкалы частот. Максимумы кривых сдвинуты на 2.37 ГГц, что соответствует удвоенному лэмбовскому сдвигу уровней 1S.

### 3.4. Определение постоянной Ридберга и лэмбовского сдвига уровней

Эксперименты по измерению частот переходов атома водорода позволили уточнить постоянную Ридберга  $R_\infty$  и определить лэмбовский сдвиг уровней 1S и 2S. Энергию уровня атома водорода можно представить в виде

$$\frac{E(nl)}{h} = D(nl)cR_\infty + L(nl), \quad (2)$$

где  $D(nl)$  определяет энергию Дирака (1) с учетом приведенной массы электрона и протона [25]. Коэффици-

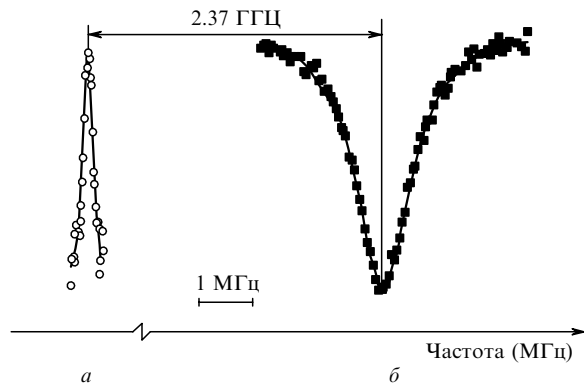


Рис.9. Спектры резонансов двухфотонного поглощения атома водорода на переходах  $1S_{1/2}(F=1) - 3S_{1/2}(F=1)$  (а) и  $2S_{1/2}(F=1) - 6D_{5/2}(F=1)$  (б) для  $\lambda = 820$  нм.

циент  $D(nl)$  может выражаться через постоянную тонкой структуры  $\alpha$  и отношение массы электрона к массе протона  $m_e/M$ . Лэмбовский сдвиг  $L(nl)$  имеет размерность частоты, он содержит все теоретические поправки: радиационные поправки квантовой электродинамики, релятивистские поправки из-за эффекта отдачи протона, поправки, учитывающие влияние размера заряда протона.

Из (2) видно, что для определения постоянной Ридберга из измерения частот перехода необходимо знать лэмбовский сдвиг переходов. Для переходов между верхними уровнями можно использовать теоретические значения  $L(nl)$ , точность вычисления которых составляет  $\sim 100$  Гц, что существенно меньше экспериментальной погрешности  $\sim 5$  кГц. Однако для уровней 1S и 2S погрешности вычисления составляют 40 и 5 кГц соответственно. Поэтому измерение частот переходов между верхними уровнями больше подходит для нахождения  $R_\infty$ , а измерение частоты перехода 1S – 2S – для определения лэмбовского сдвига уровней 1S и 2S.

**Постоянная Ридберга.** Эта постоянная играет важную роль в атомной физике – она является шкалой для уровней энергии всех атомов, используется для определения других фундаментальных констант [34]. На возможность более точного определения  $R_\infty$  из измерений оптических частот переходов атома водорода было указано в [44, 45]. Мы остановимся на двух методах, которые были использованы для определения  $R_\infty$  из измерений частот переходов 2S – nD.

Первый из них использует измерения частоты микроволнового перехода  $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ . Впервые этот переход был измерен Лэмбом и Резерфордом [46]. Наиболее точные измерения были выполнены методами микроволновой спектроскопии [47 – 51]. Среднее значение измерений [47 – 50] составило  $\nu(2S_{1/2} - 2P_{1/2}) = 1057.8454(65)$  МГц. С использованием теоретического значения лэмбовского сдвига уровня  $2P_{1/2}$  было найдено значение лэмбовского сдвига уровня  $2S_{1/2}$ , а затем из измерений частот переходов 2S – nD определена постоянная Ридберга.

Другой метод определения  $R_\infty$  использует закон  $1/n^3$  для лэмбовского сдвига уровней  $L(nl)$  с последующим точным вычислением разностей  $L(1S) - n^3L(nS)$  [52]. Постоянная Ридберга определяется из линейных комбинаций измерений частот переходов, например  $1S_{1/2} - 2S_{1/2}$  и  $2S_{1/2} - nD_{5/2}$ .

В [31] приведено значение  $R_\infty$ , найденное по методу наименьших квадратов с использованием результатов различных измерений. Были учтены прецизионные эксперименты по измерению лэмбовского сдвига уровня 2S, оптических частот переходов 1S – 2S и 2S – nS/nD, лэмбовского сдвига уровня 1S. Окончательное значение  $R_\infty = 109737.31568550(84)$  см<sup>-1</sup> имеет приблизительно ту же точность, что и величина, рекомендованная CODATA (Committee on Data for Science and Technology) в 1998 г. Относительная погрешность составляет  $7.7 \times 10^{-12}$ . По сравнению с рекомендациями CODATA в 1986 г. погрешность уменьшилась в 150 раз благодаря прецизионным измерениям оптических частот атома водорода.

**Лэмбовский сдвиг уровня 1S.** Измерение лэмбовского сдвига уровней атома водорода и сравнение с его теоретическими значениями является хорошим тестом квантовой электродинамики. Наибольший интерес предстает

влияет определение лэмбовского сдвига уровня  $1S$ , которое проводится путем сравнения различных частот переходов (2) [25, 31].

Один из методов, продемонстрированный в п.3.3, сравнивает переходы, частоты которых относятся как 4:1. В теории Бора  $E_n \sim 1/n^2$ , поэтому разность частот  $\nu(1S - 3S)$  и  $4\nu(2S - 6S)$  в точности равна нулю. Отличие этой величины от нуля связано с лэмбовским сдвигом уровней, в основном уровня  $1S$ .

Другой метод измерения лэмбовского сдвига уровня  $1S$  основан на сравнении частот переходов  $1S - 2S$ ,  $2S - nD$  и  $2S - 2P$ . Из измерений  $\nu(2S_{1/2} - nD_{5/2})$  и  $\nu(2S_{1/2} - 2P_{1/2})$  находится лэмбовский сдвиг  $L(2S_{1/2})$ , а затем  $L(1S_{1/2})$  определяется из частоты  $\nu(1S_{1/2} - 2S_{1/2})$ . Уточнение этого метода связано с использованием закона  $1/n^3$  для лэмбовского сдвига верхних уровней [52]. Согласование различных измерений лэмбовского сдвига уровня  $1S$  с использованием метода наименьших квадратов дает величину  $L(1S_{1/2}) = 8172.840(22)$  МГц, что находится в согласии с теорией [53–55].

### 3.5. Изотопический сдвиг

Измерение сдвига частот переходов в смеси изотопов водорода и дейтерия позволяет получать информацию о свойствах протона и дейтрона. Ядро атома дейтерия – дейтрон – состоит из нейтрона и протона. Дейтрон, являясь простейшим составным ядром, играет важную роль в теории ядерных сил.

*Отношение массы протона к массе электрона.* При измерении частот переходов  $1S_{1/2} - 2S_{1/2}$ ,  $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$  и  $2S_{1/2} - 12D_{5/2}$  [25] были найдены изотопические сдвиги

$$A_{H-D}(n=8) = 796844.536(50) \text{ МГц}, \quad (3)$$

$$A_{H-D}(n=12) = 851208.619(59) \text{ МГц}.$$

В первом приближении изотопический сдвиг пропорционален  $(m_e/m_p)(1 - m_p/m_d)cR_\infty$ , где  $m_p$  – масса протона,  $m_d$  – масса дейтрона. Учитывая, что отношение массы дейтрона к массе протона известно с очень хорошей точностью ( $7 \times 10^{-10}$ ), из (3) было получено отношение  $m_p/m_e = 1836.152667(85)$  с относительной точностью  $4.6 \times 10^{-8}$ . Эта величина находится в хорошем согласии с более точным измерением  $m_p/m_e$  в [56], где относительная точность  $2.2 \times 10^{-9}$ .

*Радиус ядра.* Поправка к энергии уровня атома водорода, связанная с конечным размером ядра, равна [34, 57]:

$$E_n = \frac{2}{3} \frac{(Z\alpha)^2}{n^3} m_e c^2 \left( \frac{Z\alpha r_n}{a_0} \right)^2,$$

где  $a_0$  – боровский радиус;  $r_n$  – радиус заряда ядра, который различен для протона и дейтрона. Измерения изотопических сдвигов позволили определить радиусы зарядов протона и дейтрона (см. ссылки в [57]):  $r_p = 0.8545(120)\phi$ ,  $r_d = 2.130(10)\phi$  ( $\phi = 10^{-15}$  см).

*Радиус структуры дейтрона.* Одна из главных характеристик дейтрона – радиус его структуры  $r_d^{\text{str}}$ , который немного меньше  $r_d$ . Параметр  $r_d^{\text{str}}$  традиционно определяется из экспериментов по рассеянию электрона на дейтроне [58]. С помощью измерений изотопического сдвига перехода  $1S - 2S$  водорода и дейтерия ( $670994334.64(15)$  кГц) [59] радиус структуры дейтрона был найден с гораздо большей точностью,  $r_d^{\text{str}} = 1.97544(82)\phi$  [34], что хорошо согласуется с теоретическим значением [60].

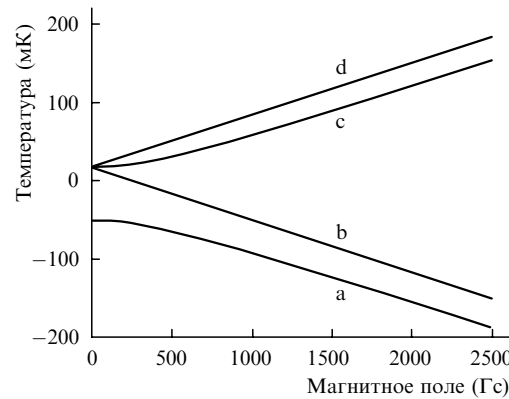


Рис.10. Сверхтонкая структура основного состояния атома водорода. Атомы в состояниях с и d удерживаются в минимуме напряженности магнитного поля.

### 3.6. Спектроскопия ультрахолодных атомов водорода в ловушке

За последние десять лет достигнут существенный прогресс в области получения ультрахолодных атомов водорода, захваченных в ловушку. Для этого обычно используются методы лазерного охлаждения. Для атома водорода такой метод был продемонстрирован в [61], однако достаточно большая энергия отдачи не позволила охладить газ ниже 1 мК.

