

Особенности эволюции импульса-предвестника при формировании квазирезонансных импульсов самоиндуцированной прозрачности

А.Е.Дмитриев, О.М.Паршков

Представлены результаты численного моделирования эволюции импульса-предвестника, существующего на стадии преобразования квазирезонансного входного импульса в 2π -импульс, рассматриваемый в теории самоиндуцированной прозрачности. Расчёты показали увеличение эффективности образования импульса-предвестника при уменьшении длительности и приближении к π площади входного лазерного импульса. Приведены также результаты численного анализа известных экспериментов по наблюдению импульса-предвестника в кристаллах рубина. В одном из рассмотренных случаев результаты расчета ставят под сомнение ранее принятую интерпретацию эксперимента.

Ключевые слова: самоиндуцированная прозрачность, квазирезонанс, импульс-предвестник, частотная модуляция.

1. Введение

Самоиндуцированная прозрачность (СИП) [1] является важным примером когерентного взаимодействия лазерного излучения с резонансной средой. Изучение СИП ввело в оптику понятие 2π -импульса и такие теоретические подходы, как метод преобразования Бэклунда [2] и обратная задача рассеяния [3]. Подтверждённая в экспериментах наносекундного диапазона [4, 5], теория СИП является важной ступенью к пониманию резонансных процессов в области фемтосекундных лазерных импульсов [6].

Следует отметить, что детали переходного процесса, в котором входной сигнал преобразуется в оптические солитоны, не поддаются аналитическому описанию и изучены сравнительно мало. Цель представленной статьи заключается в численном моделировании эволюции особого импульса, существующего именно на стадии указанного переходного процесса. Мы имеем в виду импульс-предвестник (ИП), обнаруженный авторами работ [7, 8] как при численном моделировании, так и в эксперименте. Однако в расчётах [7, 8] выбирались завышенные по сравнению с экспериментальными отношения ширины спектров входного импульса и квантового перехода. Это, как отмечено в [8], объяснялось ограничениями вычислительных возможностей. По нашим оценкам (см. ниже) указанное завышение являлось 40–80-кратным. В настоящей работе приведены результаты, относящиеся к общим свойствам ИП. Кроме того, представлены итоги численного моделирования некоторых экспериментов, описанных в разд. IV работы [8]. В одном случае наши результаты ставят под сомнение интерпретацию эксперимента, данную в [8], в связи с чем предлагается альтернативная интерпретация экспериментальных кривых.

Отметим, что представленная работа является продолжением исследований свойств ИП, начатых в [9].

2. Постановка краевой задачи

Резонансная среда моделируется ансамблем двухуровневых квантовых объектов с простыми уровнями, нумеруемыми в порядке роста энергии цифрами 1 и 2. Предположим, что гауссов контур разброса частот ω_{21} квантового перехода около центральной частоты ω_{21}^0 имеет полуширину T^{-1} по уровню e^{-1} от максимальной высоты.

Определим $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ как правый ортонормированный базис лабораторной системы координат xyz и введём обозначение $p = |p_{x12} - ip_{y12}|/\sqrt{2}$, где p_{x12} и p_{y12} – x - и y -компоненты вектора электродипольного момента перехода 1–2. Напряжённость электрического поля поляризованного по кругу лазерного излучения, распространяющегося вдоль оси z , представим в виде

$$\mathbf{E} = \mu(\mathbf{i} + i\mathbf{j})a(z, t) \exp[i\omega(z\eta c^{-1} - t)] + \text{компл. сопр.} \quad (1)$$

Здесь $a(z, t)$ и ω – безразмерная комплексная огибающая и несущая частота светового импульса; η – линейный показатель преломления среды, в которую внедрены квантовые объекты; $\mu = 3\hbar/[2^{3/2}T(\eta^2 + 2)p]$. Введём безразмерные независимые переменные

$$s = \alpha Tz, \quad w = \frac{t - z\eta/c}{T},$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi\omega p^2(\eta^2 + 2)^2 N}{9c\hbar\eta};$$

