

Динамика солитонов в модели нелинейного уравнения Шредингера с внешним гармоническим потенциалом.

II. Темные солитоны

С.Эрнандес Тенорио, Э.Виллагран Варгас, В.Н.Серкин, М.Агуеро Гранадос, Т.Л.Беляева, Р.Пеña Морено, Л.Моралес Лара

Представлены результаты исследования динамики темных солитонов в рамках математической модели нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с внешним гармоническим потенциалом. Проведен сравнительный анализ решений нестационарных задач для линейного гармонического осциллятора и для модели НУШ с гармоническим потенциалом при различных знаках потенциала самовоздействия. Показано, что главной отличительной особенностью динамики темных солитонов НУШ в параболической ловушке является формирование солитонов с динамически изменяющимися форм-факторами, определяющими периодическое изменение глубины модуляции (степени «черноты») темных солитонов. Период осцилляций темного солитона не совпадает с периодом осцилляций линейного квантово-механического осциллятора, что обусловлено периодическим преобразованием «черного» солитона в «серый» и обратно. Приведены условия применимости метода обратной задачи рассеяния, найдена обобщенная пара Лакса и даны точные солитонные решения для математической модели НУШ с внешним гармоническим потенциалом.

Ключевые слова: солитоны, нелинейные уравнения Шредингера и Гросса–Питаевского, бозе-эйнштейновский конденсат.

1. Темные оптические солитоны в волоконных световодах и темные солитонные волны материи в конденсате Бозе–Эйнштейна

Одним из наиболее ярких примеров использования метода математических аналогий в современной науке, позволяющего с единых позиций рассматривать процессы различной физической природы, является задача о динамике нелинейной уединенной волны, описываемой моделью нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) с внешним гармоническим потенциалом. Данная модель позволяет анализировать широкий круг различных нелинейных явлений, возникающих, например, в нелинейной волоконной оптике, физике лазеров, биофизике и в теории бозе-эйнштейновской конденсации атомов (БЭК), находящихся в магнитной ловушке, профиль которой описывается квадратичной функцией координат.

Как показывают многочисленные эксперименты, нелинейная динамика конденсата в магнитных ловушках достаточно хорошо описывается математической моделью среднего поля Гросса–Питаевского для волновой функции конденсата [1–4]. Анализ динамической аналогии между бозе-конденсатом фотонов, конденсатом атомов и конденсатом куперовских пар в сверхпроводнике, выполненный Ораевским [5–10], показывает, что в со-

стоянии конденсата ансамбль достаточно большого числа частиц ведет себя как классическое поле, имеющее амплитуду и фазу. При этом динамика конденсата может рассматриваться как существенно нелинейный процесс, полностью аналогичный формированию бозе-конденсата фотонов в лазере (см., напр., обзор [6] и цитируемую в нем литературу).

Действительно, как подчеркивалось в пионерских экспериментальных работах по генерации солитонов в БЭК [11–14], существует глубокая математическая аналогия между теорией солитонных волн материи и теорией оптических солитонов в волоконных световодах (см., напр., работы [11–17] и монографии [18–20], а также цитируемую в них литературу). Отметим, что первые нелинейные коллективные возбуждения в БЭК были обнаружены в так называемых сигароподобных ловушках, поперечные размеры которых оказываются много меньше продольных размеров [11–14]. В этом случае уравнение Гросса–Питаевского существенно упрощается [1–4]:

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + R|u|^2 u - \frac{1}{2} \Omega^2 \tau^2 u = 0. \quad (1)$$

При различных знаках параметра нелинейности R (что означает различные физические сценарии нелинейного взаимодействия атомов – притяжение или отталкивание) формируются либо светлые, либо темные солитонные волны материи [11–17]. Экспериментальное открытие солитонных волн материи в БЭК [11–14] (темных при $R < 0$ и светлых при $R > 0$) в немалой степени стимулировалось тем обстоятельством, что в предельном случае $\Omega = 0$ модель (1) трансформируется к хорошо изученному НУШ, описывающему, в частности, оптические солитоны огибающей электромагнитного поля [18–26],

C.Hernandez Tenorio, E.Villagran Vargas, V.N.Serkin, M.Aguero Granados, T.L.Belyaeva, R. Peña Moreno, L.Morales Lara. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, Puebla, 72001 A. P. 502, Mexico e-mail: vsarkin@yahoo.com

предсказанные Хасэгавой и Таппертом [23] задолго до создания световодов с малыми потерями, а также открытые в работе [24] светлые солитоны и в работах [25–26] темные солитоны.

Главная цель настоящей работы состоит в исследовании динамики темных солитонов в рамках математической модели НУШ с внешним гармоническим потенциалом. Особенности динамики формирования и взаимодействия светлых солитонов в гармоническом потенциале-ловушке были рассмотрены в первой части нашей работы [27].

Прежде всего выпишем точные решения уравнения (1) для темных солитонов. При $\Omega = 0$ и $R = 1$ уравнение (1) записывается в виде хорошо известного НУШ для комплексно-сопряженной функции u^* , удобного при анализе солитонов в БЭК,

$$i \frac{\partial u^*}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial \tau^2} - |u^*|^2 u^* = 0. \quad (2)$$

Следуя пионерской работе [23], представим решение (2) в виде

$$u(\xi, \tau) = \rho^{1/2}(\tau) \exp[i\sigma(\xi, \tau)], \quad (3)$$

действительная (амплитуда) и комплексная (фаза) части которого описываются выражениями

$$\rho(\tau) = \rho_0 [1 - a^2 \operatorname{sech}^2(\rho_0^{1/2} a \tau)], \quad (4)$$

$$\sigma(\xi, \tau) = \rho_0 \sqrt{1 - a^2} \tau + \arctan \left[\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}} \tanh(\rho_0^{1/2} a \tau) \right] + \frac{\rho_0}{2} (3 - a^2) \xi. \quad (5)$$

В отличие от светлого солитона

$$u(\xi, \tau) = \eta \operatorname{sech}[\eta(\tau - q_0 + \delta\xi)] \exp[i(\eta^2 - \delta^2)\xi/2 - i\delta\tau], \quad (6)$$

темный солитон (4), (5) имеет дополнительный параметр a , который определяет глубину модуляции (глубину провала в интенсивности (4)) и фазу солитона (5). Важным свойством темного солитона является зависимость его фазы (5) от времени – фазовая модуляция. В том случае, когда $a = 1$, темный солитон становится черным,

$$u(\xi, \tau) = \rho_0^{1/2} \tanh(\rho_0^{1/2} \tau) \exp(i\rho_0 \xi), \quad (7)$$

со скачком фазы на π в центральной части импульса. Так как функция (7) по своему определению (извлечение квадратного корня) двухзначна, $u(\xi, \tau) = \pm \eta \tanh(\eta\tau) \exp(i\eta^2 \xi)$, она имеет две различающиеся знаком особенности (скачки на $\pm \eta$) при граничных условиях $\tau \rightarrow \pm \infty$ и описывает так называемые топологические солитон и антисолитон с топологическими зарядами $+1$ и -1 . Причем солитоны с одинаковыми топологическими зарядами отталкиваются, а с противоположными – притягиваются.

