КВАНТОВЫЕ ИЗМЕРЕНИЯ

PACS 03.67. –a

Информационные свойства обобщённых квантовых измерений*

Б.А.Гришанин, В.Н.Задков

Введено понятие обобщённого квантового измерения как преобразования, устанавливающего соответствие между исходными состояниями объекта и конечными состояниями системы объект – прибор с помощью классического информационного индекса, однозначно связанного с классически совместимым набором состояний системы объект – прибор. Показано, что это измерение включает в себя основные типы измерений: стандартное проективное, перепутывающее, мягкое и обобщённое измерения с частичным или полным разрушением начальной информации, содержащейся в объекте. Рассмотрен специальный класс частично разрушающих измерений, которые устанавливают соответствие между континуальным множеством состояний конечномерных квантовых систем и систем с бесконечномерным пространством состояний, обсуждается информационный смысл данных измерений и рассчитываются некоторые информационные характеристики.

Ключевые слова: *квантовое измерение, квантовая информация.*

1. Введение

Прогресс в развитии методов преобразования квантовой информации [1] делает естественным переход от стандартного квазиклассического понимания квантового измерения [2, 3] как установления однозначного соответствия между собственными состояниями измеряемой переменной объекта и показаниями квазиклассического прибора к более общему пониманию измерения как установления подобного соответствия между объектом и квантовым прибором в существенно квантовой форме, в общем случае включающей в себя перепутанность в системе объект – прибор [4] (так называемое перепутывающее измерение).

Подобное обобщение необходимо, например, для полного описания динамики измерительного процесса в экспериментах типа описанных в [5], где впервые было реализовано невозмущающее измерение числа фотонов в резонаторе $n = 0, 1$ с использованием в качестве измерительного прибора пробного атома и фотодетектора. При этом в течение времени срабатывания фотодетектора в системе объект – прибор существует квантовая перепутанность, а форма представления результата измерения в процессе формирования сигнала фотодетектора изменяется от полностью когерентной (с точностью до второстепенных искажений) в атоме до полностью некогерентной, т. е. деквантованной, в сигнале фотодетектора.

В рамках такого обобщённого понимания естественно возникает и представление о мягком измерении как измерении, точность которого ограничена внутренней квантовой неопределённостью используемых при измерении состояний индикаторной переменной [6]. В случае континуально-значной измеряемой переменной рассмотрение измерений данного типа фактически раскрывает информационное содержание внутренней квантовой неопределённости неортогональных квантовых состояний индикатора, описывая её не в традиционных для физики терминах флуктуаций физических переменных (пример такого описания – неравенство Гейзенберга), а непосредственно в терминах самих квантовых состояний, т. е. безотносительно к значениям физических переменных.

Для классического идеального измерения естественным дополнением к требованию абсолютной точности результата измерения является требование невозмущаемости измеряемой системы, а в квантовом случае в силу специфики множества квантовых состояний как линейного пространства такое требование в принципе невыполнимо. Любое взаимодействие с квантовой системой непременно изменяет часть её возможных состояний, в то время как это изменение, будучи всегда существенным в терминах гильбертова пространства квантовых состояний, в алгебре физических переменных в классической системе, описываемой предельным переходом $\hbar \to 0$, не учитывается.

В квантовой системе требование невозмущаемости может выполняться только по отношению к измеряемой переменной, что выделяет класс невозмущающих измерений. Однако в силу уникальности – некопируемости [7] – полной квантовой информации полное невозмущающее измерение означает одновременно и полное уничтожение когерентной, т. е. существенно квантовой, информации в начальном состоянии объекта [4], которая при полностью когерентном измерении перераспределяется между объектом и прибором и не существует в рассматриваемых по-отдельности составляющих системы объект – прибор.

Выполнение мягкого невозмущающего измерения

* Доложена на Четвертом семинаре памяти Д.Н.Клышко в Московском университете (17 – 19 мая 2005 г.).

Б.А.Гришанин, В.Н.Задков. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьёвы горы; e-mail: grishan@comsiml.phys.msu.ru, zadkov@comsiml.phys.msu.ru

Поступила в редакцию 7 июня 2005 г., после доработки – 8 июля 2005 г.

взамен полного позволяет сохранить часть когерентной информации в объекте. Противоположная ситуация – переход большей части информации к прибору – может быть реализована только при рассмотрении возмущающего измерения, когда состояние объекта возмущается. Примерами предельно возмущающего измерения, уничтожающего всю начальную информацию, являются полностью когерентный переход возбуждения от осциллятора A к осциллятору B в некотором наборе осцилляторов или чисто некогерентное измерение состояния двухуровневого атома с помощью детектирования излучённого фотона.