N – концентрация резонансных объектов. В первом приближении метода медленных огибающих [10, 11] с учетом различия между локальным и макроскопическим полями [12] получаем самосогласованную систему уравнений, описывающую взаимодействие импульса со средой:

А.Е.Дмитриев, О.М.Паршков. Саратовский государственный технический университет, Россия, 410054 Саратов, ул. Политехническая, 77; e-mail: tech@mail.saratov.ru; http://www.sstu.runnet.ru

Поступила в редакцию 11 ноября 2003 г., после доработки – 19 апреля 2004 г.

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{21} \exp[-(\varepsilon - \varepsilon_0)^2] d\varepsilon,$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial w} + i\varepsilon \sigma_{21} = ia(\sigma_{11} - \sigma_{22}), \tag{2}$$

$$\frac{\partial(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{\partial w} = \text{Im}(a\sigma_{21}^*),$$

где $\sigma_{ik}(i, k = 1, 2)$ – амплитуды элементов матрицы плотности; $\varepsilon = T(\omega_{21} - \omega)$; $\varepsilon_0 = T(\omega_{21}^0 - \omega)$. Отметим, что параметр ε_0 является мерой нерезонансности входного лазерного импульса.

Система (2) дополнялась граничным условием

$$a(s = 0, w) = a_0(w), \quad w \geq 0, \tag{3}$$

описывающим лазерный импульс на входе ($s = 0$) в резонансную среду, и начальными условиями

$$\sigma_{11}(s, w = 0) = 1, \tag{4}$$

$$\sigma_{12}(s, w = 0) = \sigma_{22}(s, w = 0) = 0, \quad s \geq 0.$$

Краевая задача (2)–(4) решалась численно с помощью программы, использованной в работах [9, 13] и показавшей хорошее согласие полученных результатов с аналитическими выводами теории СИП [1] и нестационарного двойного резонанса [14]. Для контроля точности вычислений использовались правило Рунге и проверка условия нормировки $\sigma_{11} + \sigma_{22} = 1$. О дополнительных гарантиях надёжности расчетов, опирающихся на сравнение их результатов с аналитическими выводами теории СИП, будет сказано ниже.

3. Способы представления результатов вычислений

Для представления результатов расчёта используются графики функций $A_s(w)$, $\varphi_s(w)$, где $A_s(w) = |a(w, s = \text{const})|$ – действительная огибающая, а $\varphi_s(w) = \arg a(w, s = \text{const})$ – фазовая добавка импульса на фиксированном расстоянии s . Безразмерная длительность импульса τ определяется как расстояние по оси w между точками, в которых $A_s(w) = 0.5A_{sm}$, где A_{sm} – максимальное значение функции $A_s(w)$. Площадь импульса при фиксированном значении s есть

$$\Theta(s) = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(w)dw, \tag{5}$$

так что $\Theta(0)$ является площадью входного лазерного импульса. В качестве меры смещения мгновенной частоты $\tilde{\omega}$ светового импульса от частоты ω_{21}^0 используется безразмерная величина $\Delta = T(\tilde{\omega} - \omega_{21}^0)$. Из (1) вытекает, что $\Delta = -\partial\varphi_s/\partial w - \varepsilon_0$.

Для идентификации 2π-импульсов в результатах расчётов использовался известный из теории СИП [1] факт, что в случае 2π-импульса имеют место соотношения

$$A_{sm} = \frac{2}{\tau_p}, \quad v = \sqrt{\pi} \left\{ \tau_p^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-(\varepsilon - \varepsilon_0)^2]}{1 + \tau_p^2 \varepsilon^2} d\varepsilon \right\}^{-1},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\tau_p^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon \exp[-(\varepsilon - \varepsilon_0)^2]}{1 + \tau_p^2 \varepsilon^2} d\varepsilon, \tag{6}$$

где τ_p , v , φ – длительность, скорость и фазовая добавка 2π-импульса в системе отсчета s, w . Формулы (6) использовались для идентификации 2π-импульса среди прочих импульсов, появляющихся в ходе численного моделирования. Если при подстановке в (6) рассчитанных значений $A_{sm}, v, \tau_p, \partial\varphi/\partial s$ для некоторого импульса равенства выполнялись с относительной погрешностью менее 2%, то импульс считался 2π-импульсом. Отметим, что нахождение таким способом 2π-импульса является важным доводом в пользу достоверности расчёта в целом.