Отметим, что понятие топологического солитона в настоящее время стало общепринятым и объединяет целое семейство солитонов, обнаруженных в самых различных областях физики; к ним можно отнести, например, дислокации в кристаллах, кинки в теории поля, флюксо-

ны в джозефсоновских переходах, волны в ферромагнетиках, 2π -импульсы в квантовой электронике и нелинейной оптике, темные солитоны в волоконных световодах, темные солитонные волны материи в БЭК.

Интересно проследить историю возникновения понятия топологического солитона. В 1959–1962 гг. в работах Скирма [28, 29] была предпринята первая попытка построения интегрируемой нелинейной модели теории поля

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + m^2 \sin \Phi = 0. \quad (8)$$

Тогда еще не было «жаргонного» названия этой модели – уравнение синус-Гордона; оно появилось позже в работе Рубинштейна [30], тем не менее не преминувшего отметить в сноске на второй странице своей статьи, что название уравнению дал Мартин Крускал. Однако первые три ссылки в [30] сделаны на работы Скирма. Фактически Скирм поставил один из первых численных экспериментов в теории поля и наблюдал упругое взаимодействие частиц, для которого он сумел абсолютно правильно подобрать аналитические выражения, известные теперь как кинки и бризеры. Термин солитоны появится только через 4 года, а в своих численных экспериментах на вычислительной машине Harwell Mercury Computer Скирм уже в 1958–1962 гг. наблюдает взаимное отталкивание между кинками и взаимное притяжение между кинками и антикинками,

$$\Phi(x, t) = 4 \arctan \exp \left[\pm \frac{m}{\sqrt{1 - v^2}} (x - vt) \right], \quad (9)$$

и приписывает кинкам и антикинкам соответственно топологические заряды $+1$ и -1 , определяя их условиями нормировки

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} dx = \frac{1}{2\pi} [\Phi(\infty, t) - \Phi(-\infty, t)] = N_i. \quad (10)$$

Введение понятия топологического заряда было обусловлено, прежде всего, наблюдаемым в численных экспериментах Скирма характером сил между, как мы теперь говорим, солитонами [31]. Второе немаловажное обстоятельство заключалось в различной асимптотике решений на $\pm \infty$. Кинк (это название было введено Финкельштейном в 1966 г. [32]) изменяется от 0 до 2π и имеет разрыв на граничных условиях. Кроме того, в модели (8) существуют трудности с введением понятия вакуума. Действительно, гамильтониан системы (8)

$$H = \frac{1}{2} \left(\Phi_t^2 + \Phi_x^2 + 4m^2 \sin^2 \frac{1}{2} \Phi \right) \quad (11)$$

имеет минимум в состояниях вакуума $\Phi = 2\pi n$. Таким образом, возникает понятие множественности вакуумов, определяемых целыми числами $\Phi = 2\pi n$, а топологические заряды по сути представляют собой нормированные условием (10) «скачки» между различными вакуумными состояниями поля.

Аналогичная ситуация имеет место и для темных солитонов НУШ (7), где топологические заряды солитона и антисолитона определяют скачки между состояниями поля $\pm \eta$ при граничных условиях на $\pm \infty$:

$$\frac{1}{2\eta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(\tau, \xi)}{\partial \tau} d\tau = \frac{1}{2\eta} [u(\infty, \xi) - u(-\infty, \xi)] = N_i. \quad (12)$$

Таким образом, решение (7) записывается в виде $u(\xi, \tau) = N_i \eta \tanh(\eta\tau) \exp(i\eta^2\xi)$, где $N_i = \pm 1$ – топологический заряд.

Теоретическая идеализация, состоящая в требовании наличия у темного солитона бесконечных фронтов постоянной интенсивности, в реальном эксперименте с темными оптическими солитонами приводит к возникновению конкурирующих нелинейных эффектов, главными из которых являются ВРМБ (для темных солитонов) и ВКР (для темных и светлых солитонов). Поэтому в технике оптических солитонов широкое распространение получил метод экспериментального исследования, названный методом подставки. В этом методе используется длинный дополнительный импульс подставки, на фоне которого создается необходимый для генерации темного солитона скачок фазы.

Типичная картина динамики генерации черного солитона в этом случае приведена на рис.1. Подчеркнем, что использование импульса подставки приводит к интересному эффекту «скатывания» солитона с подставки (рис.2). До настоящего времени этот эффект так и остается неизученным, однако, как мы покажем далее, он играет существенную роль при анализе динамики взаимодействия темных солитонов в БЭК. Поскольку влияние границ импульса подставки не поддается точному теоретическому описанию, основанному на методе обратной задачи теории рассеяния [33–37], обратимся к данным прямого численного моделирования.