В настоящей работе рассматривается более общий класс измерений, который в противоположность определённому в [6] классу мягких измерений включает в себя возможность возмущения начального состояния по любым переменным, и анализируется наиболее интересный в отношении качественного содержания отображаемой информации случай неселективного отображения всех состояний $\psi = \sum_k c_k|k\rangle$ гильбертова пространства одной квантовой системы с ортогональным базисом $|k\rangle$ классически различимыми базисными состояниями $|\psi\rangle$ континуально-значной переменной другой более сложной системы с гильбертовым пространством состояний $\Psi = \int c_\psi|\psi\rangle \mathrm{d}\psi$. Помимо выявления потенциальных ресурсов, заключённых в преобразовании данного вида с точки зрения разработки новых методов преобразования квантовой информации, эти измерения представляют фундаментальный интерес как качественная интерпретация квантовой теории и позволяют найти наиболее общие соотношения между физическим содержанием преобразований квантовых систем и классической информацией, заключённой в значениях информационного индекса, устанавливающего взаимно однозначное соответствие между исходными и конечными квантовыми состояниями.

2. Определение индексирующего возмущающего измерения и его соответствие обобщённому измерению

До измерения состояние прибора можно считать заданным, поэтому измерение можно характеризовать не преобразованием в системе объект – прибор, а более простым изометрическим отображением состояний объекта на состояния системы объект – прибор. Физический смысл рассмотрения изометрического отображения V из пространства, соответствующего объекту A в пространство, соответствующее системе $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, состоит в том, что оно всегда может быть доопределено до унитарного преобразования U в системе $\mathrm{A}+\mathrm{B}$, которое соответствует отображению V при фиксированном начальном состоянии прибора $|0\rangle_\mathrm{B}$:

$$U|\psi)_\mathrm{A}|0\rangle_\mathrm{B} = V|\psi)_\mathrm{A}, \ \ \forall\psi \in H_\mathrm{A}.$$

Тем самым изометричность является условием физической реализуемости преобразования в форме динамически обратимой эволюции в составной системе объект – прибор.

Рассмотрим изометрическое преобразование вида

$$V = \sum_\alpha v_\alpha^{1/2}|\alpha\rangle_\mathrm{AB}(\alpha|_\mathrm{A} \qquad (1)$$

из гильбертова пространства H_A объекта A в пространство $H_\mathrm{A}\otimes H_\mathrm{B}$ системы объект – прибор $\mathrm{A}+\mathrm{B}$. Здесь векторы $|\alpha\rangle_\mathrm{AB}$ определяют ортогональный базис в пространстве объект – прибор, индексированный значениями α некоторой индикаторной переменной и реализующий новое представление исходной квантовой информации, считываемой в общем случае с помощью неортогональных «пробных» состояний $(\alpha|_\mathrm{A}$ (использование круглой скобки указывает на неортогональность состояний рассматриваемого набора); набор положительных чисел v_α имеет смысл кратности элементарных отображений $|\alpha)_\mathrm{A} \to |\alpha\rangle_\mathrm{AB}$, из которых результирующее преобразование V конструируется как когерентная (зависящая от фаз волновых функций) суперпозиция соответствующих обобщённых проекторов.

Условием изометричности данного преобразования является соотношение

$$V+V \equiv \sum_\alpha v_\alpha|\alpha)_\mathrm{A}(\alpha|_\mathrm{A} = \hat{I}_\mathrm{A}. \qquad (2)$$

Оно заведомо может быть выполнено, если набор отображаемых состояний $|\alpha)_\mathrm{A}$ является набором ортогональных базисов, произвольно повёрнутых по отношению друг к другу. В частности, для N равноправно представленных базисов в D-мерном пространстве имеем $v_\alpha = 1/(ND)$. Преобразование (1) является обобщённой модификацией канонического представления изометрического отображения $V = \sum_k |k\rangle_\mathrm{C}\langle k|_\mathrm{A}$ как преобразования полного ортогонального базиса в H_A в некоторый ортогональный набор в произвольном пространстве H_C, соответствующем некоторой физической системе C. Оно, во-первых, конкретизирует структуру отображающего пространства как пространства состояний системы объект – прибор $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ и, во-вторых, в общем случае использует переполненный набор состояний $|\alpha)$ для представления множества начальных состояний.