4. Основные свойства импульса-предвестника

Положим в (3)

$$a_0(w) = \frac{r\Theta(0)}{\tau} \left[\exp\left(q\frac{w-w_0}{\tau}\right) + \exp\left(-3q\frac{w-w_0}{\tau}\right) \right]^{-1}, \tag{7}$$

где $r = 1.4332$; $q = 1.5919$; $w_0 \gg \tau$. Огибающая (7) описывает импульс без частотной модуляции, крутизна переднего фронта которого превышает крутизну заднего. Напомним, что 2π-импульс формируется только при условии $\Theta(0) > \pi$.

На рис.1 представлены результаты расчета при $\Theta(0) = 1.1\pi$, $\tau = 8.0$, $\varepsilon_0 = -2.1$, $w_0 = 40$ для расстояний $s = 180$ и 360. Указанные значения параметров $\Theta(0)$ и ε_0 примерно те же (подробнее см. в [9]), что и в некоторых экспериментах по изучению СИП в парах рубидия [15], тогда как выбранные значения s больше, а значение τ меньше требуемых для описания этих экспериментов. На рис.1 цифрой 1 помечен ИП, а цифрой 2 – 2π-импульс. В отличие от 2π-импульса ИП частотно модулирован, о чём свидетельствует поведение функции $\varphi_s(w)$. (Отметим, что на участке ИП в зависимости $\varphi_s(w)$ приводится главное значение фазы, с чем связаны скачки при достижении фазой границ интервала $[-\pi, \pi]$.) В области ИП величина $\Delta = 2.6$, и это означает, что мгновенная частота ИП больше удалена от центральной частоты квантового перехода, чем несущая частота входного импульса. Данное обстоятельство ранее было обнаружено в [7].

Расчёт показал, что с ростом s длительность ИП увеличивается, а его пиковое значение уменьшается так, что площадь импульса (5) уменьшается приблизительно по закону

$$\Theta(s) = \Theta(s_0) \exp[-\sqrt{\pi}(s - s_0) \exp(-\Delta^2)] \quad (s > s_0), \tag{8}$$

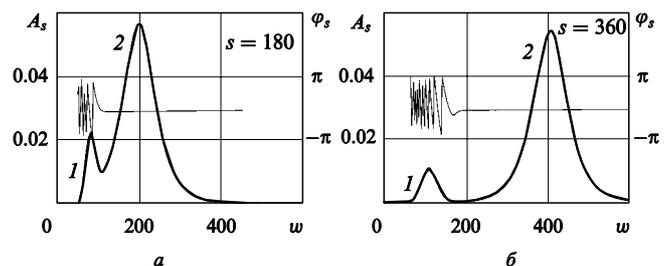


Рис.1. Действительные огибающие A_s (толстые линии) и фазовые добавки φ_s (тонкие линии) для $s = 180$ (а) и 360 (б) при $\Theta(0) = 1.1\pi$, $\tau = 8.0$, $\varepsilon_0 = -2.1$ и $w_0 = 40$; здесь и на остальных рисунках 1 – ИП, 2 – 2π-импульс.

где s_0 – расстояние, на котором ИП хорошо отделён от 2π -импульса; A также равно 2.6. Отметим, что формула (8) составляет суть теоремы площадей для слабых сигналов [5, 16].