Наиболее эффективным для водорода оказался метод охлаждения и захват атомов, использующий испарение при криогенных температурах [32]. Его суть заключается в следующем. Пучок атомов водорода получают с помощью ВЧ разряда. Атомы термализуются на холодных стенках ячейки, охлаждаемой жидким гелием. Испаряясь со стенки, атомы водорода захватываются в ловушку Иоффе, которая представляет собой длинную квадрупольную ловушку со сверхпроводящими магнитными кольцами на каждом конце. Начальное магнитное поле 0.9 Т достаточно, чтобы захватывать атомы с температурой 0.5 К. Температура захваченного в ловушку газа быстро падает из-за испарения атомов со стенок. Приблизительно при 60 мК газ становится изолированным от стенок и испарение прекращается. Захват атомов в ловушку связан со сверхтонким расщеплением уровня энергии основного состояния (рис.10). Захватываются состояния a и c, для которых полный момент  $F = 1$ , а проекции моментов равны  $M_F = 1$  и 0 соответственно.

Упрощенная схема эксперимента приведена на рис.11 [32]. Спектроскопические исследования атомов холодного водорода были выполнены на переходе  $1S - 2S$  с помощью метода двухфотонного поглощения без допле-

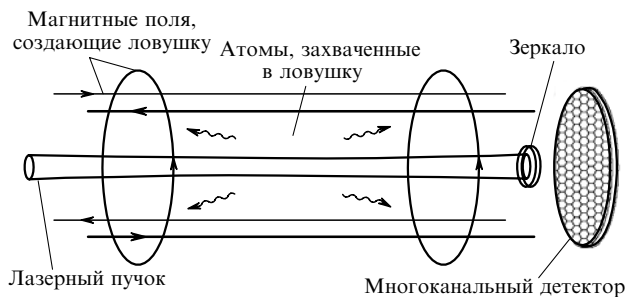


Рис.11. Упрощенная схема эксперимента [32]. Сверхпроводящие магнитные кольца создают потенциал, который удерживает атомы вблизи фокуса лазерного пучка с  $\lambda = 243$  нм. Ловушка существенно длиннее и уже, чем показано.

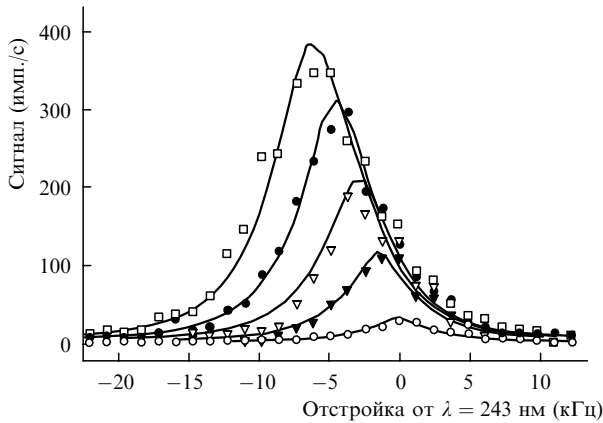


Рис.12. Сдвиг частоты двухфотонного поглощения на переходе  $1S - 2S$  атома водорода при различных плотностях [32]. Наибольшая плотность  $6.6 \times 10^{13} \text{ см}^{-3}$  соответствует наибольшему красному сдвигу. Температура 120 мкК.

ровского уширения. Излучение с  $\lambda = 243 \text{ нм}$ , необходимое для поглощения на этом переходе, было получено удвоением излучения с  $\lambda = 486 \text{ нм}$ . Лазер с  $\lambda = 486 \text{ нм}$  был стабилизирован по высокодобротному резонатору, что позволило получить ширину линии излучения менее 1 кГц. Лазерный пучок распространялся параллельно оси ловушки, а затем отражался от зеркала, создавая встречную волну. Атомы, возбужденные в состоянии  $2S$ , имеют те же самые сверхтонкие состояния  $a$  и  $c$ , а следовательно, остаются захваченными. Чтобы измерить населенность уровня  $2S$ , прикладывается электрическое поле, которое смешивает состояния  $2S$  и  $2P$ . Затем регистрируется флуоресценция на лаймановской линии с  $\lambda = 121 \text{ нм}$  (порядка  $10^5$  фотонов в секунду).

На рис.12 приведена форма сигнала в зависимости от расстройки излучения с  $\lambda = 243 \text{ нм}$  при различных плотностях атомов ловушки. При низкой плотности (менее  $10^{12} \text{ см}^{-3}$ ) и температуре более 100 мкК ширина линии поглощения определяется временем взаимодействия атома с лазерным пучком. Взаимодействие с соседними атомами в ловушке приводит к уширению и сдвигу линии. Измерение этого сдвига [62] находится в хорошем согласии с теоретическими вычислениями [63]. Сдвиг линии при столкновении холодных атомов очень важен при прецизионных измерениях частоты. Он наблюдался в водородном лазере, в экспериментах с атомными часами на фонтане атомов. С этой точки зрения он является помехой, однако в экспериментах по изучению конденсации Бозе–Эйнштейна этот сдвиг обеспечивает полезную диагностику плотности атомов в конденсате.

### 3.7. Конденсация Бозе–Эйнштейна

При абсолютном нуле температуры газ атомов с целым полным моментом (газ бозе-частиц) оказывается в основном состоянии системы (конденсация Бозе–Эйнштейна). При температуре, приближающейся к абсолютному нулю, фазовый переход происходит при условии, когда размер области, где находятся атомы, сравним с дебройлевской длиной волны  $\Lambda = [2\pi\hbar^2 / (Mk_B T)]^{1/2}$ , где  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура;  $M$  – масса атома. Для идеального бозе-газа  $n_g \geq 2.612\Lambda^{-3}$ , где  $n_g$  – плотность газа. Конденсация газа атомов была достигнута впервые для щелочных металлов [64]. В экспериментах использовалась техника лазерного охлаждения и захват в ловушку. Обзор теоретических и эксперименталь-

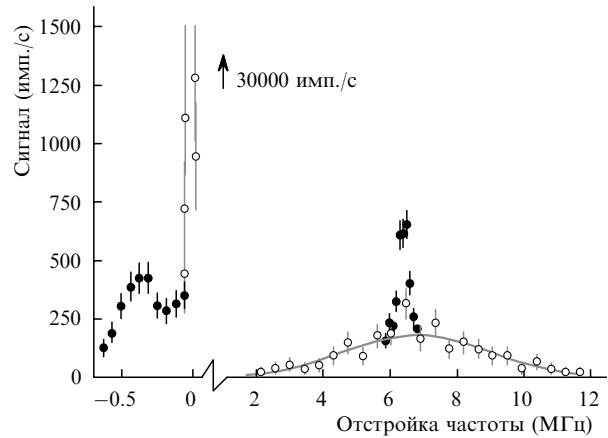


Рис.13. Форма линии двухфотонного перехода  $1S - 2S$  атома водорода при двух значениях плотности атомов в ловушке: без конденсата ( $\circ$ ) и с конденсатом ( $\bullet$ ) [66]

ных исследований в этом направлении можно найти в [65].

С помощью техники, описанной в предыдущем параграфе, удалось наблюдать конденсацию Бозе–Эйнштейна для газа атомов водорода. Критическая плотность  $1.8 \times 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , при которой происходит фазовый переход, достигается при температуре 50 мкК.

Метод двухфотонного поглощения позволил наблюдать конденсацию в реальном и в импульсном пространстве, а также фазовый переход. Когда при увеличении плотности атомов (или уменьшении температуры) достигается критическая точка, часть атомов выпадает в конденсат, т. е. оказывается в основном колебательном состоянии ловушки. Пространственная область конденсата много меньше радиуса облака надконденсатных частиц в ловушке. Даже небольшая доля атомов в конденсате имеет большую плотность.

Конденсация Бозе–Эйнштейна газа атомов водорода в ловушке наблюдается по изменению формы линии двухфотонного поглощения на переходе  $1S - 2S$  (рис.13) [66]. Часть спектра в правой части рисунка представляет доплеровскую линию, связанную с поглощением двух фотонов, распространяющихся в одном и том же направлении. Она сдвинута на удвоенную энергию отдачи фотона 6.7 МГц. Пик поглощения в левой части рисунка связан с поглощением встречных фотонов, т. е. с двухфотонным поглощением без доплеровского уширения. В случае конденсата этот пик имеет большой красный сдвиг, обусловленный столкновениями холодных атомов.

## 4. Измерение частот переходов атома гелия

Существует два стабильных изотопа гелия  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ . Спин ядра  $^4\text{He}$  равен нулю, поэтому уровни энергии  $^4\text{He}$  не имеют сверхтонкой структуры. Сверхтонкая структура  $^3\text{He}$  усложняет спектр и теоретические расчеты уровней, однако при измерениях она может дать дополнительную спектроскопическую информацию. Эксперименты, которые рассмотрены здесь, выполнены с  $^4\text{He}$ .

В табл.1 приведены спектроскопические данные переходов, которые связаны с метастабильными уровнями  $2^1S$  и  $2^3S$  атома гелия (рис.14). Эти уровни удобны для прецизионных измерений частот переходов, т. к. имеют малое радиационное время жизни – 0.02 и  $8 \times 10^3 \text{ с}$  со-



Табл.1. Радиационные переходы в He.

Переход	Тип	$\lambda$ (нм)	$W$ ( $e^{-1}$ )
$1^1S - 2^1P$	E1	58.43	$1.8 \times 10^9$
$2^1S - 2^1P$	E1	2058	$2.0 \times 10^6$
$2^3S - 2^3P$	E1	1083	$10^7$
$2^3S - 2^1P$	E1	888.5	1.6
$2^1S - 2^3P$	E1	3561	$2.7 \times 10^{-2}$
$1^1S - 2^3P$	M1	62.58	$1.3 \times 10^{-4}$
$2^3S - 2^1S$	M1	1557	$10^{-7}$
$1^1S - 2^1S$	E2	60.14	51

Примечание:  $W$  – радиационная вероятность.

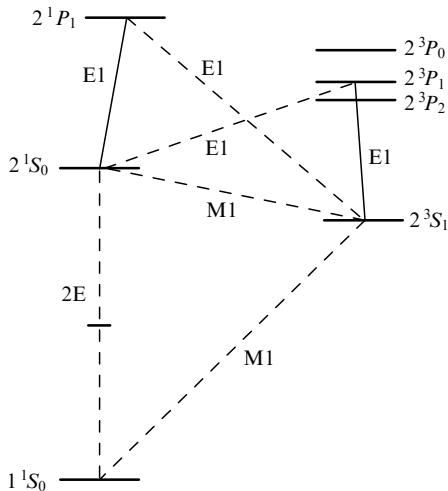


Рис.14. Низколежащие уровни атома гелия.