Индекс α в представлении (1) аккумулирует в классической форме информацию, ассоциированную с набором исходных квантовых состояний объекта $|\alpha)$. Значения индекса α взаимно однозначно отображаются набором классически различимых состояний $|\alpha\rangle_\mathrm{AB}$ составной системы. Это соответствие, т. е. наличие физического представления для абстрактно описываемой индексом α передаваемой информации, принимается за основу при определении преобразования (1) как разновидности чисто когерентного измерения, которое представляет выходную информацию об объекте в форме перепутанности состояния $|\alpha\rangle_\mathrm{AB}$. При учёте эффектов деквантования, выраженных в частичной потере когерентности результатов измерения без потерь классической информации, такое измерение описывается соответствующим супероператором [8]

$$\mathscr{M} = \mathscr{D}(V \odot V^+)$$

$$= \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}(v_\alpha v_\beta)^{1/2}|\alpha\rangle_\mathrm{AB}(\alpha|_\mathrm{A} \odot |\beta)_\mathrm{A}\langle\beta|_\mathrm{AB}\,, \qquad (3)$$

где $\mathscr{D} = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}|\alpha\rangle_\mathrm{AB}\langle\alpha|_\mathrm{AB} \odot |\beta\rangle_\mathrm{AB}\langle\beta|_\mathrm{AB}$ – супероператор дефазировки; $R_{\alpha\beta}$ – произвольная положительно определённая матрица с единичной диагональю, описывающая дефазировку состояний, а символ $\odot$ задаёт место подстановки преобразуемого оператора (матрицы плотности). При $R_{\alpha\beta} \equiv 1$, т. е. в отсутствие дефазировки, этот супероператор описывает просто представление преобразования V в терминах матрицы плотности.

Общее представление измерения в форме (3) и его чисто когерентный вариант (1) включают в себя:

– Стандартное проективное и перепутывающее измерения [4] при выборе в качестве отображаемой информации полного набора классически совместимых событий – ортогонального базиса $|k\rangle_{\mathrm{A}}$ и в качестве $|\alpha\rangle_{\mathrm{AB}}$ – дублированного базиса $|k\rangle_{\mathrm{A}}|k\rangle_{\mathrm{B}}$.

– Мягкое измерение [6] при замене ортогонального базиса прибора $|k\rangle_{\mathrm{B}}$ неортогональным набором $|k)_{\mathrm{B}}$.

– Рассматриваемое в настоящей работе обобщённое измерение с частичным разрушением исходной информации при выборе $|\alpha\rangle_{\mathrm{AB}} = |e_\alpha)_{\mathrm{A}}|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}$, где набор состояний $|e_\alpha)_{\mathrm{A}}$ полностью произволен, а набор $|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}$ ортогонален и однозначно отображает значения информационного индекса α, в то время как набор $(\alpha|_{\mathrm{A}}$ может содержать и неортогональные состояния.

Соответствующее обобщённому измерению преобразование (1) принимает вид

$$V = \sum_\alpha v_\alpha^{1/2} |e_\alpha)_{\mathrm{A}}|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}(\alpha|_{\mathrm{A}}, \tag{4}$$

где в случае неортогонального набора $(\alpha|_{\mathrm{A}}$ информационный индекс α не связан однозначно с классически различимыми состояниями, и его статистика включает в себя внутреннюю квантовую неопределённость отображаемых состояний $|\alpha)_{\mathrm{A}}$. Этот индекс может быть формально интерпретирован как номер элементарного когерентного субканала $|\alpha)_{\mathrm{A}} \to |e_\alpha)_{\mathrm{A}}|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}$, связывающего в общем случае классически несовместимые входные состояния объекта $|\alpha)_{\mathrm{A}}$ с состояниями системы объект – прибор $|e_\alpha)_{\mathrm{A}}|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}$.

В случае мягкого невозмущающего измерения ортогональность набора $|e_\alpha)_{\mathrm{A}} = |k\rangle_{\mathrm{A}}$ приводит к однозначному соответствию с информационным индексом $\alpha = k$ и, следовательно, к невозмущающему характеру измерения по переменным вида $\hat{\lambda} = \sum_k \lambda_k |k\rangle_{\mathrm{A}}\langle k|_{\mathrm{A}}$, а также к полному отсутствию когерентной информации прибора по отношению к начальному состоянию объекта [6]. Неортогональность же набора $|e_\alpha)_{\mathrm{A}}$ приводит к уменьшению информации, сохраняющейся в объекте, т. е. к возмущающему измерению, и переходу некоторого объёма когерентной квантовой информации в состояния прибора, показания которого α содержат квантовую неопределённость по отношению к состояниям объекта $|\alpha)_{\mathrm{A}}$ только при наличии у последних внутренней квантовой неопределённости и представлены выходными состояниями прибора $|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}$ однозначно. В предельном случае $|e_\alpha)_{\mathrm{A}} \equiv |0)_{\mathrm{A}}$ преобразование (4) соответствует полному переходу начальной информации из A в B.