Для изучения влияния длительности входного импульса на процесс формирования ИП был проведён расчёт при прежних значениях $\Theta(0)$ и ε_0 , но при $\tau = 1.6$ и $\omega_0 = 20$. Результаты расчёта для $s = 180$ представлены на рис.2. Сравнение с рис.1,а показывает, что сокращение длительности входного импульса приводит к увеличению доли энергии излучения, сосредоточенной в ИП.

Для изучения влияния на ИП степени нерезонансности входного импульса расчёт был проведён при тех же значениях $\Theta(0)$, τ и ω_0 , которые использовались для построения рис.1, но при $\varepsilon_0 = -0.5$. На рис.3 показаны результаты этого расчёта для $s = 6$. Расстояние $s = 6$ при $\varepsilon_0 = -0.5$ и расстояние $s = 360$ при $\varepsilon_0 = -2.1$ соответствуют одинаковому числу (примерно 16) длин поглощения слабого сигнала. Известно [15], что степень завершенности процесса формирования 2π -импульса при прочих равных условиях определяется именно этим числом. Поэтому зависимость $A_s(\omega)$ на рис.3 следует сравнивать с аналогичной зависимостью на рис.1,б, и это сравнение показывает, что с уменьшением $|\varepsilon_0|$ существенно уменьшается ИП.

Для изучения влияния на ИП площади входного импульса расчёт проводился при $\Theta(0) = 1.6\pi$ и тех же значениях ε_0 , τ и ω_0 , что и на рис.1. Результаты этого расчёта для $s = 360$ представлены на рис.4. Сравнение с рис.1,б показывает, что увеличение $\Theta(0)$ приводит к уменьшению относительной величины ИП по сравнению с 2π -импульсом.

Сделанные в этом разделе статьи выводы о зависимости эффективности образования ИП от характеристик входного импульса основаны на малом количестве расчетов и потому носят частный характер. В связи с этим отметим, что вывод авторов [7], основанный на расчетах в области меньших значений τ ($\tau \leq 2$), противоположен нашему выводу о зависимости величины ИП от степени нерезонансности ε_0 .

5. Импульс-предвестник в рубине

Приведём результаты некоторых экспериментов, описанных в работе [8]. В качестве резонансного пере-

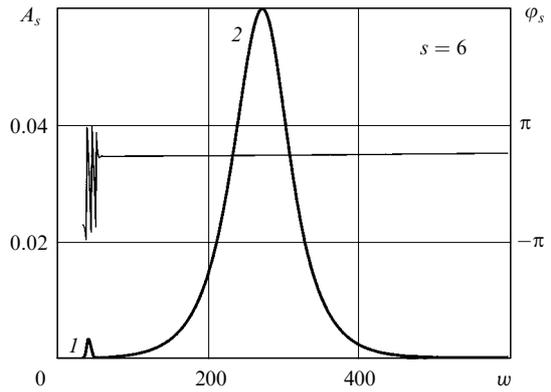


Рис.3. Действительная огибающая A_s (толстая линия) и фазовая добавка φ_s (тонкая линия) для $s = 6$ при $\Theta(0) = 1.1\pi$, $\tau = 8.0$, $\varepsilon_0 = -0.5$ и $\omega_0 = 40$.

хода авторы [8] использовали переход $A(\pm \frac{1}{2}) - E(\pm \frac{1}{2})$ иона Cr^{3+} в рубине. Ограничимся двумя случаями, рассмотренными в разд. IV работы [8]. Первый из них (далее эксперимент 1) – это наблюдение ИП в рубиновом стержне длиной 2 см при отстройке от резонанса 0.08 см^{-1} , второй (далее эксперимент 2) – подобный эксперимент с рубиновым стержнем длиной 10 см при отстройке 0.19 см^{-1} .