Рассмотрим процесс формирования темного солитона на подставке более подробно. Конечность ширины импульса подставки приводит, во-первых, к значительному уширению темного солитона (этот факт был обнаружен еще в ранних численных экспериментах [38]), а во-

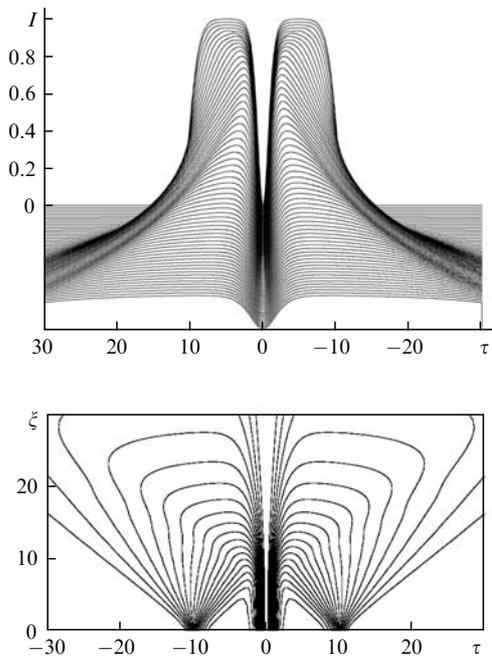


Рис.1. Динамика темного (черного) солитона, формирующегося на супергауссовом импульсе подставки. Представленная проекция развернута на 180° (импульс распространяется на читателя). Контурная карта линий равного уровня представлена в стандартной проекции.

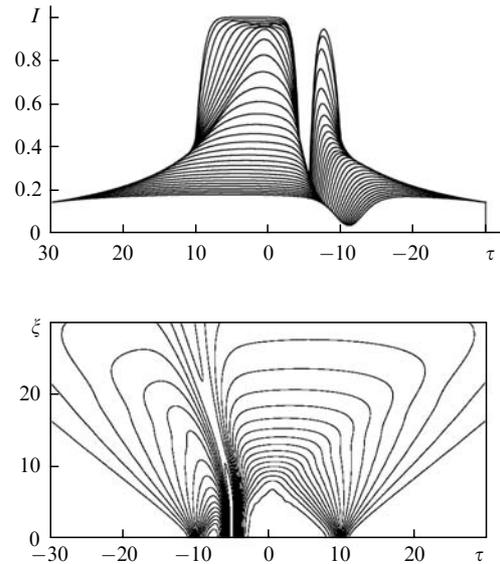


Рис.2. Влияние границ импульса подставки на динамику черного солитона, приводящее к его скатыванию с импульса подставки и превращению в серый солитон.

вторых, совместное действие дисперсии и нелинейности вызывает уплощение верхушки импульса подставки, так что аналитические выражения (3)–(6), описывающие провал в интенсивности на фоне бесконечной постоянной подставки, все более соответствуют точному решению, а фронты импульса подставки перестают оказывать значительное влияние на динамику темного солитона (см. рис.1 и 2).

В том случае, когда центр черного импульса смещен относительно центра тяжести импульса подставки, возникает новое явление – солитонный импульс приобретает ускорение и, что самое интересное, становится серым солитоном, т. к. изменяется глубина его модуляции (рис.2). Действительно, в соответствии с выражением (5) изменение скорости темного солитона однозначно связано с изменением глубины его модуляции, поскольку, согласно точным аналитическим решениям для топологических солитонов (4), (5), только серый солитон движется в системе координат, связанной с подставкой, а темный солитон в соответствии с точным решением (7) покоится в системе координат, связанной с групповой скоростью импульса. На рис.2 демонстрируется преобразование черного солитона в серый в соответствующей проекции.

Обсуждаемое явление имеет большое значение при интерпретации результатов различных экспериментов в области как оптических солитонов, так и солитонов в БЭК. Показанное на рис.3 «сползание» двух темных со-

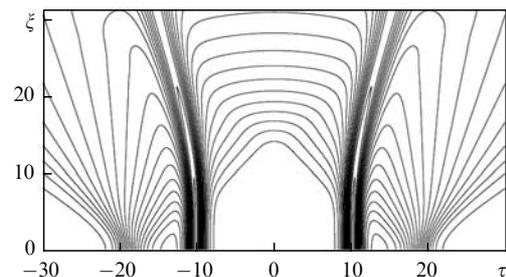


Рис.3. Влияние границ импульса подставки на динамику двух черных солитонов, приводящее к их скатыванию с супергауссова импульса подставки и превращению в серые солитоны.

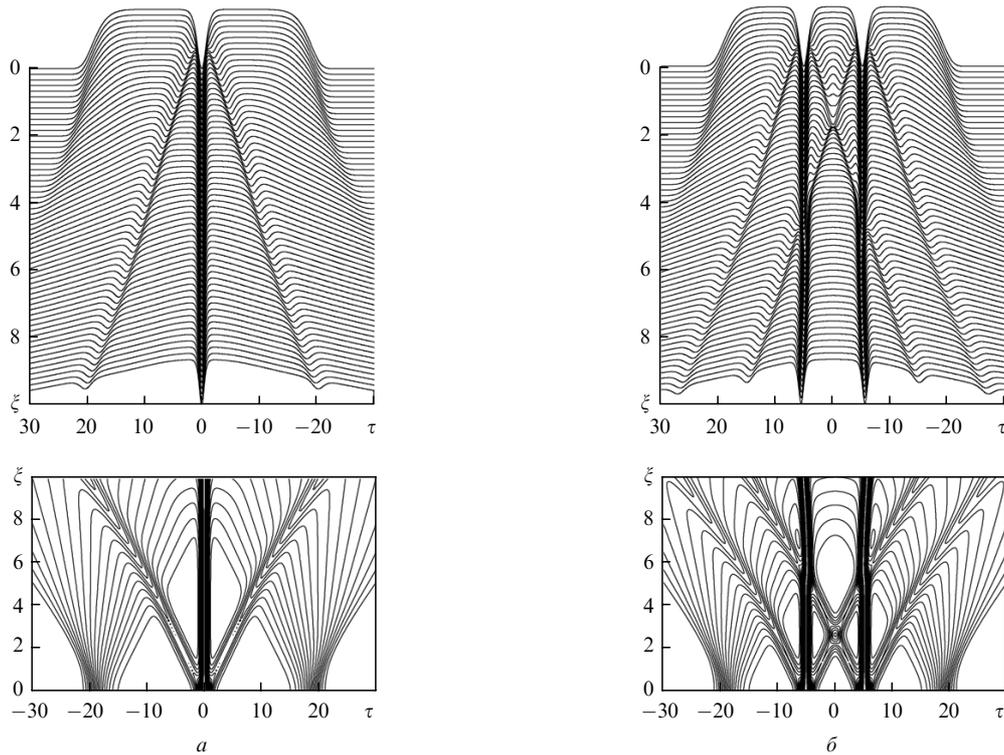


Рис.4. Формирование черного и двух серых солитонов (1) при начальных условиях $u = 2 \tanh \tau$, $R = -1$ и $\Omega = 0$ (а) и динамика взаимодействия черных и серых солитонов при тех же параметрах задачи (б).

