

Об альтернативных методах измерения радиуса и коэффициента распространения осесимметричных лазерных пучков

А.С.Дементьев, А.Йовайша, Г.Шилко, Р.Чегис

На основе созданных эффективных численных методов расчета распространения световых пучков проанализированы альтернативные методы измерения радиусов и коэффициентов распространения пучков, предложенных в стандарте ISO 11146. Конкретные вычисления альтернативных коэффициентов распространения M_i^2 , проведенные для ряда тестовых пучков сложной пространственной структуры, показали, что предложенные в стандарте коэффициенты корреляции c_i не устанавливают универсальной взаимно однозначной связи между альтернативными коэффициентами распространения M_i^2 и инвариантными коэффициентами распространения M_σ^2 , находимыми методом моментов.

Ключевые слова: радиус пучка, метод моментов, коэффициент распространения пучка, альтернативные методы измерения, международный стандарт.

1. Введение

К числу основных параметров, характеризующих осесимметричный лазерный пучок, относятся радиус пучка $w(z)$, радиус кривизны волнового фронта $R(z)$ и угловая расходимость θ . Однако эти параметры достаточно просто определяются лишь для гауссовых пучков [1–3]. В случае пучков со сложной пространственной структурой Международная организация стандартов предложила использовать для определения радиуса пучка и других параметров, в том числе коэффициента распространения M^2 , нормированные моменты распределения плотности мощности пучка [4]. Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах на основе метода моментов поперечного распределения плотности потока энергии было предложено еще в 1971 г. [5]. Основное удобство описания пучков с использованием этого метода состоит в том, что радиус осесимметричного пучка изменяется вдоль направления распространения по тому же закону $w_\sigma^2(z) = w_{\sigma 0}^2 + \theta_{\sigma 0}^2(z - z_{\sigma 0})^2$, что и в случае осесимметричных гауссовых пучков; здесь $w_{\sigma 0}$ – радиус пучка в плоскости $z = z_{\sigma 0}$ обобщенной перетяжки, $\theta_{\sigma 0}$ – половина полной расходимости пучка [3, 4]. Для гауссовых пучков введенные параметры совпадают с обычными, для которых выполняется соотношение $w_0\theta_0 = \lambda/\pi$, где λ – длина волны [1, 2].

В общем случае это соотношение приобретает вид $w_{\sigma 0}\theta_{\sigma 0} = M_\sigma^2\lambda/\pi$, где $M_\sigma^2 \geq 1$ – так называемый коэффициент распространения пучка [3, 4]. Отметим, что коэффициент распространения минимален для гауссовых пучков ($M_\sigma^2 = 1$), а для всех остальных $M_\sigma^2 > 1$, причем его численное значение сохраняется при распространении

пучка через оптические системы 1-го порядка [1–3]. Именно в этом свойстве инвариантности введенного коэффициента M_σ^2 и заключается его основная привлекательность и ценность. Хотя критические замечания по поводу введенного таким образом параметра (см., напр., [6, 7]) достаточно хорошо известны, тем не менее в русскоязычной литературе [8] также рекомендуется действовавший до недавнего времени ISO-стандарт 11146 [4], а коэффициент распространения (или «качества») пучка M_σ^2 уже достаточно широко используется в журнальных статьях.

К сожалению, измерение радиусов пучков и коэффициентов распространения, определенных с помощью вторых моментов, требует, во-первых, многоэлементных датчиков для измерения поперечного распределения интенсивности лазерных пучков, что возможно не для всех длин волн. Во-вторых, обработка результатов измерений, полученных при помощи датчиков типа CCD- или CMOS-камеры [9], сопровождается определенными трудностями, обусловленными наличием в измеренном распределении интенсивности (плотности энергии) темного неоднородного основания и тепловых шумов отдельных пикселей (см., напр., [3, 9–11] и цитируемую там литературу). Кроме того, CCD-камеры хорошего качества остаются достаточно дорогостоящими. В связи с этим действовавший стандарт [4, 8] разрешал для измерения радиусов пучков и коэффициентов распространения применять так называемые альтернативные методы, основанные на использовании изменяющейся круговой апертуры, движущихся ножа или щели. В стандарте [4] предполагается, что существует корреляция между коэффициентами распространения M_σ^2 и M_i^2 , определенными с помощью альтернативных методов, которая устанавливается соотношением $M_\sigma = c_i(M_i - 1) + 1$. Эта линейная (по $M = \sqrt{M^2}$) связь позволяет осуществлять простую конверсию результатов, если известны коэффициенты корреляции c_i . Рекомендуются в [4] коэффициенты c_i были установлены в экспериментах с маломощными газовыми лазерами. Как утверждается в [4], для пучков с коэффициентами распространения $M^2 \geq 4$ и для лазеров других типов указанные значения коэффициен-