В обоих случаях длительность входного импульса была равна примерно 3 нс, а площадь $\Theta(0)$ составляла от π до 3π . В [8] отмечалось, что длина рубинового стержня в эксперименте 1 соответствовала примерно 3.5 длинам поглощения слабого сигнала на лазерной частоте, а для эксперимента 2 число таких длин равнялось примерно 4.5. Если предположить, что оптические свойства обеих стержней идентичны, то исходя из приведенных данных можно получить $T = 3.6 \times 10^{-11} \text{ с}$, что хорошо согласуется с результатами работы [17]. Тогда для эксперимента 1 параметр $\varepsilon_0 = 0.54$, а величина s в силу неточности оценки длины поглощения может быть оценена как 1.5–2.5; для эксперимента 2 параметр $\varepsilon_0 = 1.29$, $s = 6.5$ –7.5, и в обоих случаях τ равно примерно 80. Отметим, что в работе [8] использовалась более грубая оценка T ($\sim 10^{-10}$).

На рис.5 представлены результаты расчёта, соответствующие эксперименту 2, при $\Theta(0) = 1.5\pi$ и $s = 6.6$. ИП на рис. 5 выглядит как «наплыв» на переднем фронте 2π -импульса, причём, как показал расчёт, в районе ИП час-

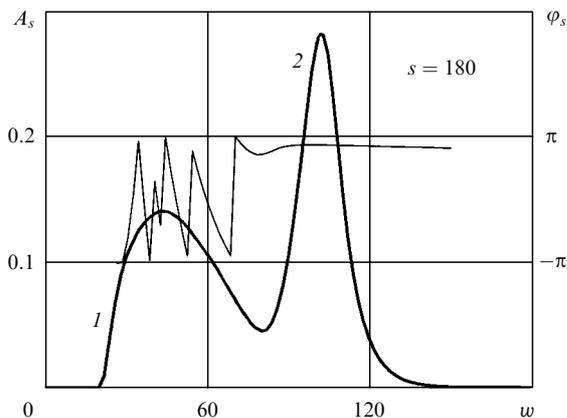


Рис.2. Действительная огибающая A_s (толстая линия) и фазовая добавка φ_s (тонкая линия) для $s = 180$ при $\Theta(0) = 1.1\pi$, $\tau = 1.6$, $\varepsilon_0 = -2.1$ и $\omega_0 = 20$.

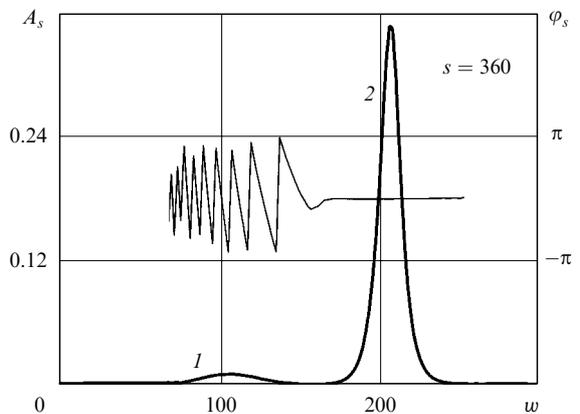


Рис.4. Действительная огибающая A_s (толстая линия) и фазовая добавка φ_s (тонкая линия) для $s = 360$ при $\Theta(0) = 1.6\pi$, $\tau = 8.0$, $\varepsilon_0 = -2.1$ и $\omega_0 = 40$.

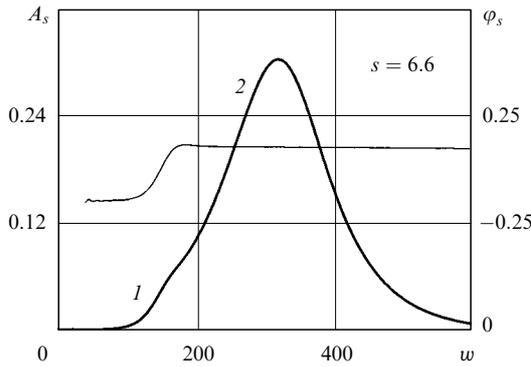


Рис.5. Действительная огибающая A_s (толстая линия) и фазовая добавка φ_s (тонкая линия) для $s = 6.6$ при $\Theta(0) = 1.5\pi$, $\tau = 80$, $\varepsilon_0 = 1.29$ и $w_0 = 150$.