литонов с краев импульса подставки может быть неправильно истолковано в конкретном эксперименте как взаимодействие между темными солитонами типа отталкивания. Общий случай формирования и взаимодействия черных и серых солитонов показан на рис.4.

2. Основные закономерности динамики темных солитонов в гармоническом потенциале

В пределе $R = 0$ уравнение (1) трансформируется к обычному уравнению Шредингера для гармонического осциллятора, общее решение которого для стационарных состояний осциллятора определяется функциями Эрмита [39]

$$u_n(\xi, \tau) = \frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \exp(-i\lambda\xi) H_n(\tau) \exp\left(-\frac{\Omega\tau^2}{2}\right), \quad (13)$$

где

$$H_n(\tau) = \exp(-\tau^2) (-1)^n \frac{d^n}{d\xi^n} \exp(-\tau^2); \quad \lambda = \Omega \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Нас будет интересовать решение при $n = 1$

$$u_1(\tau) = 2\tau \frac{\sqrt{\Omega}}{\sqrt{2\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{\Omega\tau^2}{2}\right) \exp\left(-i\frac{3}{2}\Omega\xi\right), \quad (14)$$

которое, как нетрудно увидеть, аналогично виду начального условия при исследовании темного (черного) солитона на гауссовом импульсе подставки

$$u(\tau) = \eta \tanh(\eta\tau) \exp(-\beta\tau^2) \approx \tau\eta^2 \exp(-\beta\tau^2). \quad (15)$$

Параметры η и β в (15) определяют длительность черного солитона (длительность скачка фазы) и протяженность гауссова импульса подставки соответственно. Состояние (14), первоначально смещенное из положения равновесия, осциллирует в параболическом потенциале (рис.5) аналогично колебаниям светлого солитона [27], а взаимодействие двух разнесенных в пространстве волновых функций (14) носит полностью упругий характер (рис.6), как это имеет место и в случае $n = 0$ [27].

Проведенные расчеты показывают, что эффекты самовоздействия не препятствуют формированию квазисолитонных состояний ни для положительного, ни для отрицательного характера самовоздействия (рис.7). Последнее утверждение требует более детального пояснения.

Метод численного эксперимента позволяет исследовать динамику осциллятора в различных приближениях. В отсутствие потенциала ловушки динамика процесса самовоздействия зависит от знака нелинейности. В самофокусирующей среде начальное условие (12) сводится к появлению двух расходящихся солитоноподобных импульсов, тогда как в саморасфокусирующей среде происходит их быстрое расплывание (см. рис.7,а и б). Включение гармонического потенциала кардинально изменяет динамику линейного осциллятора (см. там же). И в случае $R < 0$, и при $R > 0$ в численных экспериментах можно наблюдать формирование квазисолитонных конфигураций поля, отличительной чертой которых является практически упругий характер их взаимодействия (рис.8). В обычно используемом масштабе представления графических результатов динамика импульсов на этом рисунке неотличима от типичной картины для истинных солитонов. Неупругость взаимодействия проявляется в логарифмическом масштабе величин.

Таким образом, численные эксперименты, проведенные в широких областях изменения основных парамет-

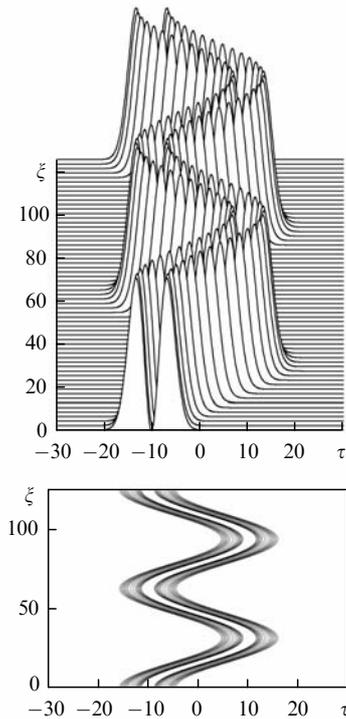


Рис.5. Пространственно-временная динамика первого собственного состояния осциллятора, центр тяжести которого первоначально смещен относительно минимума потенциала ($\Omega = 0.1, R = 0$).

ров задачи, позволяют выявить следующие основные закономерности динамики темных солитонов в гармоническом потенциале.

1. Период осцилляций темных (черных) солитонов зависит от конкретной постановки эксперимента. Если черный солитон формируется на фоне осциллирующего в гармонической ловушке импульса подставки, то указанный период практически совпадает с периодом колеба-

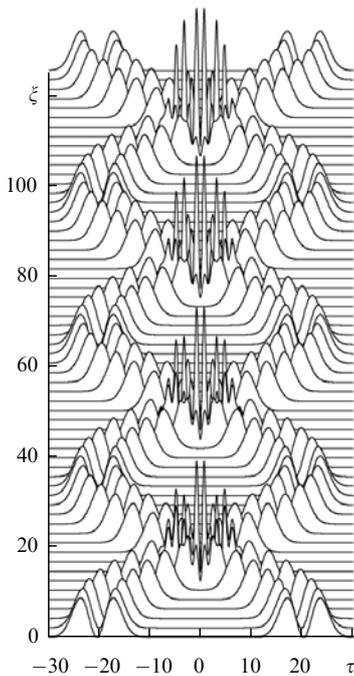


Рис.6. Динамика взаимодействия двух разнесенных в пространстве состояний осциллятора ($\Omega = 0.1, R = 0$).