ответственно. Обзор прецизионных вычислений энергии уровней атома гелия дан в [67, 68]. Там же приведено и сравнение с экспериментом.

#### 4.1. Переходы между синглетными уровнями

**Переход  $1^1S - 2^1P$ .** До недавнего времени наиболее точное значение частоты перехода  $1^1S - 2^1P$  атома гелия было получено методами классической спектроскопии. В 1958 г. Герцберг измерил длину волны этого перехода (58.4 нм) и лэмбовский сдвиг основного состояния  $1^1S$  (41 ГГц) [69]. Полученные данные были в согласии с вычислениями Пекериса [70].

Долгое время эти результаты были наилучшими, поскольку не существовало источника излучения с  $\lambda = 58$  нм, который требуется для наблюдения резонансного поглощения. В конце 80-х гг. был достигнут существенный прогресс в спектроскопии далекого (вакуумного) ультрафиолета (ВУФ). Излучение с длинами волн до 60 нм генерируется с помощью преобразования третьего порядка (up-conversion) в газах и парах металлов. Для накачки используются мощные лазерные импульсы в видимой и в УФ областях [71–73].

Измерение частоты перехода  $1^1S - 2^1P$  атома гелия с помощью ВУФ лазерного источника с  $\lambda = 58.4$  нм было выполнено в [74]. Схема ВУФ спектрометра приведена на рис. 15. УФ излучение (292 нм) получается удвоением частоты импульсного (наносекундного) лазера на красителе с  $\lambda = 584$  нм. Затем оно фокусируется в газовую нелинейную среду ( $N_2$ ) для преобразования в ВУФ излучение (пятая гармоника). Пересекаясь с пучком атомов гелия, излучение возбуждает атомы в состоянии  $2^1P$ . Резонанс в

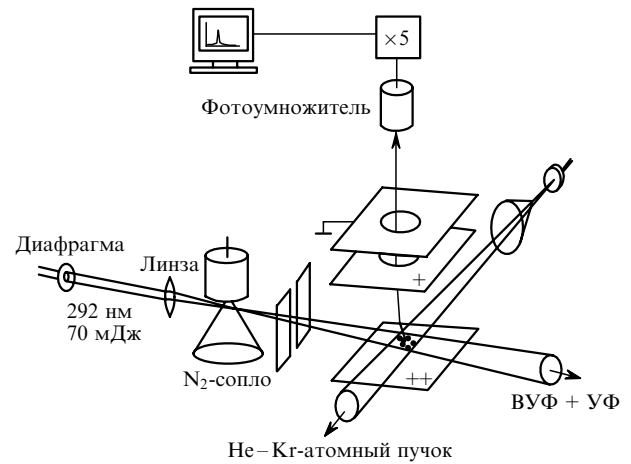


Рис.15. ВУФ спектрометр для измерения частоты перехода  $1^1S - 2^1P$  атома гелия [74]. Расположенная справа от линзы установка находится при низком давлении ( $10^{-5} - 10^{-7}$  мбар) и состоит из трех различных вакуумных камер. В первой камере ВУФ излучение с  $\lambda = 58$  нм генерируется в струе атомов  $N_2$ . Во второй камере ВУФ излучение возбуждает атомы гелия в состоянии  $2^1P$  при взаимодействии с He-Kr-атомным пучком. Третья камера служит для регистрации ионов  $He^+$ , которые образуются при фотоионизации излучением с  $\lambda = 292$  нм.

поглощении регистрируется по фотоионизации атомов УФ излучением на 292 нм (рис.16). На рис.17 приведена запись резонанса поглощения на переходе  $1^1S - 2^1P$ . Из данных эксперимента была найдена частота перехода  $1^1S - 2^1P$  атома гелия – 5130495083(45) МГц, а также уточнена величина лэмбовского сдвига основного состояния 41224(45) МГц, которая находится в хорошем согласии с теоретическим значением, основанным на вычислениях поправок квантовой электродинамики вплоть до  $\alpha^5 Z^6$ . Кроме того, измерения позволили уточнить изотопический сдвиг  $^3He - ^4He$ .

**Переход  $1^1S - 2^1S$ .** Запрещенный переход  $1^1S - 2^1S$  атома гелия имеет малую радиационную ширину (8 Гц), которая определяется двухфотонным распадом уровня  $2^1S$  в основное состояние  $1^1S$ . Для двухфотонной спектроскопии без доплеровского уширения на этом переходе необходима длина волны излучения 120 нм, которая лежит в области ВУФ. Она приблизительно в два раза короче, чем в двухфотонном эксперименте по измерению частоты перехода  $1S - 2S$  атома водорода. Поэтому из-

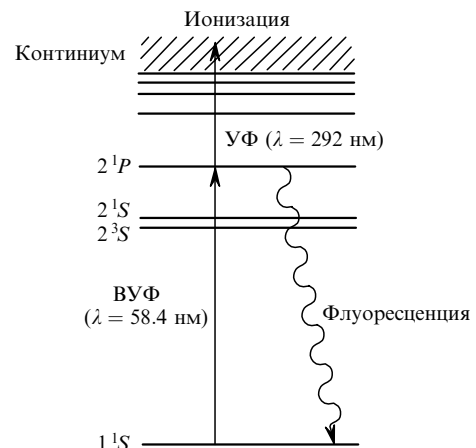


Рис.16. Принцип детектирования атомов в состоянии  $2^1P$  [74]. Регистрируются ионы He при поглощении двух фотонов (58.4 и 292 нм).

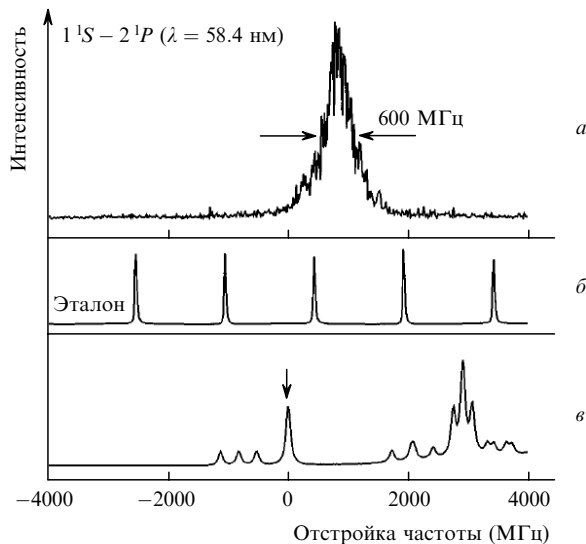


Рис. 17. Форма линии поглощения на переходе  $1^1S - 2^1P$  атома гелия [74] (а), метки эталона (б) и резонансы насыщенного поглощения в  $I_2$  (в). Стрелкой показан резонанс, соответствующий переходу  $P_{88}$  ( $15 - 1$ ) иода ( $\lambda = 584$  нм), который используется для абсолютной калибровки частоты.

мерение частоты перехода  $1^1S - 2^1S$  атома гелия можно рассматривать как логическое продолжение водородного эксперимента с умножением частоты 242 нм в два раза.

Измерение частоты перехода  $1^1S - 2^1S$  атома гелия с помощью метода двухфотонного поглощения без доплеровского уширения было выполнено в [75]. Излучение на длине волны 120 нм фокусировалось в сверхзвуковую струю атомов гелия. Атомы, возбужденные в состояние  $2^1S$ , затем ионизировались с помощью лазерного импульса с  $\lambda = 266$  нм, который был задержан на 30 нс относительно импульса с  $\lambda = 120$  нм. Ионы регистрировались с помощью масс-спектрометра. Форма линии поглощения приведена на рис.18. Была измерена частота перехода  $1^1S - 2^1S$  атома гелия 4984 872 315(48) МГц, определен лэмбовский сдвиг основного состояния 41104(48) МГц, величина которого находится в согласии с теорией и другими экспериментами (см. разд.3).

**Переходы  $2^1S - n^1P$ .** Серия частот переходов  $2^1S - n^1P$  ( $n = 7 - 74$ ) была измерена в [76]. Сравнение с теоретической формулой для частот переходов ридберговских уровней позволило определить величину энергии ионизации уровня  $2^1S$  (см. обзор [68]).

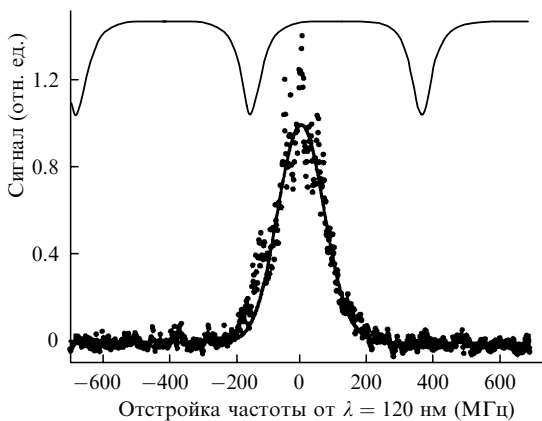


Рис. 18. Форма линии двухфотонного поглощения без доплеровского уширения на переходе  $1^1S - 2^1S$  атома гелия [75]. Периодическая кривая сверху – метки эталона.

**Переходы  $2^1S - n^1D$ .** В [77] были выполнены эксперименты по измерению частоты переходов  $2^1S - n^1D$  ( $7 \leq n \leq 20$ ) в гелии с использованием метода двухфотонного поглощения без доплеровского уширения. Пучок метастабильных атомов He в  $2^1S_0$ -состоянии, возбужденных электронами, взаимодействовал с лазерным пучком стоячей волны в резонаторе. Резонансы двухфотонного поглощения регистрировались по уменьшению интенсивности пучка  $2^1S_0$ -атомов.

Результаты измерений позволили определить лэмбовский сдвиг состояний  $2^1S_0$ ,  $3^1P_1$  и точно найти положение уровня  $2^1S_0$  относительно потенциала ионизации.

#### 4.2. Триплетная часть спектра

В триплетной части спектра уровни атома гелия имеют спин электронов, равный единице. Наименьшую энергию имеет  $2^3S$ -состояние с временем жизни 3 ч. Это дало возможность создать магнитооптическую ловушку, которая позволяет удерживать порядка  $10^9$  атомов гелия в  $2^3S$ -состоянии [78–80]. Конденсация Бозе–Эйнштейна была получена в [78, 79].