тота смещена на 27 МГц от частоты входного сигнала в сторону удаления от резонанса. В общем же согласно критерию, основанному на равенствах (6), импульс на рис.5 близок к 2π -импульсу. Длительность этого импульса по полувысоте составляет 6.2 нс, а временная задержка относительно сигнала, распространяющегося со скоростью c/η , равна 5.5 нс. Импульс-предвестник на осциллограмме, соответствующей эксперименту 2 (см рис.8 из работы [8]), похож на рассчитанный нами ИП, хотя выржен более отчётливо (возможно, потому, что налагается на задний фронт опорного импульса). Как видно из осциллограммы, длительность 2π -импульса близка к 5 нс, а задержка составляет 5–6 нс. Таким образом, имеется удовлетворительное согласие результатов расчета и эксперимента (смещение частоты в [8] не измерялось).

На рис.6 приведены результаты расчёта, соответствующего эксперименту 1, при $\Theta(0) = 1.4\pi$ и $s = 1.8$. Как и в предыдущем случае, ИП представляет собой небольшой «наплыв» на переднем фронте 2π -импульса. Согласно расчёту задержка максимума 2π -импульса равна приблизительно 7 нс, что с точностью 1–2 нс согласуется с задержкой второго импульса, прошедшего через рубиновый стержень (см. две нижних осциллограммы на рис. 7 из работы [8]). Этот импульс авторы [8] считают 2π -импульсом. Первый прошедший через образец импульс, который авторы [8] считают ИП, как видно из осциллограмм, почти равен по высоте 2π -импульсу и хорошо от отделён. Таким образом, численное моделирование не дало удовлетворительного описания первого прошедшего через образец импульса.

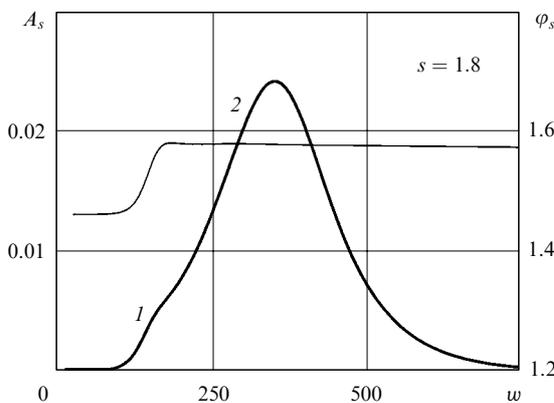


Рис.6. Действительная огибающая A_s (толстая линия) и фазовая добавка φ_s (тонкая линия) для $s = 1.8$ при $\Theta(0) = 1.4\pi$, $\tau = 80$, $\varepsilon_0 = 0.54$ и $w_0 = 150$.

Авторы [8] не приводят точных значений $\Theta(0)$ для рассматриваемых нами экспериментов. Расчёты показывают, что эта величина существенно влияет на длительность и время задержки 2π -импульса. Выбранные нами значения $\Theta(0)$ обеспечивают приемлемое совпадение расчетных длительностей и задержек с соответствующими экспериментальными значениями. Однако варьирование в разумных пределах значений $\Theta(0)$, а также параметров τ , ε_0 и расстояния s не привело к появлению в расчёте столь большого ИП, как в эксперименте 1.

Как отмечалось в разд.4 данной статьи, увеличение τ приводит к снижению эффективности образования ИП. Поэтому для $\tau \approx 80$, которое соответствует рассматриваемым экспериментам, трудно ожидать возникновения большого ИП. В то же время авторы [8] интерпретировали результаты опытов, используя расчёты [7] при τ , равных примерно 1 и 2, что не даёт уверенности в правильности выводов. Ниже приводится альтернативная интерпретация эксперимента 1.