A.S.Dement'ev, A.Jovaiša. Institute of Physics, Lithuania, LT-02300 Vilnius, Savanoriu av., 231; e-mail: aldement@ktl.mii.lt; web-site: http://www.fi.lt

R.Čiegis, G.Silko. Vilnius Gediminas Technical University, Lithuania, LT-10223 Vilnius, Sauletekio al., 11

тов требуют дополнительной проверки. Однако из-за своей простоты альтернативные методы достаточно широко используются и для измерения радиусов пучков и коэффициентов распространения различных твердотельных лазеров [12–14], в том числе лазеров с обращением волнового фронта, обладающих высокой степенью когерентности излучения [13, 14].

Одним из наиболее часто используемых альтернативных методов является метод измерения радиуса пучка и коэффициента распространения с помощью изменяющейся круглой диафрагмы [15]. Недавно было показано, что для некогерентной суперпозиции двух соосных гауссовых пучков определяемый таким способом коэффициент распространения M_a^2 может быть меньше единицы [16]. Это означает, что для положительного коэффициента корреляции $c_a > 0$, и определяемый методом моментов коэффициент распространения $M_\sigma^2 < 1$. Данный пример показывает, что применение альтернативных методов в предположении существования указанной выше корреляции может приводить к физически неудовлетворительным результатам. Тем не менее и в новой редакция стандарта [17] сохраняется без изменения возможность использования альтернативных методов измерения. Поэтому в настоящей работе на основе разработанных эффективных численных методов расчета распространения и фокусировки лазерных пучков сложной пространственной структуры [18] проведен детальный анализ соотношения $M_\sigma = c_i(M_i - 1) + 1$ для ряда осесимметричных пучков с известными значениями коэффициентов распространения M_σ^2 и показано, что универсального взаимно однозначного соответствия между M_σ^2 и коэффициентами распространения M_i^2 , которые найдутся альтернативными методами, не существует.

2. Метод расчета фокусировки сложных пучков

Ограничимся для простоты рассмотрением осесимметричных монохроматических пучков $\vec{E}(r, z, t) = \text{Re}[\hat{e} \times u(r, z) \exp(ikz - i\omega t)]$. Здесь \hat{e} – единичный вектор поляризации, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, λ – длина волны, ω – циклическая частота, а медленно меняющаяся комплексная амплитуда $u(r, z)$ удовлетворяет в свободном пространстве параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\Delta_r}{2ik} = 0, \tag{1}$$

где

$$\Delta_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right)$$

– поперечный лапласиан. Хорошо известно [1–3], что уравнение (1) обладает решениями в виде мод Лагерра – Гаусса (ЛГ):

$$\tilde{u}_p(r, z) = \left[\frac{2}{\pi \tilde{w}^2(z)} \right]^{1/2} L_p \left(\frac{2r^2}{\tilde{w}^2(z)} \right) \times \exp \left[-\frac{r^2}{\tilde{w}^2(z)} + \frac{ikr^2}{2\tilde{R}(z)} - i(2p + 1) \arctan \frac{\lambda(z - \tilde{z}_0)}{\pi \tilde{w}_0^2} \right], \tag{2}$$

где $L_p(\cdot)$ – полином Лагерра, а радиус пучка основной гауссовой моды $\tilde{w}(z)$ и радиус кривизны волнового фрон-

та $\tilde{R}(z)$ задаются формулами

$$\tilde{w}(z) = \tilde{w}_0 \left\{ 1 + \left[\frac{\lambda(z - \tilde{z}_0)}{\pi \tilde{w}_0^2} \right]^2 \right\}^{1/2} \text{ и} \tag{3}$$

$$\tilde{R}(z) = (z - \tilde{z}_0) \left\{ 1 + \left[\frac{\pi \tilde{w}_0^2}{\lambda(z - \tilde{z}_0)} \right]^2 \right\}.$$

Значения радиусов $\tilde{w}(z)$ и $\tilde{R}(z)$ однозначно определяются положением плоскости перетяжки \tilde{z}_0 и ее радиусом \tilde{w}_0 . Очевидно, что и, наоборот, по значениям радиусов $\tilde{w}(z)$ и $\tilde{R}(z)$ можно найти положение плоскости перетяжки \tilde{z}_0 и ее радиус \tilde{w}_0 .