В случае использования в качестве наборов $|e_\alpha)_{\mathrm{A}}$, $|\alpha)_{\mathrm{A}}$ ортогональных базисов $|k\rangle_{\mathrm{A}}$ преобразование (4) соответствует полностью когерентному перепутывающему измерению [4], приводящему к равноправному перераспределению начальной информации между A и B и полному отсутствию когерентной информации о начальном состоянии в отдельных компонентах системы $\mathrm{A}+\mathrm{B}$. В общем же случае распределение исходной информации об объекте между объектом и прибором определяется метрикой $Q_{\alpha\beta} = (e_\alpha|e_\beta)_{\mathrm{A}}$ набора $|e_\alpha)_{\mathrm{A}}$.

3. Связь преобразования обобщённого измерения с его представлением в форме положительной операторной меры

Рассмотрим супероператор (3), отображающий обобщённое преобразование (4) с учётом дефазировки:

$$\mathscr{M} = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}(v_\alpha v_\beta)^{1/2} |e_\alpha)_{\mathrm{A}}|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}(\alpha|_{\mathrm{A}} \odot |\beta)_{\mathrm{A}}\langle\beta|_{\mathrm{B}}(e_\beta|_{\mathrm{A}}. \tag{5}$$

Ему соответствует распределение вероятностей $P(\alpha) = \langle\alpha|_{\mathrm{B}}\hat{\rho}_{\mathrm{B}}|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}$, где $\hat{\rho}_{\mathrm{B}} = \mathrm{Tr}_{\mathrm{A}}\mathscr{M}\hat{\rho}_{\mathrm{A}}$ и $\hat{\rho}_{\mathrm{A}}$ – матрицы плотности прибора и объекта соответственно, для результатов измерения α, физически реализованных в форме квантовых состояний прибора. Это распределение имеет вид

$$P(\alpha) = \mathrm{Tr}_{\mathrm{A}}\hat{E}_\alpha\hat{\rho}_{\mathrm{A}} \tag{6}$$

где $\hat{E}_\alpha = v_\alpha|\alpha)_{\mathrm{A}}(\alpha|_{\mathrm{A}}$ – положительная операторная мера (ПОМ). Данное выражение не зависит ни от степени когерентности преобразования, ни от формы её представления в выходном состоянии объекта и соответствующей перепутанности системы объект – прибор после измерения, поскольку описывает лишь классически (внутренне) совместимую информацию прибора о начальном состоянии. Оно описывает, однако, не квантовый результат измерения, а результирующую неселектированную информацию, сохранённую в объекте в квазиклассической форме.

Результирующая же информация, хотя и отображаемая в классически различимой форме, описывается редуцированным супероператором объект – прибор

$$\mathscr{M}_{\mathrm{B}} = \sum_{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}(v_\alpha v_\beta)^{1/2}(e_\beta|e_\alpha)_{\mathrm{A}}|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}(\beta|_{\mathrm{A}} \odot |\beta)_{\mathrm{A}}\langle\beta|_{\mathrm{B}}, \tag{7}$$

учитывающим квантовые корреляции с исходным состоянием. Даже при полностью когерентном измерении выражение (7) содержит фактор декогеренции $R_{\alpha\beta} = (e_\beta|e_\alpha)_{\mathrm{A}}$, обусловленный игнорированием когерентной информации, представленной в форме перепутанности системы объект – прибор. Это деквантование не является полным. Рассмотрение же полного деквантования выходной информации при $R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ приводит, как нетрудно видеть, к преобразованию

$$\mathscr{M}_{\mathrm{B}} = \sum_\alpha v_\alpha|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}(\alpha|_{\mathrm{A}} \odot |\alpha)_{\mathrm{A}}\langle\alpha|_{\mathrm{B}},$$

которому по-прежнему соответствует распределение вероятностей (6) в алгебре классических событий, описываемых множеством совместимых состояний $|\alpha\rangle_{\mathrm{B}}$ и его подмножествами.

Обобщённые измерения в терминах ПОМ широко обсуждались ранее, в частности в связи с проблемой оптимального измерения континуальных квантовых переменных типа координат и импульсов [9 – 11]. Приведённое рассмотрение имеет качественное отличие, связанное с конечномерностью рассматриваемого пространства H_{A} и соответствующей ему возможностью обсуждения информации обо всех квантовых состояниях гильбертова пространства, на которые выполнявшийся ранее анализ измерений в бесконечномерных квантовых системах заведомо не распространяется.