Измерения частот переходов в триплетной части спектра выполнены с большей точностью, чем в синглетной. Это связано с тем, что радиационная ширина триплетного уровня существенно меньше радиационной ширины соответствующего синглетного. Например, радиационная ширина  $2^3P$ -уровня на два порядка меньше ширины  $2^1P$ -уровня (табл.1). В триплетной части спектра не требуется источников УФ излучения. Для  $2^3S - 2^3P$ -перехода  $\lambda = 1083$  нм, а для  $2^3S - 3^3P$ -перехода  $\lambda = 389$  нм.

**Переход  $2^3S_1 - 3^3P_0$ .** Частота перехода  $2^3S_1 - 3^3P_0$  (389 нм) была измерена в [81, 82] с помощью метода насыщенного поглощения. Абсолютное значение частоты равно 770 732 839.058(190) МГц, относительная погрешность  $-2.4 \times 10^{-10}$ .

**Переход  $2^3S_1 - 3^3D_1$ .** В работе [83] была измерена частота перехода  $2^3S_1 - 3^3D_1$  с помощью метода двухфотонного поглощения без доплеровского уширения при  $\lambda = 762$  нм с относительной погрешностью  $7.1 \times 10^{-11}$ . Она равна 786 823 850.002(56) МГц.

#### 4.3. Сравнение теории и эксперимента

В [67, 68] дан обзор прецизионных вычислений энергии уровней атома гелия. Наибольший интерес вызывают низколежащие  $S$ -состояния, т. к. они имеют наибольший лэмбовский сдвиг. В табл.2 приведены основные эффекты и их вклад в энергию уровней  $1^1S$ ,  $2^1S$  и  $2^3S$ . Основной вклад вносит нерелятивистская энергия, которая находится из решения уравнения Шредингера для двух электронов в поле неподвижного ядра. Все остальные вклады в энергию считаются поправками. Поправки  $\mu/M$  и  $(\mu/M)^2$  учитывают конечную массу ядра (движение электронов и ядра вокруг центра масс). Член с  $\alpha^2$  дает релятивистские поправки, которые определяются взаимодействием Брейта между электронами (орбита–орбита, орбита–спин, спин–спин). Поправки  $\alpha^2 \mu/M$  называют релятивистским эффектом отдачи. Лэмбовский сдвиг является суммой всех поправок квантовой электродинамики. Сюда входят радиационные поправки, связанные с взаимодействием электронов с ядром и друг с другом.

В табл.2 дано сравнение вычисленных и измеренных значений энергий ионизации уровней  $1^1S$ ,  $2^1S$  и  $2^3S$ . Результаты теории и эксперимента совпадают с указанной

Табл.2. Поправки к энергии ионизации  $S$ -состояний атома гелия (в МГц) [67, 68].

Поправки, обусловленные вкладом в энергию уровня	$1^1S$	$2^1S$	$2^3S$
нерелятивистской энергии	5 945 405 676.78	960 331 428.619	1152 795 881.779
параметра $\mu/M$	-143446.25	-8570.430	-6711.192
параметра $(\mu/M)^2$	58.15	16.722	7.107
параметра $\alpha^2$	-16901.71	11969.813(1)	57621.420
параметра $\alpha^2 \mu/M$	101.39	4.987	3.617
лэмбовского сдвига	-41233(91)	-2806.7(250)	-4058.9(6.0)
размера ядра	-29.59(2)	-1.995(1)	-2.596(2)
Теория	$\sum$ 5 945 204 226(91)	$\sum$ 960 332 041.0(25.0)	$\sum$ 1152 842 741.2(6.0)
Эксперимент [74, 77, 80]	5 945 204 238(45)	960 332 041.01(15)	1152 842 742.87(6)
[75]	5 945 204 356(48)		
Их разность	12(102) 130(103)	0.0(25.0)	1.7(6.0)

Примечание:  $R_\infty = 3\,289\,841\,960.389$  МГц,  $\alpha^{-1} = 137.0359895$ ,  $\mu/M = 1.370745620 \times 10^{-4}$  – отношение приведенной массы электрона к массе ядра  $^4\text{He}$ .

точностью, что еще раз подтверждает справедливость квантовой электродинамики. Точность измерения энергии уровней  $1^1S$  и  $2^1S$  только в два раза лучше, чем вычисленные значения этих параметров. Для  $2^3S$ -состояния экспериментальная точность (0.06 МГц) существенно выше теоретической (6 МГц).

#### 4.4. Тонкая структура уровня $2^3P$

Считается, что для измерения фундаментальных констант наиболее подходит атом водорода. Однако для определения постоянной тонкой структуры  $\alpha$  предпочтительнее отдается тонкой структуре  $2^3P$ -уровня атома гелия (рис.19). Тонкое расщепление уровней триплетной части спектра гелия больше, чем в водороде, а радиационная ширина существенно меньше. Для уровня  $2^3P$  отношение величины тонкого расщепления к радиационной ширине перехода на два порядка больше, чем у водорода. Это преимущество гелия подтверждается экспериментами: расщепление  $2^2P_{1/2} - 2^2P_{3/2}$  в водороде было измерено с точностью  $1.4 \times 10^{-6}$  [84], в то время как расщепление  $2^3P_0 - 2^3P_1$  в гелии – с точностью  $6.8 \times 10^{-8}$  [85].

Измерение интервалов тонкого расщепления уровня ведется в двух направлениях: методами микроволновой спектроскопии [86, 87] и оптическими методами, путем определения разности оптических переходов с длиной волны 1083 нм [85, 88, 89].

В работе [85] тонкая структура уровня  $2^3P$  измерялась с помощью метода насыщенного поглощения. Резонансы в насыщении на переходах  $2^3S_1 - 2^3P_0$ ,  $2^3S_1 - 2^3P_1$  и  $2^3S_1 - 2^3P_2$  регистрировались по флуоресценции от пучка метастабильных  $2^3S$ -атомов гелия. Использовались

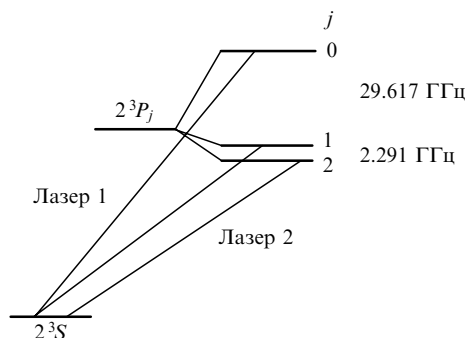


Рис.19. Тонкое расщепление энергии уровня  $2^3P$ , измеренное как разность частот двух стабильных лазеров с  $\lambda = 1083$  нм [82].

два стабильных по частоте диодных лазера, синхронизированных по фазе. Частота одного из них (опорного) была фиксирована, частота другого лазера сканировалась для индуцирования резонансов насыщения. Измерение частоты биения между лазерами позволило найти интервалы между компонентами тонкой структуры. Вычисленная частота перехода  $2^3P_0 - 2^3P_1$  составила  $29\,616\,949.7(2.0)$  кГц.

Такой результат совместно с теоретическими расчетами [90] позволяет найти новое значение постоянной тонкой структуры  $\alpha$  с точностью  $10^{-8}$  и устранить имеющееся расхождение результатов по измерению этой константы (см. ссылки в [85]). В настоящее время наиболее точное значение  $\alpha$  было определено из измерений аномального магнитного момента электрона  $g_e - 2$  [91] и составило  $1/137.05599993(52)$ .

#### 4.5. Запрещенный переход $2^1S - 2^3S$

Переход  $2^1S - 2^3S$  ( $\lambda = 1556$  нм) имеет малую радиационную ширину (8 Гц), и поэтому представляет интерес для прецизионной спектроскопии. Возможность наблюдения поглощения на запрещенном переходе между триплетным уровнем  $2^3S$  и синглетным уровнем  $2^1S$  рассматривалась в [92]. Вероятность радиационного М1-перехода  $2^1S - 2^3S$  равна  $A_0 = 10^{-7} \text{ с}^{-1}$  [93, 94] (см. табл.1). Число атомов, которое излучением на длине волны 1556 нм переводится из состояния  $2^3S$  в состояние  $2^1S$ , находится по формуле (П10) в Приложении. Для оценок будем ориентироваться на магнитооптическую ловушку [78–80]. Пусть  $N = 10^9$  – число атомов в состоянии  $2^3S$ ,  $\gamma = 10$  МГц – ударная ширина линии. При интенсивности излучения  $J = 100$  Вт/см<sup>2</sup> в состояние  $2^1S$  переходит  $10^7$  атомов в секунду.

При детектировании возбужденных атомов надо использовать метод, который хорошо селективирует состояния  $2^1S$  и  $2^3S$ . Можно использовать следующую схему. С помощью излучения лазера с длиной волны 2058 нм [95] атом из  $2^1S$ -состояния переводится в  $2^1P$ -состояние с последующим спонтанным излучением фотона на длине волны 58 нм. Излучение с  $\lambda = 58$  нм регистрируется с помощью техники ВУФ.

В [96, 97] для измерения частоты перехода  $2^1S - 2^3S$  был рассмотрен метод вынужденного комбинационного рассеяния (рис.20). Этот метод сложнее, чем измерение прямого поглощения на переходе  $2^1S - 2^3S$ , однако вероятность перехода на уровень  $2^3S$  существенно больше.

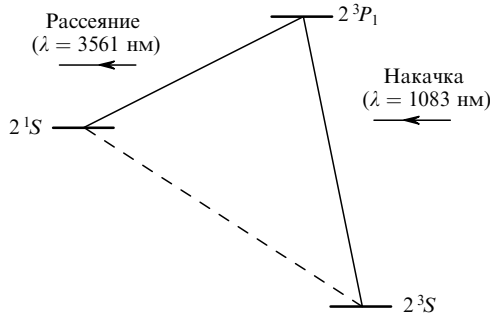


Рис.20. Схема вынужденного комбинационного рассеяния между триплетным  $2^3S$ - и синглетным  $2^1S$ -уровнями.

### 5. Заключение

Прецизионные эксперименты по измерению частот переходов атома водорода с помощью метода двухфотонного поглощения без доплеровского уширения позволили измерить лэмбовский сдвиг уровней  $1S$  и  $2S$ , на два порядка увеличить точность определения постоянной Ридберга. Вместе с теоретическими расчетами это является хорошей проверкой квантовой электродинамики на качественно новом уровне. Измерение изотопического сдвига частот переходов в смеси водорода и дейтерия дает новую информацию о свойствах протона и дейтрона. Наблюдение конденсации Бозе–Эйнштейна атомов водорода – важный шаг в изучении этого явления.