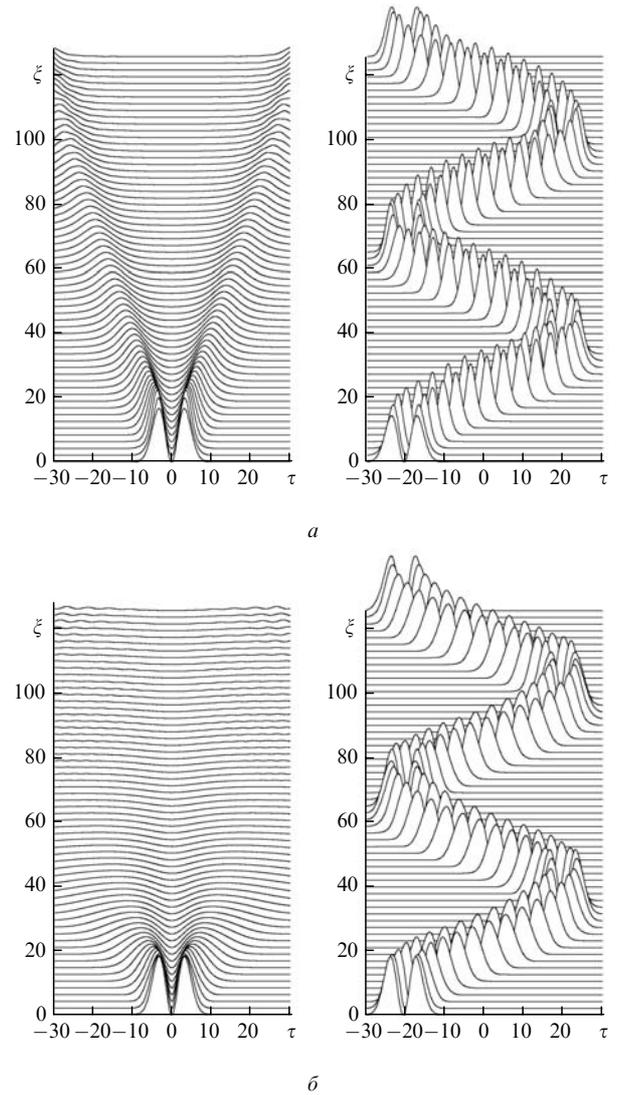


Рис.7. Формирование квазистационарного состояния в нелинейном шредингеровском осцилляторе в случае положительного (а) и отрицательного (б) знака потенциала самовоздействия. На обоих рисунках слева показана динамика солитона в отсутствие гармонического потенциала.

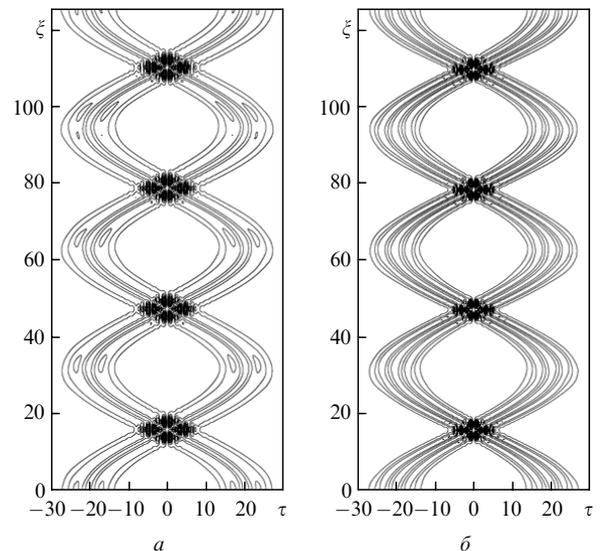


Рис.8. Взаимодействие квазисолитонных состояний при $\Omega = 0.1$ и различных знаках потенциалов самовоздействия: $R = 1$ (а) и -1 (б).

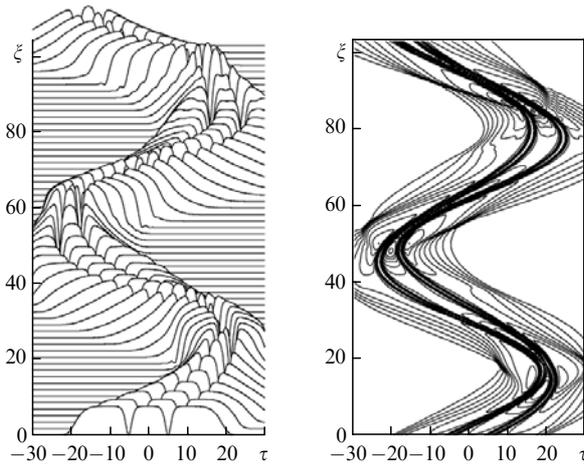


Рис.9. Динамика темных солитонов в параболической ловушке (случай осциллирующей в ловушке подставки).

ний линейного осциллятора, а динамика темного солитона подобна динамике классической частицы, подчиняющейся законам ньютоновской механики (рис.9),

2. При неподвижной подставке, собственные периодические осцилляции формы которой связаны с эффектами самовоздействия в гармоническом потенциале, период колебаний черного солитона значительно возрастает, что обусловлено периодическим преобразованием черного солитона в серый и обратно. Солитон становится черным в точках поворота в гармоническом потенциале и серым – в момент прохождения центра ловушки, где его скорость максимальна. Период его колебаний при этом только приблизительно определяется соотношениями, полученными в предшествующих работах [15–17, 20]. Типичные картины эволюции солитона и изменения глубины его модуляции в этом случае показаны на рис.10 и 11.

3. В случае как положительного, так и отрицательно-го знака нелинейности существует возможность формирования устойчивых квазисолитонных конфигураций поля, соответствующих первому стационарному состоянию гармонического осциллятора, отличительной чертой которых является практически упругий характер их взаимодействия (см. рис.8).

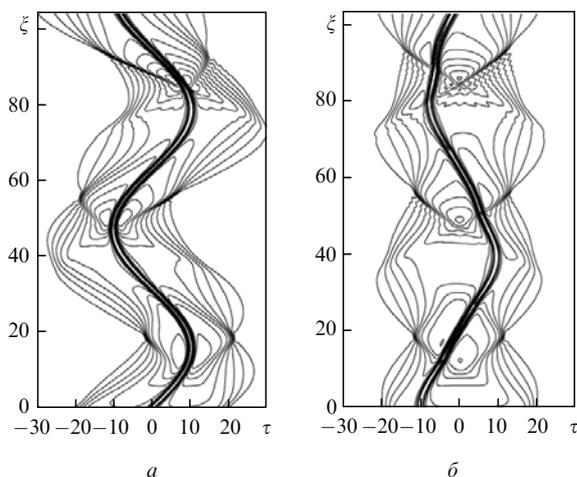


Рис.10. Изменение периода осцилляций темных солитонов в параболическом потенциале ловушки в зависимости от условий эксперимента (осциллирующая в ловушке подставка (а) сравнивается с покоящейся подставкой (б)).