4. Селективное обобщённое измерение

Выделенным специальным случаем является селективное измерение, отличающееся от перепутывающего измерения обобщённым видом выходных состояний прибора: $|k\rangle_{\rm A} \to |e_\alpha\rangle_{\rm A} = |k\rangle_{\rm A}$, $k = 1, \ldots, D$, которые теперь отличаются от базисных состояний $|k\rangle_{\rm A}$ измеряемой переменной и, будучи в общем случае представлены неортогональным набором, не позволяют объекту сохранить исходное состояние для измеряемой переменной. В случае чисто когерентного измерения в качестве компенсации прибор приобретает ненулевую когерентную информацию о начальном состоянии объекта, в предельном случае $|k\rangle_{\rm A} \equiv |0\rangle_{\rm A}$ – полную, т. е. количественно равную исходной энтропии объекта. При этом информационные соотношения для отображения объект – прибор в данном случае, очевидно, воспроизводят те же соотношения для отображения объект – объект в случае мягкого измерения, преобразование для которого отличается обращением $H_{\rm A} \rightleftharpoons H_{\rm B}$ результирующих состояний объекта и прибора. Поэтому соответствующие зависимости, приведённые в [6] для когерентной информации объект – объект в двухуровневой системе, сохраняют свою силу и в рассматриваемом случае. Квазиклассическая же информация, приобретаемая прибором, в силу абсолютной точности измерения, всегда является полной, т. е. количественно совпадает с энтропией измеряемой переменной.

5. Неселективное обобщённое измерение

Другим выделенным специальным случаем является неселективное измерение, для которого набор отображаемых состояний $|\alpha\rangle_{\rm A}$ включает в себя все квантовые состояния объекта. В данном случае информационный индекс α однозначно отображает все физически различимые элементы гильбертова пространства $H_{\rm A}$ и естественным представлением множества его значений является единичная $(2D-2)$-мерная сфера вещественного эвклидова пространства. Соответствующее обобщённое измерение при этом является отображением $H_{\rm A} \to H_{\rm A} \otimes H_{\rm B}$ с пространством состояний прибора $H_{\rm B} = L_2(H_{\rm A})$ с волновыми функциями континуального аргумента $\psi_{\rm B}(\alpha)$. Кратность состояний $\mathrm{d}v = \sum_{\mathrm{d}\upsilon} v_\alpha$, соответствующая элементу множества $\alpha \in \mathrm{d}\upsilon$, имеет в данном случае вид $\mathrm{d}v = D\mathrm{d}\upsilon/\upsilon$, где υ – полный объём гиперсферы физических состояний. На рис.1 показан пример множества состояний двухуровневой квантовой стстемы. Он соответствует, в частности, измерению вектора поляризации единственного фотона или волновой функции одиночного двухуровневого атома.

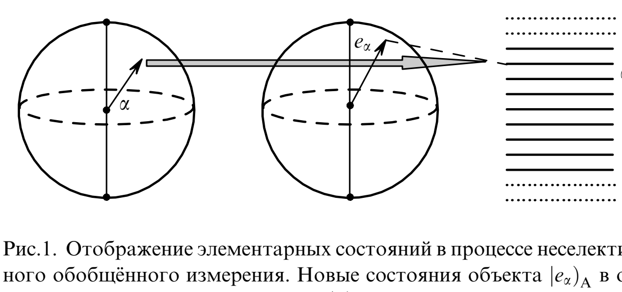

Рис.1. Отображение элементарных состояний в процессе неселективного обобщённого измерения. Новые состояния объекта $|e_\alpha\rangle_{\rm A}$ в общем случае отличны от состояний $|\alpha\rangle_{\rm A}$.

Распределение информации между объектом и прибором. Количество информации, сохраняемой в объекте, определяется информативностью переполненного базиса $|e_\alpha\rangle_{\rm A}$, который частично дублирует информацию, представленную состояниями прибора $|\alpha\rangle_{\rm B}$, но в общем случае соответствует частичной или полной утрате начальной информации объекта $|\alpha\rangle_{\rm A}$. В случае полной когерентности измерения, т. е. при $R_{\alpha\beta} \equiv 1$, показателем информативности этого базиса для чистого входного состояния $\hat\rho_{\rm A} = |\psi\rangle_{\rm A}\langle\psi|_{\rm A}$ является перепутанность $E(|\psi\rangle_{\rm AB})$ результирующего состояния $|\psi\rangle_{\rm AB} = V|\psi\rangle_{\rm A}$ объект – прибор. Прибор в данном случае содержит всю доступную информацию [12] о всём гильбертовом пространстве состояний объекта, представленную, однако, в квантовой форме, включающей в себя перепутанность с объектом. Эта форма переходит в классическую либо после дополнительного проективного измерения, либо после информационно эквивалентного этой процедуре полностью дефазирующего преобразования $\mathscr{D}$ в (3) при $R_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta}$.