В настоящее время возросла роль атома гелия в фундаментальных спектроскопических исследованиях. Это прежде всего связано с увеличением точности расчетов энергии уровней. Измерения тонкого расщепления уровня  $2^3P$  атома гелия методами насыщенного поглощения дают все основания надеяться на определение постоянной тонкой структуры с большей точностью.

Следует отметить, что сейчас широко исследуется большое число естественных и искусственно созданных простых атомов: водород, гелий, мюоний, позитроний, экзотические атомные системы, включая пион, антипротон и т. д. Прецизионная лазерная спектроскопия простых атомов дает информацию для теории сильных взаимодействий, теории атомного ядра, квантовой хромодинамики и других областей науки.

Прогресс в области физики простых атомов за последние двадцать лет был подытожен в материалах трех международных конференций: Hydrogen I (Pisa, Italy 1991), Hydrogen Atom II (Castiglione della Pescaia, Italy, 2000) [98], PSAS 2002 – Precision Physics of Simple Atomic Systems (St.Petersburg–Pushkin, Russia, 2002) [99].

Конференция Hydrogen Atom III [100] состоялась в Бразилии 1–4 августа этого года. Были рассмотрены следующие вопросы: спектроскопия высокого разрешения водорода и гелия, прецизионные эксперименты с мюонием и позитронием, спектры ионов с несколькими электронами, изучение экзотических атомов, прецизионные измерения и метрология оптических частот, фундаментальные константы, спектроскопия антиводорода, новая физика в атомной спектроскопии, структура протона и легких ядер, связанные состояния квантовой электродинамики, квантовая механика кулоновских квантовых систем. Этот список дает представление о возможностях использования прецизионной лазерной спектроскопии простых атомов в различных областях физики.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 02-02-17043 и 04-02-81044-Бел2004).

## 6. Приложение

### Поглощение оптического излучения атомом

#### 6.1. Квантовая система с произвольными моментами уровней

Уровни энергии замкнутой квантовой системы  $E_n$  будем нумеровать индексом  $n$ . Собственные функции  $|n, j_n m_n\rangle$  удовлетворяют уравнению

$$H_0 |n, j_n m_n\rangle = E_n |n, j_n m_n\rangle,$$

где  $H_0$  – гамильтониан;  $j_n = 0, 1/2, 1, \dots$  – момент уровня;  $m_n = -j_n, \dots, j_n$  – проекция момента на произвольно выбранную ось квантования  $z$ . Для простоты обозначим

$$|j_n m_n\rangle = |n, j_n m_n\rangle.$$

В общем случае матричные элементы произвольного эрмитова оператора  $A$  могут быть представлены в виде

$$\langle j_n m_n | A | j_k m_k \rangle = \sum_{\chi=0}^{j_n+j_k} \sum_{q=-\chi}^{\chi} \langle j_n m_n | A_{\chi q} | j_k m_k \rangle, \quad (П1)$$

где  $A_{\chi q}$  – неприводимые тензорные операторы [13].

Использование неприводимых тензоров для описания физических величин существенно облегчает задачу вычисления матричных элементов, т. е. выражений типа  $\langle j_n m_n | A_{\chi q} | j_k m_k \rangle$ . Согласно теореме Вигнера–Экарта, вся зависимость таких матричных элементов от ориентации системы координат определяется  $3j$ -символами

$$\langle j_n m_n | A_{\chi q} | j_k m_k \rangle = (-1)^{j_n-m_n} \times \begin{pmatrix} j_n & \chi & j_k \\ -m_n & q & m_k \end{pmatrix} \langle j_n || A_{\chi} || j_k \rangle, \quad (П2)$$

где  $\langle j_n || A_{\chi} || j_k \rangle$  – приведенный матричный элемент, который не зависит от индексов  $m_n, m_k, q$ .

Матричные элементы оператора  $A$  можно записать в виде

$$\langle j_n m_n | A | j_k m_k \rangle = \langle m_n | A(n, k) | m_k \rangle, \quad (П3)$$

где определенные таким способом величины  $A(n, k)$  являются операторами (по моментам уровней они называются матрицей, а по проекциям момента – операторами).

Поляризационные операторы  $T_{\chi q}(n, k)$  определяются следующим образом:

$$\langle m_n | T_{\chi q}(n, k) | m_k \rangle = (2\chi + 1)^{1/2} (-1)^{j_n-m_n} \times \begin{pmatrix} j_n & \chi & j_k \\ -m_n & q & m_k \end{pmatrix}. \quad (П4)$$

Нам потребуются шпуры от нескольких поляризационных операторов. Например, шпур от трех операторов определяется как

$$\begin{aligned} & \text{Sp}\{T_{\chi_1 q_1}(i, k)T_{\chi_2 q_2}(k, n)T_{\chi_3 q_3}(n, i)\} \\ &= \sum_{m_i m_k m_l} \langle m_i | T_{\chi_1 q_1}(i, k) | m_k \rangle \\ & \quad \times \langle m_k | T_{\chi_2 q_2}(k, l) | m_l \rangle \langle m_l | T_{\chi_3 q_3}(l, i) | m_i \rangle. \end{aligned}$$

Используя формулы суммирования произведений 3j-символов ([13] с. 385), можно записать:

$$\begin{aligned} & \text{Sp}\{T_{\chi q}(i, i)\} = (2j_i + 1)^{1/2} \delta_{\chi 0} \delta_{q 0}, \\ & \text{Sp}\{T_{\chi_1 q_1}(i, k)T_{\chi_2 q_2}(k, i)\} = (-1)^{q_1 - j_i + j_k} \delta_{\chi_1 \chi_2} \delta_{q_1, -q_2}, \\ & \text{Sp}\{T_{\chi_1 q_1}(i, k)T_{\chi_2 q_2}(k, n)T_{\chi_3 q_3}(n, i)\} = (-1)^{2(j_i + j_k + j_n)} \\ & \quad \times [(2\chi_1 + 1)(2\chi_2 + 1)(2\chi_3 + 1)]^{1/2} \\ & \quad \times \begin{Bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ j_k & j_i & j_n \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \chi_1 & \chi_2 & \chi_3 \\ -q_1 & -q_2 & -q_3 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Произвольный оператор может быть разложен по поляризационным операторам

$$A(n, k) = \sum_{\chi=0}^{j_n + j_k} \sum_{q=-\chi}^{\chi} A_{\chi q}(n, k) T_{\chi q}(n, k), \quad (\text{П5})$$

где  $A_{\chi q}(n, k)$  – поляризационные моменты (числа), которые реализуют новое представление – представление неприводимых тензоров. Вместо матричных элементов  $\langle j_n m_n | A | j_k m_k \rangle$  мы имеем  $(2j_n + 1)(2j_k + 1)$  величин  $A_{\chi q}(n, k)$ . Чтобы перейти от представления  $\langle m_n | A(n, k) | m_k \rangle$  к представлению  $A_{\chi q}(n, k)$ , надо подействовать на обе части (П5) справа оператором  $T_{\chi, -q}(k, n)(-1)^{q + j_n - j_k}$  и взять шпур:

$$A_{\chi q}(n, k) = \text{Sp}\{A(n, k)T_{\chi, -q}(k, n)\}(-1)^{q + j_n - j_k}. \quad (\text{П6})$$

## 6.2. Кинетические уравнения для матрицы плотности

Для матрицы плотности квантовой системы  $\rho$  матричные элементы записываются в виде (П3)

$$\langle j_n m_n | \rho | j_k m_k \rangle = \langle m_n | \rho(n, k) | m_k \rangle.$$

Согласно (П5), (П6)

$$\begin{aligned} \rho(n, k) &= \sum_{\chi=0}^{j_n + j_k} \sum_{q=-\chi}^{\chi} \rho_{\chi q}(n, k) T_{\chi q}(n, k), \\ \rho_{\chi q}(n, k) &= \text{Sp}\{\rho(n, k)T_{\chi, -q}(k, n)\}(-1)^{q + j_n - j_k}. \end{aligned}$$

Для населенности уровня  $\rho_{00}(n, n)$  имеем

$$\rho_{00}(n, n) = \frac{\rho_n}{(2j_n + 1)^{1/2}},$$

где  $\rho_n = \sum_{m_n} \langle j_n m_n | \rho | j_n m_n \rangle$  – вероятность нахождения атома на уровне  $n$ .

Уравнение для матрицы плотности неподвижного атома есть

$$\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} (H\rho - \rho H),$$

где  $H = H_0 + V$ ;  $V$  – оператор взаимодействия атома с внешним полем. Перепишем это уравнение в виде

$$\dot{\rho}(n, k) + i\omega_{nk}\rho(n, k) = \frac{1}{i\hbar} \sum_r [V(n, r)\rho(r, k) - \rho(n, r)V(r, k)], \quad (\text{П7})$$

где  $\omega_{nk} = (E_n - E_k)/\hbar$ ;  $E_i$  – энергия уровня  $n$ ;

$$\langle j_n m_n | V | j_r m_r \rangle = \langle m_n | V(n, r) | m_r \rangle.$$

Запишем уравнение (П7) в представлении неприводимых тензоров. Для этого подействуем на обе части (П7) справа оператором  $(-1)^{q + j_n - j_k} T_{\chi, -q}(n, i)$  и возьмем шпур. Учитывая (П5), а также формулу для шпура от трех поляризационных операторов, получаем

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\chi q}(n, k) + i\omega_{nk}\rho_{\chi q}(n, k) &= \frac{1}{i\hbar} \sum_r [V_{\alpha\lambda}(n, r)C_{\chi q}^{\alpha\lambda, \chi'q'}(nrk) \\ & \quad \times \rho_{\chi'q'}(r, k) - \rho_{\chi'q'}(n, r)C_{\chi q}^{\chi'q', \alpha\lambda}(nrk)V_{\alpha\lambda}(r, k)], \quad (\text{П8}) \end{aligned}$$

где по индексам  $\alpha, \lambda, \chi', q'$  проводится суммирование;

$$\begin{aligned} C_{\chi q}^{\alpha\lambda, \chi'q'}(nrk) &= (-1)^{q - j_n + 2j_r + j_k} [(2\alpha + 1)(2\chi' + 1)(2\chi + 1)]^{1/2} \\ & \quad \times \begin{Bmatrix} \alpha & \chi' & \chi \\ j_k & j_n & j_r \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha & \chi' & \chi \\ -\lambda & -q' & q \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

При дипольном взаимодействии атома с полем  $E(t)$

$$V_{\alpha\lambda}(n, r) = -\frac{\langle j_n || d || j_r \rangle}{\sqrt{3}} E^\lambda(t) \delta_{\alpha\lambda},$$