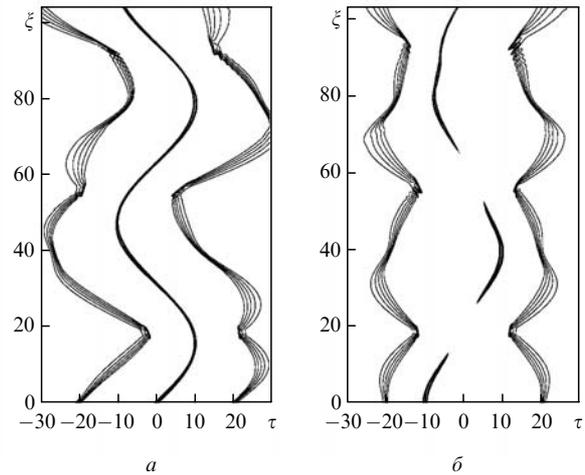


Рис.11. Эффект периодического превращения черного солитона в серый и обратно. Для доказательства контурные линии не достигают максимумов импульсов, а начинаются с величины 0.05 и доходят до 0.25. Видно, что в случае осциллирующей подставки (а) солитон остается черным; в случае покоящейся подставки (б) солитон при останковке становится черным, а разрывы в контурных линиях при максимальных скоростях свидетельствует о том, что солитон стал серым, поскольку его минимальная интенсивность становится больше 0.25. Превышение этого уровня позволяет проследить нетривиальную динамику периодического превращения черного солитона в серый.

3. Пара Лакса и точные аналитические солитонные решения для модели нелинейного уравнения Шредингера с внешним гармоническим потенциалом

Одним из наиболее значительных достижений в теории нелинейных волн стало открытие в 1967 г. точного метода интегрирования уравнения Кортевега-де Вриза [33], что привело к созданию и разработке метода решения нелинейных эволюционных уравнений, получившего название метода обратной задачи рассеяния (ОЗР) [33–37]. Было доказано, что если для нелинейного волнового уравнения найти так называемое представление Лакса [34], то это уравнение можно решить методом ОЗР, и что существование пары Лакса доказывает полную интегрируемость рассматриваемой модели. Проблема поиска эволюционных уравнений, обладающих свойством полной интегрируемости, имеет довольно длительную историю развития (см. приоритетные работы [33–37] и монографии [40–46]).

В последнее время интенсивно развиваются методы, обобщающие спектральную задачу, названную по имени ее создателя обратной спектральной задачей Захарова – Шабата (ЗШ) [36] и Абловица – Каупа – Ньюэла – Сегура (АКНС) [37]. Цель проводимых исследований состоит в разработке математического алгоритма поиска новых интегрируемых моделей НУШ и в создании новых методов управления динамикой солитонов [47–57]. К существенному продвижению в этом направлении привело использование в методе ОЗР обобщения пары Лакса на случай изменяющегося во времени спектрального параметра и концепции движущихся фокусов теории самофокусировки.

Отметим, что идея переменного спектрального параметра отнюдь не нова, она была впервые использована еще в 1976 г. в пионерской работе [58] для решения ме-

тодом ОЗР нелинейного уравнения Шредингера с линейным по пространственной координате внешним потенциалом. Применение идеи движущихся фокусов в ОЗР [49–50] дало возможность существенно продвинуться на пути поиска новых интегрируемых моделей НУШ. Важно отметить, что аппарат, развиваемый в работах [47–57], позволяет предложить новые методы управления параметрами солитонов, при которых, однако, солитоны НУШ, ускоряясь или усиливаясь во внешних потенциалах, не теряют своей индивидуальности: они сохраняют функциональный вид и упруго взаимодействуют друг с другом [47–57].

В наших исследованиях динамики солитонов в гармоническом потенциале (суммированных в двух частях настоящей работы) использовались методы как адиабатической теории возмущений (см. [27]), так и прямого численного эксперимента. Однако исследования были бы неполными, если бы мы не рассмотрели возможности построения полностью интегрируемых моделей для солитонов НУШ в параболических ловушках с помощью методов ОЗР, предложенных в работах [47–57].

Общая алгебраическая формулировка задачи ставится следующим образом. В качестве первого шага попытаемся написать НУШ с варьируемым гармоническим потенциалом как условие совместности

$$\hat{F}_\xi - \hat{G}_\tau + [\hat{F}, \hat{G}] = 0 \tag{16}$$

пары линейных уравнений

$$\psi_\tau = \hat{F}\psi(\xi, \tau), \quad \psi_\xi = \hat{G}\psi(\xi, \tau), \tag{17}$$

где элементы матриц F и G зависят от неизвестных переменных эволюционного уравнения и определяют потенциал рассеяния $u(\xi, \tau)$.

Уравнение (16) известно как обобщенная пара Лакса, а спектральная задача ЗШ–АКНС описывается системой матричных уравнений (17). Выбирая матрицы в виде

$$\hat{F} = -iA(T)\hat{\sigma}_3 + \hat{L}\hat{\phi}, \tag{18}$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \tag{19}$$

где

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \tag{20}$$

$$\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \exp[-i\Theta(\xi, \tau)/2] & 0 \\ 0 & \exp[i\Theta(\xi, \tau)/2] \end{pmatrix}; \tag{21}$$

$$\hat{L} = \sqrt{R(\xi)} \begin{pmatrix} 0 & u(\xi, \tau) \\ -u^*(\xi, \tau) & 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

и используя идею движущегося фокуса [50]

$$\Theta(\xi, \tau) = P(\xi)\tau^2, \tag{23}$$

мы, не останавливаясь на подробностях вычислений, окончательно запишем элементы матрицы G (в математической литературе – АКНС-элементы) и искомое нелинейное эволюционное уравнение в следующем виде:

$$A = \frac{i}{2}R(\xi)|u|^2 - iA\tau P(\xi) - iA^2, \tag{24}$$

$$B = \sqrt{R(\xi)} \left[\frac{1}{2}\tau u R(\xi) + \frac{i}{2}u_\tau + Au \right] \exp(i\Theta/2), \tag{25}$$

$$i\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \pm R(\xi)|u|^2 u + \frac{1}{2} \left[R(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{R(\xi)} \right] \tau^2 u = 0. \tag{26}$$

Таким образом, модель НУШ с гармоническим потенциалом (1) будет полностью интегрируемой тогда и только тогда, когда ее основные параметры окажутся взаимозависимыми. Поэтому нестационарный гармонический потенциал связан с нелинейностью соотношением

$$\Omega^2(\xi) = R(\xi) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \frac{1}{R(\xi)}, \tag{27}$$

где $R(\xi)$ – произвольная дважды дифференцируемая функция.