Для иллюстрации расчёт может быть выполнен для двухуровневой системы ($D = 2$) при использовании в качестве $|e_\alpha\rangle_{\rm A}$ всех состояний части сферы Блоха с угловыми переменными ϑ и φ, получаемой отображением $\vartheta \to q\vartheta$, где $0 \leqslant q \leqslant 1$ – коэффициент сжатия исходной сферы Блоха, отображаемой в её часть, соответствующую $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi q$. При таком выборе отображения ($q \leqslant 1$) имеется асимметрия по отношению к значению полярного угла s начального состояния $\alpha_0 = (s, \varphi_0)$, которая максимальна при $q = 0$ и отсутствует при $q = 1$. Возникающая после измерения перепутанность системы объект – прибор может быть представлена как энтропия $S(\hat\rho'_{\rm A}) = -\mathrm{Tr}\,\hat\rho'_{\rm A}\log_2\hat\rho'_{\rm A}$ парциальной матрицы плотности $\hat\rho'_{\rm A} = \mathrm{Tr}_{\rm B}|\psi\rangle_{\rm AB}\langle\psi|_{\rm AB}$ пребразованного состояния объекта*. Соответствующая зависимость $E(s,q)$ показана на рис.2.

Результат расчёта для полностью неселективного представления конечного состояния объекта при $q = 1$ и, следовательно, $|e_\alpha\rangle_{\rm A} = |\alpha\rangle_{\rm A}$ очевиден без полных вычи-

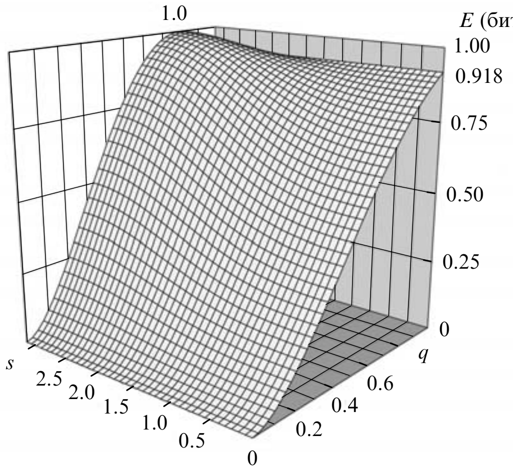

Рис.2. Зависимость перепутанности E от коэффициента сжатия сферы Блоха q и значения угла $\vartheta = s$, соответствующего начальному состоянию. Максимальное значение 1 бит достигается при $s = \pi$ и $q = 0.7978$, а при $q = 1$ перепутанность не зависит от s и соответствует энтропии $S = E_0 = 0.918$ бит чистого состояния кубита после его полной деполяризации.

*При расчёте $\hat\rho'_{\rm A}$ вычисление следа по B в рассматриваемом континуальном пределе сводится к соответствующему интегралу по сфере Блоха с дифференциалом $\mathrm{d}v = \sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi/2\pi$.

слений, поскольку в данном случае $\hat{\rho}'_{\mathrm{A}}$ соответствует полностью деполяризованному начальному состоянию (см., напр., [13], формула (3.115) при $p=1$):

$$\hat{\rho}'_{\mathrm{A}} = (2/3)|\alpha_0\rangle\langle\alpha_0| + (1/3)|\bar{\alpha}_0\rangle\langle\bar{\alpha}_0|,$$

где $|\bar{\alpha}_0\rangle$ ортогонально $|\alpha_0\rangle$; поэтому независимо от α_0 получаем $E = E_0 = (2/3)\log_2(3/2) + (1/3)\log_2(3/1)$.

Результат же $E = 1$ бит, т. е. полная перепутанность, достигаемая для начального состояния, характеризуемого углом $s = \pi$, которое представлено на сфере Блоха точкой, противоположной точке сжатия $\vartheta = 0$, и промежуточного значения коэффициента сжатия, кажется несколько неожиданным и требует качественного пояснения. Это облегчается благодаря тому обстоятельству, что при данной ориентации имеет место симметрия относительно оси сферы Блоха, в результате чего матрица плотности в соответствующем базисе диагональна и имеет вид $\hat{\rho}'_{\mathrm{A}} = p_1|1\rangle_{\mathrm{A}}\langle 1|_{\mathrm{A}} + p_2|2\rangle_{\mathrm{A}}\langle 2|_{\mathrm{A}}$. При этом, поскольку направление вектора состояния с $\vartheta = 0$ противоположно направлению вектора начального состояния с $s = \pi$, в соответствии с приведённой выше формулой для $q = 1$ вероятность $p_1 = 1/3$. При изменении параметра сжатия до значения $q = 0$, соответствующего коллапсу сферы Блоха в точку $\vartheta = 0$, вероятность противоположного состояния p_2 уменьшается до нуля, а, следовательно, вероятность p_1 – до единицы согласно аналитическому выражению

$$p_1 = 1 - p_2 = \frac{3 - 2q^2 + \cos\pi q}{4(1-q^2)} - \frac{1-\cos\pi q}{4(4-q^2)}.$$

При этом в силу непрерывности вероятность p_1 проходит через значение $1/2$, которое и соответствует максимально возможному значению перепутанности двух систем, одна из которых является кубитом.