где  $\langle j_n || d || j_r \rangle$  – приведенный матричный элемент дипольного момента;

$$E(t) = \sum_{\lambda=0, \pm 1} E^\lambda(t) e_\lambda$$

– вектор, разложенный по ортам циклического базиса  $e_0 = e_z, e_{\pm 1} = \mp(e_x \pm ie_y)$  [13]. С учетом возбуждения и радиационного распада уровней уравнение (П8) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{\chi q}(n, k) + (i\omega_{nk} + \Gamma_{nk})\rho_{\chi q}(n, k) &= r_{\chi q}(n, k) \\ &+ \sum_r [\Phi_{\chi q, \chi'q'}(nrk)\rho_{\chi'q'}(r, k) + R_{\chi q, \chi'q'}(nrk)\rho_{\chi'q'}(n, r)], \quad (\text{П9}) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_{\chi q, \chi'q'}(nrk) &= (-1)^{-j_n + 2j_r + j_k} \langle j_n || d || j_r \rangle \\ & \quad \times (-1)^{\chi + \chi'} [(2\chi + 1)(2\chi' + 1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} \chi & 1 & \chi' \\ j_r & j_k & j_n \end{Bmatrix} P_{\chi q, \chi'q'}(t); \\ R_{\chi q, \chi'q'}(nrk) &= (-1)^{-j_n + 2j_r + j_k} \langle j_r || d || j_k \rangle \\ & \quad \times [(2\chi + 1)(2\chi' + 1)]^{1/2} \begin{Bmatrix} \chi & 1 & \chi' \\ j_r & j_n & j_k \end{Bmatrix} P_{\chi q, \chi'q'}(t); \\ P_{\chi q, \chi'q'}(t) &= (-1)^q \frac{1}{i\hbar} \sum_\lambda \begin{Bmatrix} \chi & 1 & \chi' \\ -q & \lambda & q' \end{Bmatrix} E^\lambda(t); \end{aligned}$$

$\Gamma_{nk} = (\gamma_n + \gamma_k)/2$  – радиационная полуширина перехода;  $\gamma_n = \sum_l W(n \rightarrow l)$  – вероятность радиационного распада уровня  $n$  на все нижние уровни; член  $r_{\lambda q}(n, k)$  учитывает возбуждение уровней. При некогерентном возбуждении уровней

$$r_{\lambda q}(n, k) = r(n)\delta_{nk}\delta_{\lambda 0}\delta_{q 0},$$

где  $r(n)$  – скорость накачки уровня  $i$  (вероятность перехода в единицу времени). Если  $r(n)$  не зависит от времени, то

$$r(n) = \gamma_n \rho_{00}^{(0)}(n, n),$$

где  $\rho_{00}^{(0)}(n, n)$  есть  $\rho_{00}(n, n)$  в отсутствие поля.

Электрическое поле плоской монохроматической волны, действующее на атом в начале координат, запишем в виде

$$E(t) = \mathbf{a}E \exp(-i\omega t) + \mathbf{a}^*E^* \exp(i\omega t),$$

где  $\omega$  – частота;  $E$  – комплексная амплитуда;  $|E|^2 = 2\pi J/c$ ;  $J$  – плотность потока энергии (эрг/см<sup>2</sup>);  $\mathbf{a}$  – вектор поляризации волны, нормированный условием

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^* = \sum_{\lambda=0,\pm 1} a^\lambda (a^\lambda)^* = 1.$$

Для циклических компонент  $E(t)$  имеем

$$E^\lambda(t) = a^\lambda E \exp(-i\omega t) + (-1)^\lambda (a^{-\lambda})^* E^* \exp(i\omega t).$$

Выберем ось квантования  $z$  вдоль направления распространения волны  $\mathbf{k}$ . Из условия  $\mathbf{k}\mathbf{a} = 0$  следует  $a^0 = 0$ , т. е.

$$E^\lambda(t) = a^\lambda E \exp(-i\omega t) - (a^{-\lambda})^* E^* \exp(i\omega t), \quad \lambda = \pm 1.$$

В общем случае в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{k}$ , волна имеет эллиптическую поляризацию. Если большая ось эллипса направлена под углом  $\psi$  к оси  $x$ , то

$$a^\lambda = \frac{\lambda + \eta}{[2(1 + \eta^2)]^{1/2}} \exp(-i\lambda\psi), \quad (\text{П10})$$

где  $\lambda = \pm 1$ ;  $\eta$  – отношение малой оси эллипса к большой ( $-1 \leq \eta \leq 1$ ). При  $\eta = 1$  волна имеет правую круговую поляризацию, при  $\eta = -1$  – левую. Линейная поляризация реализуется при  $\eta = 0$ .

Коэффициенты в уравнении (П9) принимают вид

$$\Phi(nrk) = \Phi^-(nrk) \exp(-i\omega t) + \Phi^+(nrk) \exp(i\omega t),$$

$$R(nrk) = R^-(nrk) \exp(-i\omega t) + R^+(nrk) \exp(i\omega t),$$

где  $\Phi^\pm(nrk)$  и  $R^\pm(nrk)$  получаются из  $\Phi(nrk)$  и  $R(nrk)$  заменой в них  $P(t) \rightarrow P^\pm$ :

$$P_{\lambda q, \lambda' q'}^- = \frac{iE}{\hbar} \sum_{\lambda=\pm 1} \begin{pmatrix} \chi & 1 & \chi' \\ -q & \lambda & q' \end{pmatrix} a^\lambda,$$

$$P_{\lambda q, \lambda' q'}^+ = -\frac{iE^*}{\hbar} \sum_{\lambda=\pm 1} \begin{pmatrix} \chi & 1 & \chi' \\ -q & \lambda & q' \end{pmatrix} (a^{-\lambda})^*.$$

### 6.3. Вероятность перехода под действием поля

Будем рассматривать два уровня квантовой системы с энергиями  $E_2 > E_1$ . Накачка на верхний уровень 2

отсутствует. Накачку на нижний уровень 1 выберем такой, чтобы вероятность нахождения атома на уровне 1 в отсутствие поля равнялась единице. Тогда населенности уровней в отсутствие поля равны

$$\rho_{00}^{(0)}(2, 2) = 0, \quad \rho_{00}^{(0)}(1, 1) = \frac{1}{(2j_1 + 1)^{1/2}}.$$

Переход с уровня 1 на уровень 2 под действием поля  $E(t)$  может происходить с помощью одного, двух и более фотонов. Дадим определение вероятности перехода под действием поля. Для  $\rho_{00}(2, 2)$  из (П9) имеем

$$\dot{\rho}_{00}(2, 2) + \gamma_2 \rho_{00}(2, 2) = \sum_r [\Phi_{00,1q}(2r2) \rho_{1q}(r, 2) + R_{00,1q}(2r2) \rho_{1q}(2, r)].$$

В стационарном режиме  $\dot{\rho}_2 = 0$ , а поэтому

$$\gamma_2 \rho_2 = 2(2j_2 + 1)^{1/2} \text{Re} \left\{ \sum_r R_{00,1q}(2r2) \rho_{1q}(2, r) \right\}.$$

Это выражение имеет простой физический смысл: в стационарном режиме скорость спонтанного распада уровня 2 равна скорости его возбуждения внешним полем. Это означает, что

$$W(1 \rightarrow 2) = 2(2j_2 + 1)^{1/2} \text{Re} \left\{ \sum_r R_{00,1q}(2r2) \rho_{1q}(2, r) \right\} \quad (\text{П11})$$

есть вероятность перехода (в единицу времени) с уровня 1 на уровень 2 под действием поля  $E(t)$ . Задача, таким образом, свелась к нахождению  $\rho_{1q}(2, r)$  из уравнений (П9).

### 6.4. Резонансное поглощение слабого поля

Пусть атом находится в монохроматическом поле, частота которого  $\omega$  близка к частоте перехода  $\omega_{21}$  (резонансное взаимодействие). В (П9) будем учитывать только два уровня 1 и 2 и его решение искать в виде

$$\rho(2, 1) = \rho^- \exp(-i\omega t), \quad \rho(1, 2) = \rho^+ \exp(i\omega t),$$

причем  $\rho^-, \rho^+, \rho(2, 2), \rho(1, 1)$  не зависят от времени. При подстановке в (П9) слагаемые, содержащие множители  $\exp(\mp 2i\omega t)$ , мы опустим, т. к. по сравнению с основными членами они дают вклад порядка  $(\omega - \omega_{21})/\omega \ll 1$ . Вычленив  $\rho^-$  в линейном по полю приближении и подставив в (П11), получим вероятность перехода с уровня 1 на уровень 2:

$$W(1 \rightarrow 2) = W \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \Omega^2},$$

$$W = \frac{2|\langle j_2 || d || j_1 \rangle|^2 |E|^2}{3(2j_1 + 1)\hbar^2 \Gamma}, \quad (\text{П12})$$

где  $\Omega = \omega - \omega_{21}$ ;  $\Gamma = (\gamma_1 + \gamma_2)/2$ .

Для конкретных вычислений удобно выразить  $W$  через радиационную вероятность перехода с уровня 2 на уровень 1, которая согласно [14] равна

$$A = \frac{4\omega^3}{3c^3 \hbar} \frac{|\langle j_2 || d || j_1 \rangle|^2}{2j_2 + 1}.$$

Учитывая, что  $|E|^2 = 2\pi J/c$ ,  $\Gamma = 2\pi(\gamma/2)$ , где  $\gamma$  – ширина линии в герцах, получаем

$$W = \frac{1}{4\pi^2} \frac{2j_2 + 1}{2j_1 + 1} \frac{A}{\gamma} I, \quad (\text{П13})$$

где  $I = J\lambda^2/\hbar\omega$  – число фотонов, которое проходит через площадь  $\lambda^2$  в единицу времени. Если  $N$  – число атомов на уровне 1, то  $R = WN$  есть число атомов, возбуждаемых полем на уровень 2 в секунду.

С помощью вероятности перехода  $W(1 \rightarrow 2)$  можно найти коэффициент поглощения газа неподвижных атомов. Рассмотрим поглощение волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , тонким слоем  $\Delta z$  и площадью  $S$ . Если  $P(z)$  – мощность, втекающая в слой, а  $P(z + \Delta z)$  – вытекающая, то для мощности, поглощенной в объеме  $\Delta zS$ , имеем

$$P(z) - P(z + \Delta z) = \hbar\omega W(1 \rightarrow 2)\Delta zSn,$$

где  $n$  (в  $\text{см}^{-3}$ ) – плотность атомов. Учитывая, что  $P = c|E|^2S/2\pi$ , имеем

$$\frac{dP}{dz} + \alpha P = 0,$$

где

$$\alpha = \alpha_0 \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \Omega^2};$$

$$\alpha_0 = \frac{\hbar\omega Wn}{J} = \frac{4\pi k|\langle j_2||d||j_1\rangle|^2 n}{3(2j_1 + 1)\hbar\Gamma} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{2j_2 + 1}{2j_1 + 1} \frac{A}{\gamma} \lambda^2 n. \quad (\text{П14})$$

Поскольку мощность убывает пропорционально  $\exp(-\alpha z)$ , то  $\alpha$  – коэффициент поглощения по мощности на единицу длины.