Хорошо известно [1–3], что любое осесимметричное решение уравнения (1) можно разложить по собственным модам (2)

$$u(r, z) = \sum_{p=0}^{\infty} \tilde{c}_p(z_1) \tilde{u}_p(r, z), \tag{4}$$

где значения коэффициентов

$$\tilde{c}_p(z_1) = 2\pi \int_0^{\infty} u(r, z_1) \tilde{u}_p^*(z_1) r dr$$

зависят от выбора не только начальной плоскости $z = z_1$, но и параметров, определяющих набор собственных мод (2). Этот существенный момент подчеркивается знаком тильда в разложении (4). Поясним это следующим простым примером. Решение уравнения (1) в виде какой-либо моды ЛГ $u_q(r, z)$ всегда можно разложить по полной системе мод (2). Однако в общем случае потребуется большое число членов разложения (4). И только в случае, когда параметры мод разложения точно совпадают с параметрами исходной моды, потребуется всего один член ($p = q$) в разложении (4). При описании дифракции исходного пучка на апертуре, очевидно, вновь потребуются весьма много мод ЛГ [19], причем критерии их выбора в общем случае весьма неопределенны [20]. По-видимому, именно этой причиной обусловлено то, что эффективный метод разложения по модам (МРМ) используется в численных расчетах дифракционных задач относительно редко [1–3, 18–22].

Итак, для эффективного применения МРМ в численных расчетах распространения пучков сложной структуры требуются дополнительные соображения, для рассматриваемой задачи связанные, очевидно, с коэффициентом распространения пучков. Так как для пучков, ограниченных жесткими диафрагмами, определение коэффициента распространения пучка встречает некоторые трудности [3], ограничимся в дальнейшем случае не ограниченных жесткими диафрагмами пучков. При распространении таких пучков сохраняются полная мощность и коэффициент распространения [23, 24]

$$P(u) = 2\pi \int_0^{\infty} |u|^2 r dr, \tag{5}$$

$$M_\sigma^2(u) = \left[\int_0^{\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 r dr \int_0^{\infty} r^3 |u|^2 dr - \frac{1}{4} \left| \int_0^{\infty} \left(u \frac{\partial u^*}{\partial r} - u^* \frac{\partial u}{\partial r} \right) r^2 dr \right|^2 \right]^{1/2} \left(\int_0^{\infty} |u|^2 r dr \right)^{-1}. \tag{6}$$

Кроме того, удобно ввести также определенные методом

моментов радиус пучка и радиус кривизны пучка соответственно [3, 23],

$$w_\sigma(u) = 2 \left[\frac{\pi}{P(u)} \int_0^\infty r^3 |u|^2 dr \right]^{1/2}, \quad (7)$$

$$\frac{1}{R_\sigma(u)} = \frac{-i\lambda}{w_\sigma^2(u)P(u)} \int_0^\infty r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} u^* - u \frac{\partial u^*}{\partial r} \right) dr,$$

а также обобщенный комплексный параметр пучка

$$\frac{1}{q_\sigma} = \frac{1}{R_\sigma} + \frac{i\lambda M_\sigma^2}{\pi w_\sigma^2}. \quad (8)$$

Тогда $ABCD$ -закон [1–3] можно использовать для любых, не только гауссовых, пучков [23]. Его применение показывает, что в любой пучок можно «вписать» такой гауссов пучок, радиус которого $\bar{w}_G(z) = (w_\sigma^2(z)/M_\sigma^2)^{1/2}$ и радиус кривизны $R_G(z) = R_\sigma(u)$ изменяются как у обычного гауссова пучка с длиной рэлеевской перетяжки $\bar{z}_R = k\bar{w}_{G0}^2/2$, где \bar{w}_{G0} – радиус перетяжки вписанного гауссова пучка [25, 26].