Отметим также, что максимальное значение перепутанности $E_0 = 0.918$ бит, достигаемое при полном воспроизведении объектом после измерения всех состояний гильбертова пространства, очень близко к полной перепутанности, достигаемой при полностью когерентном невозмущающем перепутывающем измерении. Однако в последнем случае это реализуется лишь при оптимальном выборе начальной волновой функции объекта. В рассмотренном же случае полностью неселективного измерения величина E_0 инвариантна относительно начального состояния $|\alpha_0)_{\mathrm{A}}$ благодаря полному равноправию всех состояний.

6. Конкуренция объект – прибор при отборе неселективной квантовой информации

Отличительным свойством неразрушающего квантового измерения является отсутствие конкуренции объект – прибор в силу возможности неограниченного размножения классически совместимой информации, извлекаемой при таком измерении. Однако при отборе неселективной информации, связанной с неортогональным переполненным набором $|\alpha_0)_{\mathrm{A}}$, типичным, в частности, для протоколов квантовой передачи ключа [14], возникает конкуренция, обусловленная одной и той же причиной – невозможностью невозмущающего дублирования информации о неортогональных квантовых состояниях. Для количественного представления информации при обсуждении конкуренции данного типа адекватно рассмотрение информационной меры Холево, прямо учитывающей её квантовую специфику.

Информация определяется для полуклассического квантового канала, характеризуемого матрицей плотности $\hat{\rho}(\alpha)$, зависящей от классических сообщений α на входе канала, выражением

$$I_{\mathrm{H}} = S(\bar{\hat{\rho}}) - \int P(\mathrm{d}\alpha)S(\hat{\rho}(\alpha)), \tag{8}$$

где $\bar{\hat{\rho}} = \int \hat{\rho}(\alpha)P(\mathrm{d}\alpha)$; $P(\mathrm{d}\alpha)$ – распределение вероятностей, или частоты появления, классических сообщений α. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом преобразовании квантового измерения классический параметр α соответствует информационному индексу начальных состояний объекта $|\alpha)_{\mathrm{A}}$, а два канала задачи (объект – объект и объект – прибор) описываются усреднением состояния, отвечающего волновой функции $V|\alpha)_{\mathrm{A}}$ системы объект – прибор (или в общем случае – матрицы плотности, возникающей после некогерентного преобразования (3)), по конкурирующей системе.

Матрицы плотности соответствующих каналов для равномерного распределения $P(d\alpha)$ имеют вид

$$\hat{\rho}(\alpha) = \frac{D}{v}\int \mathrm{d}v_\beta |(\beta|\alpha)_{\mathrm{A}}|^2 |e_\beta)_{\mathrm{A}}(e_\beta|_{\mathrm{A}}, \tag{9}$$

$$\bar{\hat{\rho}}_{\mathrm{A}} = \frac{1}{v}\int \mathrm{d}v_\beta |e_\beta)(e_\varepsilon\beta|, \tag{10}$$

$$\hat{\rho}_{\mathrm{B}}(\alpha) = \sum_{\beta\beta'} (v_\beta v_{\beta'})^{1/2}(e_\beta|e_{\beta'})_{\mathrm{A}}(\beta'|\alpha)_{\mathrm{A}}(\alpha|\beta)_{\mathrm{A}}|\beta'\rangle_{\mathrm{B}}\langle\beta|_{\mathrm{B}}, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}\bar{\hat{\rho}}_{\mathrm{B}} &= \frac{1}{D}\sum_{\beta\beta'} (v_\beta v_{\beta'})^{1/2}(e_\beta|e_{\beta'})_{\mathrm{A}}(\beta'|\beta)_{\mathrm{A}}|\beta'\rangle_{\mathrm{B}}\langle\beta|_{\mathrm{B}} \to \bar{\hat{\rho}}_{\mathrm{B}} \\ &= \frac{1}{v}\int \mathrm{d}v_\beta |\beta)_{\mathrm{A}}|e^*_\beta)(e^*_\beta|(\beta|_{\mathrm{A}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Второе выражение в (12) является изометрическим отображением континуальной матрицы плотности прибора в дискретное пространство $H_{\mathrm{A}} \otimes H_{\mathrm{A}}$, которое реализует активное подпространство состояний и с помощью которого выполняются количественные расчёты. Энтропии же матриц плотности $\hat{\rho}_{\mathrm{A}}(\alpha)$, $\hat{\rho}_{\mathrm{B}}(\alpha)$ совпадают, так что нет необходимости использовать континуальное представление. Зависимости от коэффициента сжатия сферы Блоха информации для прибора и объекта, рассчитанной по общей формуле (8) с использованием выражений (9) – (12), приведены на рис.3.