### 6.5. Двухфотонное поглощение

Найдем вероятность перехода (П11), когда частота монохроматического поля  $\omega$  близка к  $\omega_{21}/2$ . Для нахождения  $\rho(2, r)$  надо последовательно решать уравнения

$$\dot{\rho}(2, r) + i\omega_{2r}\rho(2, r) = R(21r)\rho(2, 1),$$

$$\dot{\rho}(2, 1) + (i\omega_{21} + \Gamma)\rho(2, 1) = \sum_r \Phi(2r1)\rho(r, 1),$$

$$\dot{\rho}(r, 1) + i\omega_{r1}\rho(r, 1) = \Phi(r11)\rho^{(0)}(1, 1).$$

Если решение искать в виде

$$\rho(2, r) = \rho^-(2, r) \exp(-i\omega t),$$

$$\rho(2, 1) = \rho^-(2, 1) \exp(-2i\omega t),$$

$$\rho(r, 1) = \rho^+(r, 1) \exp(i\omega t),$$

то в стационарном случае имеем

$$i(\omega_{2r} - \omega)\rho^-(2, r) = R^+(21r)\rho^-(2, 1),$$

$$[i(\omega_{21} - 2\omega) + \Gamma]\rho^-(2, 1) = \sum_r \Phi^-(2r1)\rho^+(r, 1),$$

$$i(\omega_{r1} - \omega)\rho^+(r, 1) = \Phi^-(r11)\rho^{(0)}(1, 1).$$

В первом и третьем уравнениях положим  $\omega = \omega_{21}/2$ . Вероятность перехода с уровня 1 на уровень 2 из (П11)

$$W(1 \rightarrow 2) = 2(2j_2 + 1)^{1/2} \text{Re} \left\{ \sum_r R_{00,1q}^+ (2r2)\rho_{1q}^-(2, r) \right\}.$$

Выполнив необходимые подстановки и преобразования, получим

$$W(1 \rightarrow 2) = W \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (2\omega - \omega_{21})^2},$$

$$W = \frac{2|E|^4}{\Gamma(2j_1 + 1)\hbar^4} \sum_{\chi=0,2} (2\chi + 1) F_{\chi}$$

$$\times \left| \sum_r \frac{\langle j_2||d||j_r\rangle \langle j_r||d||j_1\rangle}{\omega_{21}/2 - \omega_{2r}} \begin{Bmatrix} \chi & 1 & 1 \\ j_r & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} \right|^2, \quad (\text{П15})$$

где

$$F_{\chi} = \sum_q f_{\chi q} f_{\chi q}^*,$$

$$f_{\chi q} = \sum_v \begin{pmatrix} \chi & 1 & 1 \\ -q & q-v & v \end{pmatrix} a^{q-v} a^v.$$

В дальнейшем нижний уровень 1 будем обозначать индексом  $m$ , а верхний уровень 2 – индексом  $n$ . Перепишем (П15) в более удобном виде, учитывая, что  $\Gamma = 2\pi\gamma$  ( $\Gamma$  – ширина линии в Гц при изменении  $\omega$ ),

$$W = \frac{1}{\pi(2j_m + 1)} \frac{I^2}{\gamma} \sum_{\chi=0,2} (2\chi + 1) F_{\chi} |D_{\chi}(n, m)|^2, \quad (\text{П16})$$

где  $I = |E|^2 a_0^3/\hbar = 2\pi J a_0^3/(\hbar c)$  (в  $\text{с}^{-1}$ ) – параметр, пропорциональный интенсивности поля;  $a_0 = \hbar^2/me^2 = 5.29 \times 10^{-9}$  – атомная единица длины (боровский радиус); параметр

$$D_{\chi}(n, m) = \sum_k \frac{\langle n, j_n||d||k, j_k\rangle \langle k, j_k||d||m, j_m\rangle}{\omega_{nm}/2 - \omega_{nk}} \begin{Bmatrix} \chi & 1 & 1 \\ j_n & j_1 & j_2 \end{Bmatrix} \quad (\text{П17})$$

является безразмерным, т. к.  $d$  и  $\omega_{nk}$  выражены в атомных единицах, знак суммы означает суммирование по дискретному спектру и интегрирование – по непрерывному.

В случае  $j_m = 0, j_n = 0$  ( $S - S$ -переходы)

$$W = \frac{1}{3\pi} \frac{I^2}{\gamma} F_0 B(n, m), \quad (\text{П18})$$

$$B(n, m) = \left| \sum_k \frac{\langle n, 0||d||k, 1\rangle \langle k, 1||d||m, 0\rangle}{\omega_{nm}/2 - \omega_{nk}} \right|^2.$$

Для перехода  $1S - 2S$  атома водорода ( $n = 1, m = 2$ )

$$B(2, 1) = 2 \left( \sum_{k=2}^{\infty} \frac{R_{20}^{k1} R_{10}^{k1}}{5/8 - 1/k^2} \right)^2 = 44.4, \quad (\text{П19})$$

$R_{20}^{k1}$  и  $R_{10}^{k1}$  приведены в [18] (с. 412).

В случае  $j_m = 2, j_n = 0$  ( $S - D$ -переходы)

$$W = \frac{1}{3\pi} \frac{I^2}{\gamma} F_2 C(n, m), \quad (\text{П20})$$

$$C(n, m) = \left| \sum_k \frac{\langle n, 2 || d || k, 1 \rangle \langle k, 1 || d || m, 0 \rangle}{\omega_{nm}/2 - \omega_{nk}} \right|^2.$$

Множители  $F_\chi$  в (П15) описывают зависимость вероятности двухфотонного поглощения от поляризации излучения. Используя (П10), перепишем их в виде

$$F_0 = \frac{4}{3} \frac{(1 - \eta^2)^2}{(1 + \eta^2)^2},$$

$$F_2 = \frac{1}{5} \frac{1}{(1 + \eta^2)^2} \left[ (1 + \eta)^4 + (1 - \eta)^4 + \frac{2}{3} (1 - \eta^2)^2 \right].$$

Напомним, что  $\eta$  – отношение малой оси эллипса поляризации к большой. Для линейной поляризации ( $\eta = 0$ )  $F_0 = 4/3$ ,  $F_2 = 2/15$ , для круговой ( $\eta = 1$ )  $F_0 = 0$ ,  $F_2 = 4/5$ . Причина того, что  $F_0 = 0$ , следующая. При поглощении двух фотонов с одной и той же круговой поляризацией проекция момента атома должна меняться на 2, что для перехода  $S - S$  невозможно.