Авторы [8] отмечают, что лазер, использованный в экспериментах, генерировал излучение, неоднородно распределенное по площади поперечного сечения, а прошедший через образец сигнал регистрировался по полному потоку лучистой энергии. Мы считаем, что это привело к формированию двух 2π -импульсов, один из которых был принят в [8] за ИП. Проиллюстрируем это предположение.

Пусть поперечное сечение входного импульса состоит из двух зон с отношением площадей 1:12, в каждой из которых поле распределено однородно. В зоне с меньшей площадью поле соответствует импульсу с $\Theta(0) = 2.2\pi$, а в зоне с большей площадью – импульсу с $\Theta(0) = 1.4\pi$. Предположим далее, что излучение, прошедшее через каждую зону, распространяется по собственному каналу и внутри каждого канала эволюция излучения описывается нашей математической моделью.

На рис.7 приведена нормированная по высоте к единице зависимость потока энергии $e_s(w)$ излучения, прошедшего через поперечное сечение образца, при $s = 2.2$. Кривая получена с помощью расчетов с указанными выше значениями $\Theta(0)$ для каждой зоны. Параметры ε_0 и τ были теми же, что и в эксперименте 1. Первый пик на рис.7 обусловлен 2π -импульсом, возникшим в канале с меньшей площадью поперечного сечения, а второй пик – 2π -импульсом в канале с большей площадью поперечного сечения. Цуг импульсов на рис.7 по длительности и

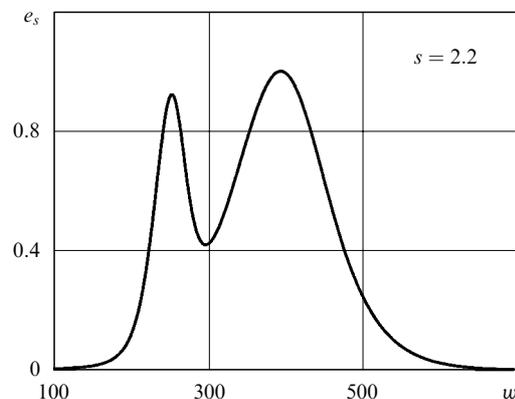


Рис.7. Поток e_s энергии излучения при $s = 2.2$ в случае ступенчато-неоднородного распределения поля по площади поперечного сечения входного импульса.

временной задержке с точностью 2–3 нс совпадает с цугом прошедших через образец импульсов на нижней правой осциллограмме рис.7 из работы [8].

Отметим, что поперечное сечение входного лазерного импульса содержит также участки, где величина $\Theta(0) < \pi$, т. е. недостаточна для образования 2π -импульса. Однако, как показывает расчёт, на интересующем нас расстоянии в 3.5 длин поглощения слабого сигнала плотность потока электромагнитной энергии от таких участков уменьшается более чем в 100 раз. Поэтому маловероятно, чтобы участки с такими значениями $\Theta(0)$ могли служить причиной образования первого прошедшего через образец импульса в эксперименте 1.

Приведенный выше пример не является, конечно, доказательством наших предположений о природе первого прошедшего через образец импульса в эксперименте 1. Такое доказательство должно опираться на фактическое распределение поля по площади поперечного сечения входного импульса и учитывать дифракционные эффекты. Однако в [8] данные о поперечной структуре лазерного импульса не приводятся, а учёт дифракции выходит за рамки нашей статьи. В связи со сказанным отметим работу [18], в которой дифракционные и нестационарные эффекты учитываются одновременно, но неоднородное уширение игнорируется.