Полученные зависимости указывают на относительно слабую конкуренцию в системе объект – прибор при извлечении полуклассической информации по сравнению, например, с конкуренцией при извлечении когерентной информации в случае селективного измерения, когда сохранение всей информации в объекте приводит к её полному отсутствию в приборе [4].

7. Заключение

Таким образом, преобразование частично разрушающего квантового измерения обобщает в единой форме все основные обсуждавшиеся ранее типы квантовых из-

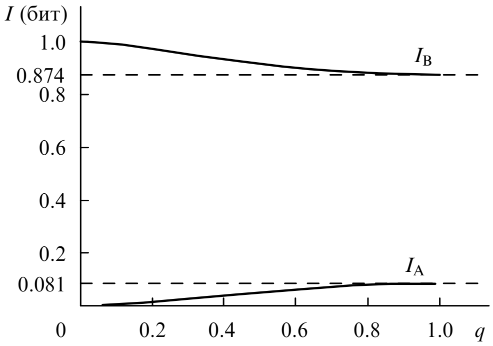

Рис.3. Зависимости информации Холево, получаемой прибором (I_B) и сохраняемой в объекте (I_A), о равномерно распределённом ансамбле начальных состояний $|\alpha)_A$ объекта – кубита от степени q сохранения информации в объекте. Максимальное значение информации объекта $I_A = 0.081$ бит соответствует минимальному значению измеренной информации $I_B = 0.874$ бит.

мерений: стандартное проективное и перепутывающее, мягкое и разрушающее, когерентное и деквантующее.

Неселективный вариант такого измерения, как показано на примере двухуровневой системы, обладает интересной особенностью, выражающейся в возможности достижения максимальной перепутанности в системе объект – прибор при промежуточной степени сохранения объектом заключённой в нём начальной информации. При максимальном же сохранении объектом начальной информации перепутанность достигает значения, очень близкого к максимальному, для любых начальных чистых состояний.

Неселективное измерение, реализуя равноправное измерение всех динамических переменных квантовой системы, характеризуется существенно более слабой, чем в случае полного селективного измерения, конкуренцией в распределении квантовой информации между объектом и прибором. В схеме эксперимента [5] переход к неселективному измерению соответствует переходу от измерения числа фотонов $n = 0, 1$ к измерению самого суперпозиционного состояния $|\alpha\rangle_A = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle$ фотонного поля. При этом наиболее очевидная трудность реализации измерения подобного типа, как это следует из изложенных в данной статье соотношений, связана с необходимостью установления равноправной корреляции между каждым состоянием $|\alpha\rangle_A$ и соответствующими состояниями континуального набора ортогональных, т. е. классически различимых, состояний прибора.

1. Боумейстер Д., Экерт А., Цайлингер А. *Физика квантовой информации: Квантовая криптография. Квантовая телепортация. Квантовые вычисления* (М.: изд-во «Постмаркет», 2002).
2. Фон Нейман Дж. *Математические основы квантовой механики* (М.: Наука, 1968).
3. Садбери А. *Квантовая механика и физика элементарных частиц* (М.: Мир, 1989).
4. Grishanin B.A., Zadkov V.N. *Phys. Rev. A*, **68**, 022309 (2003).
5. Nogues G., Rauschenbeutel A., Osnaghi S., Brune M., Raimond J.M., Haroche S. *Nature*, **400**, 239 (1999).
6. Grishanin B.A., Zadkov V.N. quant-ph/0506045 (2005).
7. Гришанин Б.А., Задков В.Н. *Радиотехника и электроника*, **47** (9), 1029 (2002).
8. Grishanin B.A., Zadkov V.N. *Laser Phys. Lett.*, **2** (2), 106 (2005).
9. Хелстром К. *Квантовая теория проверки гипотез и оценивания* (М.: Мир, 1979).
10. Гришанин Б.А. *Изв. АН СССР. Сер. Техническая кибернетика*, **11** (5), 127 (1973).
11. Холево А.С. *Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории* (М.: Наука, 1980).
12. Caves C.M., Fuchs C.A. quant-ph/9601025 (1996).
13. Preskill J. *Lecture Notes on Physics 229: Quantum Information and Computation*, http:// www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229/, p. 106.
14. Bennett Ch.H., Brassard G. *Proc. IEEE Int. Conf. on Computer, System and Signal Processing* (Bangalore, India; New York: IEEE, 1984, p. 175).