## 7. Литература

- Летохов В.С., Чеботаев В.П. *Нелинейная лазерная спектроскопия сверхвысокого разрешения* (М.: Наука, 1990).
- Demtröder W. *Laser Spectroscopy* (Berlin: Springer, 1996).
- Багаев С.Н., Чеботаев В.П. *УФН*, **148**, 143 (1986).
- Basov N.G., Gubin M.A. *IEEE J. Sel. Topics in Quantum Electron.*, **6**, 857 (2000).
- Hall J.L., Ye J., Diddams S.A., Ma L.-S., Cundiff S.T., Jones D.J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **37**, 1482 (2001).
- Holzwarth R., Reichert J., Udem Th., Hänsch T.W. *Laser Phys.*, **11**, 1100 (2001).
- Бакланов Е.В., Покасов П.В. *Квантовая электроника*, **33**, 383 (2003).
- Hall J.L., Jun Ye. *Opt. Photon. News*, February, 45 (2001).
- Udem Th., Holzwarth R., Hänsch T.W. *Nature*, **416**, 233 (2002).
- Hollberg L., Oates C.W., Curtis E.A., Ivanov E.N., Diddams S.A., Udem Th., Robinson N.G., Bergquist J.C., Rafac R.J., Itano W.M., Drullinger R.E., Wineland D.J. *IEEE J. Quantum Electron.*, **37**, 1052 (2001).
- Holzwarth R., Zimmermann M., Udem Th., Hansch T.W. *IEEE J. Quantum Electron.*, **37**, 1493 (2001).
- Diddams S.A., Udem Th., Bergquist J.C., Curtis E.A., Drullinger R.E., Hollberg L., Itano W.M., Lee W.D., Oates C.W., Vogel K.R., Wineland D.J. *Science*, **293**, 825 (2001).
- Варшавович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. *Квантовая теория углового момента* (Л.: Наука, 1975).
- Берестецкий В.Б., Лифшиц У.М., Питаевский Л.П. *Квантовая электродинамика* (М.: Наука, 1989).
- Дьяконов М.И., Перель В.И. *Оптика и спектроскопия*, **20**, 472 (1966).
- Дьяконов М.И., Перель В.И. *ЖЭТФ*, **50**, 448 (1966).
- Sobelman I.I. *Atomic Spectra and Radiative Transitions* (Berlin: Springer, 1992).
- Бете Г., Солпитер Э. *Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами* (М.: ГИФМЛ, 1960).
- Ландау Л.Д., Лифшиц У.М. *Квантовая механика* (М.: Наука, 1989).
- Василенко Л.С., Чеботаев В.П., Шишаев А.В. *Письма в ЖЭТФ*, **12**, 161 (1970).
- Foot C.J., Couillaud V., Beausoleil R.C., Hansch T.W. *Phys. Rev. Lett.*, **54**, 1913 (1985).
- Cagnac V., Grynberg G., Biraben F. *J. Phys. France*, **34**, 845 (1973).
- Garreau J.C., Allegrini M., Julien L., Biraben F. *J. Phys. France*, **51**, 2275 (1990).
- Бакланов Е.В., Чеботаев В.П. *Квантовая электроника*, **4**, 2189 (1977).
- Бакланов Е.В., Дмитриев А.К. *Квантовая электроника*, **29**, 35 (1999).
- De Beauvoir B., Schwob C., Acef O., Jozefowski L., Hilico L., Nez F., Juilien L., Clairon A., Biraben F. *Eur. Phys. J. D*, **12**, 61 (2000).
- Бакланов Е.В., Дубецкий Б.Я., Улыбин В.А. *Квантовая электроника*, **7**, 1737 (1980).
- Biraben F., Bassini M., Cagnac B. *J. Phys. France*, **40**, 445 (1979).
- Бакланов Е.В., Чеботаев В.П. *Квантовая электроника*, **2**, 606 (1975).
- Бакланов Е.В., Дубецкий Б.Я. *Квантовая электроника*, **5**, 99 (1978).
- Biraben F., Hänsch T.W., Fischer M., Niering M., Holzwarth R., Reichert J., Udem Th., Weitz M., de Beauvoir B., Schwob C., Jozefowski L., Hilico L., Nez F., Julien L., Acef O., Zondy J.-J., Clairon A., in: *The Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic Systems*. Ed. by S.Karsheroim et al. (Berlin: Springer Verlag, 2001, p. 17).
- Willmann L., Kleppner D., in: *The Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic Systems*. Ed. by S.Karsheroim et al. (Berlin: Springer Verlag, 2001, p. 42).
- Sapirstein J.R., Yennie D.R., in: *Quantum Electrodynamics*. Ed. by T.Kinoshita (Singapore: World Scientific, 1990).
- Mohr P.J., Taylor B.N. *Rev. Mod. Phys.*, **72**, 351 (2000).
- Pachucki K., Leibfried D., Weitz M., Huber A., König W., Hansch T.W. *J. Phys. B*, **29**, 177 (1996).
- Baklanov E.V., Chebotayev V.P. *Opt. Commun.*, **12**, 312 (1974); Бакланов Е.В., Чеботаев В.П. *Оптика и спектроскопия*, **38**, 384 (1975).
- Reichert J., Niering M., Holzwarth R., Weitz M., Udem Th., Hänsch T.W. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 3232 (2000).
- Niering M., Holzwarth R., Reichert J., Pokasov P., Udem Th., Weitz M., Hänsch T.W., Lemonde P., Santarelli G., Abgrall M., Laurent P., Salomon C., Clairon A. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 5496 (2000).
- Huber A., Gross B., Weitz M., Hänsch T.W. *Phys. Rev. A*, **59**, 1844 (1999).
- Santarelli G., Laurent Ph., Lemonde P., Clairon A., Mann A.G., Chang S., Lutien A.N., Salomon C. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4619 (1999).
- Garreau J.C., Allegrini M., Julien L., Biraben F. *J. Phys. France*, **51**, 2263 (1990).
- Garreau J.C., Allegrini M., Julien L., Biraben F. *J. Phys. France*, **51**, 2293 (1990).
- Schwob C., Jozefowski L., de Beauvoir B., Hilico L., Nez F., Julien L., Biraben F., Acef O., Clairon A. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 4960 (1999).
- Бакланов Е.В., Чеботаев В.П. *Квантовая электроника*, **4**, 2189 (1977); Baklanov E.V., Chebotayev V.P. *Appl. Phys.*, **12**, 97 (1977).
- Бакланов Е.В., Чеботаев В.П. *УФН*, **122**, 513 (1977).
- Lamb W.E., Retherford R.C. *Phys. Rev.*, **72**, 241 (1947).
- Lundeen S.R., Pipkin F.M. *Phys. Rev. Lett.*, **46**, 232 (1981).
- Hagley E.W., Pipkin F.M. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1172 (1994).
- Jentschura U., Pachucki K. *Phys. Rev. A*, **54**, 1853 (1996).
- Van Wijngaarden A., Holuj F., Drake G.F.W. *Can. J. Phys.*, **76**, 95 (1998).
- Pal'chikov V.G., Sokolov Y.L., Yakovlev V.P. *Metrologia*, **1**, 99 (1985); *Phys. Scripta*, **55**, 33 (1997).
- Karsheroim S.G. *J. Phys. B*, **29**, L29 (1996); *Z. Phys. D*, **39**, 109 (1997).
- Bourzeix S., de Beauvoir B., Nez F., Plimmer M.D., de Tomasi F., Julien L., Biraben F., Stacey D.N. *Phys. Rev. Lett.*, **76**, 384 (1996).
- Weitz M., Huber A., Schmidt-Kaler F., Leibfried D., Hansch T.W. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 328 (1994).
- Berkeland D.J., Hinds E.A., Boshier M.G. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 2470 (1995).
- Farnham D.L., van Dyck R.S. Jr., Schwinberg P.B. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3598 (1995).
- Mohr P.J., Taylor B.N., in: *The Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic Systems*. Ed. by S.Karsheroim et al. (Berlin: Springer Verlag, 2001, p. 145).
- Sick I., Trautmann D. *Phys. Lett. B*, **375**, 16 (1996).
- Huber A., Udem Th., Gross B., Reichert J., Kourog M., Pachucki K., Weitz M., Hänsch T.W. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 468 (1998).
- Buchmann A.J., Henning H., Sauer P.U. *Few-Body Systems*, **21**, 149 (1996).
- Setija I.D., Werij H.G.C., Luiten O.J., Reynolds M.W., Hijmans T.M., Walraven J.T.M. *Phys. Rev. Lett.*, **70**, 2257 (1993).
- Killian T.C., Fried D.G., Willmann L., Landhuis D., Moss S.C.,



- Greytak T.J., Kleppner D. *Phys. Rev.*, **81**, 3807 (1998).
63. Jamieson M., Dalgarno A., Doyle J.M. *Mol. Phys.*, **87**, 817 (1996).
64. Anderson M.H., Ensher J.R., Matthews M.R., Wieman C.E., Cornell E.A. *Science*, **269**, 198 (1995); Davis K.B., Mewes M.-O., Andrews M.R., van Druten N.J., Durfee D.S., Kurn D.M., Ketterle W. *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 3969 (1995); Bradley C.C., Sackett C.A., Hulet R.G. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 985 (1997).
65. Корнелл Э.А., Виман К.Э. *УФН*, **173**, 1320 (2003); Кеттерле В. *УФН*, **173**, 1339 (2003).
66. Fried D.G., Killian T.C., Willmann L., Landhuis D., Moss S.C., Kleppner D., Greytak T.J. *Phys. Rev. Lett.*, **81**, 3811 (1998).
67. Drake G.W.F., in: *The Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic Systems*. Ed. by S.Karsherboim et al. (Berlin: Springer Verlag, 2001, p. 57).
68. Drake G.W.F., Martin W.C. *Can. J. Phys.*, **76**, 679 (1998).
69. Herzberg G. *Proc. Roy. Soc. A*, **248**, 309 (1958).
70. Pekeris C.L. *Phys. Rev.*, **112**, 1649 (1958).
71. Jamroz W., Stoicheff B.P., in: *Progress in Optics*. Ed. by E.Wolf (Amsterdam: North-Holland, 1983, v. 20, p. 327).
72. Hilber G., Lago A., Wallenstein R. *J. Opt. Soc. Am. B*, **4**, 1753 (1987).
73. Cromwell E., Trickl T., Lee Y.T., Kung A.H. *Rev. Sci. Instrum.*, **60**, 2888 (1989).
74. Eikema K.S., Ubachs W., Vassen W., Hogervorst W. *Phys. Rev. A*, **55**, 1866 (1997).
75. Bergeson S.D., Balakrishnan A., Baldwin K.G.H., Lucatorto T.B., Marangos J.P., McIlrath T.J., O'Brian T.R., Rolston S.L., Sansonetti C.J., Wen J., Westbrook N. *Phys. Rev. Lett.*, **80**, 3475 (1998).
76. Sansonetti C.J., Gillaspay J.D. *Phys. Rev. A*, **45**, R1 (1992).
77. Lichten W., Shiner D., Zhou Z.X. *Phys. Rev. A*, **43**, 1663 (1991).
78. Robert A., Sirjean O., Browaeys A., Poupard J., Nowak S., Boiron D., Westbrook C.I., Aspect A. *Science*, **292**, 461 (2001).
79. Pereira Dos Santos F., Leonard J., Wang J., Barrelet C. J., Perales F., Rasel E., Unnikrishnan C.S., Leduc M., Cohen-Tannoudji C. *Phys. Rev. Lett.*, **86**, 3459 (2001).
80. Herschbach N., Tol P., Tychkov A., Hogervorst W., Vassen W. *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.*, **5**, S65 (2003).
81. Pavone P.S., Marin F., De Natale P., Inguscio M., Biraben F. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 42 (1994).
82. Marin F., Minardi F., Pavone F.S., Inguscio M., Drake G.W.F. *Z. Phys. D*, **32**, 285 (1995).
83. Dorrer C., Nez F., de Beauvoir B., Julien L., Biraben F. *Phys. Rev. Lett.*, **78**, 3658 (1997).
84. Hagley E.W., Pipkin F.M. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1172 (1994); Lundeen S.R., Pipkin F.M. *Metrologia*, **22**, 9 (1986).
85. Minardi F., Bianchini G., Paster P.C., Giusfredi G., Pavone F.S., Inguscio M. *Phys. Rev. Lett.*, **82**, 1112 (1999).
86. Storry C.H., Hessels E.A. *Phys. Rev. A*, **58**, R8 (1998).
87. Storry C.H., George M.C., Hessels E.A. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 3274 (2000).
88. Shiner D., Dixon R., Zhao P. *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 1802 (1994); Shiner D., Dixon R. *IEEE Trans.*, **44**, 518 (1995).
89. Castilega J., Livingston D., Sanders A., Shiner D. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 4321 (2000).
90. Zhang T., Drake G.W.F. *Phys. Rev. A*, **54**, 4882 (1996).
91. Kinoshita T. *IEEE Trans.*, **46**, 108 (1997).
92. Baklanov E.V., Denisov A.V. *Laser Phys.*, **8**, 567 (1998).
93. Lin C.D., Johnson W.R., Dalgarno A. *Phys. Rev. A*, **15**, 154 (1977).
94. Бакланов Е.В., Денисов А.В. *Квантовая электроника*, **24**, 475 (1997).
95. Исаев А.А., Ищенко П.И., Петраш Г.Г. *Письма в ЖЭТФ*, **6**, 619 (1967).
96. Baklanov E.V., Denisov A.V. *Laser Phys.*, **9**, 259 (1999).
97. Baklanov E.V., Krivitskii A.G., Pokasov P.V., Tykilin V.A. *Laser Phys.*, **13**, 1357 (2003).
98. *The Hydrogen Atom: Precision Physics of Simple Atomic Systems*. Ed. by S.Karsherboim et al. (Berlin: Springer Verlag, 2001).
99. *Can. J. Phys.*, **80** (11) (2002).
100. <http://omnis.if.ufrj.br/~lenz/hydrogen3.html>