6. Заключение

Представленные результаты показывают, что эффективность образования ИП возрастает с уменьшением длительности и приближением к π площади входного лазерного импульса. Численное моделирование двух экспериментальных ситуаций [8] по наблюдению ИП в рубине дало удовлетворительные результаты в случае длинного рубинового стержня и не привело к адекватному описанию процесса в коротком рубиновом стержне. В связи с этим было высказано предположение, что образование цуга импульсов в коротком рубиновом стержне объясняется неоднородностью распределения поля по площади поперечного сечения. Недостаток информации об экспериментальных условиях не позволяет судить о том, почему поперечная неоднородность поля не проявилась столь же существенно в случае длинного рубинового стержня.

Процессы необратимой релаксации легко учитываются включением релаксационных слагаемых в два последних уравнения системы (2). Известно также [19], что время поперечной релаксации перехода $A(\pm \frac{1}{2}) - E(\pm \frac{1}{2})$ при температуре жидкого гелия (условия эксперимента [8]) равно примерно 20 нс. Мы провели ряд расчётов с

учётом поперечной релаксации, но не приводим их результатов по следующим соображениям. При изучении общих свойств ИП нас интересовали в основном когерентные процессы, поскольку влияние релаксации детально обсуждалось в [9]. При описании опытов в рубине учёт поперечной релаксации приводит лишь к незначительному (менее 20 %) уменьшению высоты 2π -импульса и к увеличению его длительности примерно на 1 нс. Подобные уточнения вряд ли имеют смысл на фоне неопределённости условий эксперимента, к числу которых относятся неточности значений параметров квантового перехода и грубая оценка площадей входных импульсов. Расхождение результатов эксперимента и численного моделирования может быть обусловлено также игнорированием теорией неоднородности поперечной структуры лазерного излучения.

Возникновение одиночного ИП является лишь одной особенностью переходного процесса, сопровождающего образование 2π -импульса. Рассмотрение других особенностей этого процесса может служить темой дальнейших исследований.

1. McCall S.L., Hahn E.L. *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 908 (1967); *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969).
2. Lamb G.L., Jr. *Rev. Mod. Phys.*, **43**, 99 (1971).
3. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C. *J. Math. Phys.*, **15**, 1852 (1974).
4. Крюков П.Г., Летохов В.С. *УФН*, **99**, 169 (1969).
5. Аллен Л., Эберли Дж. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (М.: Мир, 1978).
6. Маймистов А.И. *Квантовая электроника*, **30**, 287 (2000).
7. Diels J.C., Hahn E.L. *Phys. Rev. A*, **8**, 1084 (1973).
8. Diels J.C., Hahn E.L. *Phys. Rev. A*, **10**, 2501 (1974).
9. Вершинин А.Л., Дмитриев А.Е., Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **33**, 993 (2003).
10. Ахманов С.А., Хохлов Р.В. *Проблемы нелинейной оптики. 1961–1963* (М.: изд-е АН СССР, 1965).
11. Бутылкин В.С., Каплан А.Е., Хронопуло Ю.Г., Якубович Е.И. *Резонансные взаимодействия света с веществом* (М.: Наука, 1977).
12. Пантел Р., Путхоф Г. *Основы квантовой электроники* (М.: Мир, 1972).
13. Вершинин А.Л., Дмитриев А.Е., Паршков О.М., Писной А.Л. *Квантовая электроника*, **32**, 33 (2002).
14. Дмитриев А.Е., Паршков О.М. *Квантовая электроника*, **20**, 447 (1993).
15. Slusher R.E., Gibbs H.M. *Phys. Rev. A*, **5**, 1634 (1972).
16. Crisp M.D. *Appl. Opt.*, **11**, 1125 (1972).
17. Шавлов А. В сб. *Лазеры* (М.: ИЛ, 1963, с.51).
18. Петрушевич Ю.В., Старостин А.Н. *Квантовая электроника*, **30**, 243 (2000).
19. Lambertand L.Q., Compaan A., Abella I.D. *Phys. Lett. A*, **30**, 153 (1969); Compaan A., Lambertand L.Q., Abella I.D. *Opt. Commun.*, **3**, 236 (1971).