В заключение выпишем точные солитонные решения для уравнения (26). Светлые солитоны определяются формулами

$$u(\xi, \tau) = 2f_0\sqrt{R(\xi)}\operatorname{sech}[\theta(\xi, \tau)]\exp\left[-\frac{i}{2}P(\xi)\tau^2 - i\chi(\xi, \tau)\right], \tag{28}$$

$$\theta(\xi, \tau) = 2f_0R(\xi)\tau + 4v_0f_0 \int_{\tau_0}^{\tau} R^2(z)dz, \tag{29}$$

$$\chi(\xi, \tau) = 2v_0R(\xi)\tau + 2(v_0^2 - f_0^2) \int_{\tau_0}^{\tau} R^2(z)dz. \tag{30}$$

Темные солитоны даются выражениями

$$u(\xi, \tau) = f_0\sqrt{\rho_0R(\xi)(1 - a^2\operatorname{sech}^2\theta)} \times \exp\left[\frac{i}{2}P(\xi)\tau^2 + i\chi(\xi, \tau)\right], \tag{31}$$

$$\theta(\xi, \tau) = f_0R(\xi)\tau a\sqrt{\rho_0}, \tag{32}$$

$$\chi(\xi, \tau) = f_0\tau\sqrt{\rho_0R(\xi)(1 - a^2)} + \arctan\left\{\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}\tanh[f_0\tau aR(\xi)\sqrt{\rho_0}]\right\} + \frac{1}{2}\rho_0(3 - a^2)f_0^2 \int_{\tau_0}^{\tau} R^2(z)dz. \tag{33}$$

С помощью прямой подстановки легко убедиться, например, что решения (28)–(33) обращают (26) в тождество; кроме того, выполнив операции интегрирования и дифференцирования для элементарных функций R (алгебраических, тригонометрических и т. д.), можно легко построить бесконечное множество новых уравнений НУШ и их решений.

В качестве примера рассмотрим решения уравнения (26) при

$$R = R_0 \exp(\beta \xi),$$

когда оно трансформируется к виду

$$i \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + R_0 \exp(\beta \xi) |u|^2 u + \frac{1}{2} \beta^2 \tau^2 u = 0. \quad (34)$$

Для светлых солитонов получим

$$u(\xi, \tau) = 2 \frac{f_0}{\sqrt{R_0}} \exp\left(\frac{\beta \xi}{2} \operatorname{sech}\left[2f_0 \tau \exp(\beta \xi) + 4f_0 v_0 \frac{\exp(2\beta \xi) - 1}{2\beta}\right] \exp\left\{-i \frac{\beta \tau^2}{2} - i \left[2v_0 \tau \exp(\beta \xi) + 2(v_0^2 - f_0^2) \frac{\exp(2\beta \xi) - 1}{2\beta}\right]\right\}. \quad (35)$$

Решения для темных солитонов таковы:

$$u(\xi, \tau) = \frac{f_0}{\sqrt{R_0}} \times \exp\left(\frac{\beta \xi}{2}\right) \sqrt{\rho_0 \{1 - a^2 \operatorname{sech}^2[f_0 \tau \exp(\beta \xi) a \sqrt{\rho_0}]\}} \times \exp\left[i \frac{\beta \tau^2}{2} + i \chi(\xi, \tau)\right], \quad (36)$$

$$\chi(\xi, \tau) = f_0 \tau \exp(\beta \xi) \sqrt{\rho_0 (1 - a^2)} + \arctan\left\{\frac{a}{\sqrt{(1 - a^2)}} \tanh[f_0 a \tau \exp(\beta \xi) \sqrt{\rho_0}]\right\} + \frac{1}{2} \rho_0 (3 - a^2) f_0^2 \left[\frac{\exp(2\beta \xi) - 1}{2\beta}\right]. \quad (37)$$

Полученные решения интересны тем, что они описывают выпадение частиц из конденсата при $\beta < 0$ и усиление солитона при $\beta > 0$. Чтобы убедиться в этом, сделаем замену переменных

$$Q = \frac{u}{\sqrt{R_0}} \exp\left(-\frac{\beta \xi}{2}\right), \quad (38)$$

которая переводит уравнение (34) в уравнение с дополнительным комплексным членом (усилением или поглощением)

$$i \frac{\partial Q}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial \tau^2} + |Q|^2 Q + \frac{1}{2} \beta^2 \tau^2 Q = i \frac{\beta}{2} Q. \quad (39)$$

Таким образом, использование идеи движущихся во времени фокусов (23) в алгоритме АКНС обратной задачи рассеяния (16)–(22) позволяет выявить новый класс полностью интегрируемых методом ОЗР нелинейных уравнений шредингеровского типа с гармоническим потенциалом и найти их решения (26)–(33).

В заключение следует подчеркнуть, что использование взаимодополняющих друг друга аналитических методов – адиабатической теории возмущений и методов обратной задачи теории рассеяния, а также прямого численного эксперимента, выполненного в широких обла-

стях изменения основных параметров задачи, позволило нам дать описание и объяснение динамики солитонов в модели НУШ с гармоническим потенциалом с помощью достаточно простых аналогий и понятий квантовой электроники. Использование аналогий часто позволяет решить одну из наиболее трудных проблем построения физически содержательной теории, не ограничивающейся только математическим описанием того или иного явления. Эта проблема заключается в сложности перехода от описания явления к объяснению явления. Великолепным примером отточенного мастерства разработки физически конструктивных идей, стремления автора дать сложные объяснения, использующие, в частности, хорошо известные понятия квантовой электроники, были и остаются работы профессора А.Н.Ораевского, светлой памяти которого и посвящается наша работа. Заинтересованный читатель может найти информацию о том вкладе, который внес своими работами профессор Ораевский в развитие квантовой электроники, на сервере Американского института физики [59].

Авторы пользуются предоставленной им возможностью выразить искреннюю благодарность Рецензенту, чьи конструктивные замечания в немалой степени способствовали улучшению текста статьи.

1. Dalfovo S., Giorgini L., Pitaevskii L.P., Stringari S. *Rev. Mod. Phys.*, **71**, 463 (1999).
2. Pethick C.J., Smith H. *Bose/Einstein Condensation in Dilute Gases* (Cambridge: Cambridge University Press, 2002).
3. Gross E.P. *Nuovo Cimento*, **20**, 454 (1961).
4. Питаевский Л.П. *ЖЭТФ*, **40**, 646 (1961).
5. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **24**, 1127 (1997).
6. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **31**, 1038 (2001).
7. Ораевский А.Н. *Квантовая электроника*, **11**, 1763 (1984).
8. Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **89**, 608 (1985).
9. Ораевский А.Н. *ЖЭТФ*, **103**, 981 (1993).
10. Козловский А.В., Ораевский А.Н. *Письма в ЖЭТФ*, **75**, 273 (2002).
11. Khaykovich L. et al. *Science*, **296**, 1290 (2002).
12. Strecker K.E., Partridge G.B., Truscott A.G., Hulet R.G. *Nature (Ldn)*, **417**, 150 (2002).
13. Burger S., Bongs K., Dettmer S., Ertmer W., Sengstock K. *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 5198 (1999).
14. Denschlag J. et al. *Science*, **287**, 97 (2000).
15. Busch T., Anglin J.R. *Phys. Rev. Lett.*, **84**, 2298 (2000).
16. Reihart W.P., Clark C.W. *J. Phys. B*, **30**, L785 (1997).
17. Morgan S.A., Ballagh R.J., Burnett K. *Phys. Rev. A*, **55**, 4338 (1997).
18. Hasegawa A., Matsumoto M. *Optical Solitons in Fibers* (Berlin: Springer, 2003).
19. Agrawal G. P. *Nonlinear Fiber Optics* (New York: Academic Press, 2001).
20. Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. *Optical Solitons – From Fibers to Photonic Crystals* (New York: Academic Press, 2003).
21. Weiner A.M. *Dark Optical Solitons*, in *Optical Solitons – Theory and Experiment* J. R.Taylor (Ed.) (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 19926 p. 378).
22. Hasegawa A. *Optical Solitons in Fiber* (Berlin: Springer, 1998).
23. Hasegawa A., Tappert F. *Appl. Phys. Lett.*, **23**, 142 (1973).
24. Mollenauer L.F., Stolen R.H., Gordon J.P. *Phys. Rev. Lett.*, **45**, 1095 (1980).
25. Weiner A.M. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **61**, 2445 (1988).
26. Krokol D. et al. *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 29 (1988).
27. Эрнандес Тенорио С., Виллагран Варгас Э., Серкин В. Н. и др. *Квантовая электроника*, **35**, 778 (2005).
28. Skyrme T.H.R. *Proc. Roy. Soc. (Ldn) A*, **247**, 260 (1958).
29. Skyrme T.H.R. *Proc. Roy. Soc. (Ldn) A*, **260**, 127 (1960).
30. Rubinstein J. *J. Math. Phys.*, **11**, 258 (1970).
31. Zabusky N.J., Kruskal M.D. *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 240 (1965).
32. Finkelstein D. *J. Math. Phys.*, **7**, 1218 (1966).

33. Gardner C.S., Greene J.M., Kruskal M.D., Miura R.M. *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1095 (1967).
34. Lax P.D. *Commun. on Pure and Applied Mathematics*, **XXI**, 467 (1968).
35. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *ЖЭТФ*, **61**, 118 (1971).
36. Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. *Теория солитонов. Метод обратной задачи* (М.: Наука, 1980).
37. Ablowitz M.J., Kaup D.J., Newell A.C., Segur H. *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1262 (1973); *Stud. Appl. Math.*, **53**, 249 (1974).
38. Tomlinson W.J., Hawkins R.J., Weiner A.M., Heritadge J.P., Thurston R.N. *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**, 329 (1989).
39. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика* (М.: Физматгиз, 1963).
40. Абловиц М., Сигур Х. *Солитоны и метод обратной задачи рассеяния* (М.: Мир, 1987).
41. Додд Р., Эйлбек Д., Гиббон Д., Моррис Х. *Солитоны и нелинейные волновые уравнения* (М.: Мир, 1988).
42. Калоджеро Ф., Дегасперис А. *Спектральные преобразования и солитоны* (М.: Мир, 1985).
43. Кудряшов Н.А. *Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений* (М.: изд.-е МИФИ, 2002).
44. Лэм Дж. *Введение в теорию солитонов* (М.: Мир, 1983).
45. Ньюэлл А. *Солитоны в математике и физике* (М.: Мир, 1991).
46. Солитоны. Под ред. Р.Буллаф, Ф.Кодри (Новокузнецк: изд.-е ИО НФМИ, 1999).
47. Serkin V.N., Hasegawa A. *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 4502 (2000).
48. Серкин В.Н., Хасегава А. *Письма в ЖЭТФ*, **72**, 125 (2000).
49. Serkin V.N., Hasegawa A. *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.*, **8**, 418 (2002).
50. Serkin V.N., Hasegawa A., Belyaeva T.L. *Phys. Rev. Lett.*, **92**, 199401 (2004).
51. Серкин В.Н., Беляева Т.Л. *Квантовая электроника*, **31**, 1007 (2001); *Квантовая электроника*, **31**, 1016 (2001).
52. Серкин В.Н., Беляева Т.Л. *Письма в ЖЭТФ*, **74**, 649 (2001).
53. Serkin V.N., Matsumoto M, Belyaeva T.L. *Письма в ЖЭТФ*, **73**, 64 (2001).
54. Hao RY., Li L., Li Z.H., et al. *Opt. Commun.*, **236**, 79 (2004).
55. Hao RY., Li L., Li Z.H., et al. *Phys. Rev. E*, **70**, 066603 (2004).
56. Hao RY., Li L., Li Z.H., et al. *Opt. Commun.*, **245**, 383 (2004).
57. Yang RC., Li L., Li Z.H., et al. *Opt. Commun.*, **242**, 285 (2004).
58. Chen H.H., Liu C.S. *Phys. Rev. Lett.*, **37**, 693 (1976).
59. <http://scitation.aip.org/vsearch/publications/Oraevskii>.