Концепция вписанного гауссова пучка часто полезна при оптимизации разложения по модам ЛГ

$$u_{\text{ап}}(r, z) \approx \sum_{p=0}^{N_p} \tilde{c}_p \tilde{u}_p(r, z) \quad (9)$$

с целью минимизации ошибки аппроксимации [25–28]. С использованием энергетической нормы в работе [28] было показано, что для пучков с плоским волновым фронтом во входной плоскости ($R_\sigma(u) = \infty$) для относительной ошибки

$$\varepsilon = \frac{\int_0^\infty |u - u_{\text{ап}}|^2 r dr}{\int_0^\infty |u|^2 r dr}$$

соотношение $\varepsilon \leq (M_\sigma^2 - 1)/2N_p$ справедливо в том случае, если в разложении (7) использовать моды ЛГ с $\tilde{w}_0 = \bar{w}_{G0}$ во входной плоскости.

К сожалению, в общем случае таких простых оценок получить не удастся, тем более для других норм [18]. Поэтому в настоящей работе применялась следующая процедура. Вначале параметры мод ЛГ и их число подбирались так, чтобы для стартовой плоскости (обычно это $z_1 = 0$) ошибки в заданной норме были минимальными. Причем в общем случае для достижения этой цели радиусы пучка ($\tilde{w}(z_1)$) и кривизны ($\tilde{R}(z_1)$) основной моды ЛГ, вообще говоря, могут не совпадать с соответствующими радиусами исходного (или вписанного гауссова) пучка, определяемыми методом моментов.

Получив минимальные ошибки в начальной плоскости, можно надеяться на то, что и в других плоскостях будут реализовываться достаточно малые ошибки в заданной норме. В качестве дополнительных мер контроля точности разложения пучков по модам ЛГ вначале по формулам (5), (6) вычислялись мощность и коэффициент распространения исследуемого пучка, которые сравнивались с соответствующими выражениями [25] для мощности и коэффициента распространения когерентной суперпозиции ЛГ мод:

$$P(u) \cong \sum_{p=0}^{N_p} \tilde{c}_p^* \tilde{c}_p, \quad M_\sigma^2(u) \cong \left\{ \left[\sum_{p=0}^{N_p} (2p+1) R_{pp} \right]^2 - \left[2 \sum_{p=0}^{N_p} (p+1) R_{pp+1} \right]^2 \right\}^{1/2}, \quad (10)$$

где $R_{nm} = \tilde{c}_n^* \tilde{c}_m / P(u)$ – нормированные коэффициенты разложения, причем в начальной плоскости для коллимированных пучков должно выполняться условие

$$\sum_{p=0}^{N_p} (p+1) \text{Im} R_{pp+1} \cong 0.$$

Если для начальных пучков с абберациями и кривизной волнового фронта R_σ после фокусирующей линзы с фокусным расстоянием f использовать моды ЛГ с радиусом кривизны, получаемым из выражения

$$\frac{1}{\tilde{R}} = \frac{1}{f} - \frac{1}{R_\sigma}, \quad (11)$$

то соотношение (10) вновь справедливо и его опять можно использовать для контроля точности разложения.

Для сокращения числа узлов радиальной сетки N_r обычно использовались два независимых преобразования. Во-первых, для заданной плоскости z расчеты велись только внутри зависящей от z апертуры, изменяющейся по определенному закону, например подобно радиусу исходного пучка: $A(z) \sim w_\sigma(z)$. Во-вторых, применялось преобразование поперечной координаты, позволяющее из однородной сетки $r_j(z) = jA(z)/N_r$ получать неоднородную по радиусу сетку с приосевым сгущением точек ($j = 0, 1, 2, \dots$). С учетом того, что определенный с помощью метода моментов радиус высшей ЛГ моды $w_{p\sigma}(z) = w_0(z)(2p+1)^{1/2}$ [3], радиус апертуры согласовывался с числом мод разложения N_p . Поэтому обычно размеры начальной апертуры выбирались такими, чтобы выполнялось неравенство $A(0) > \tilde{w}_0(2N_p+1)^{1/2}$. При этом число радиальных точек выбиралось достаточно большим ($N_r \sim 2000$), чтобы точность разложения определялась только ограничением числа N_p членов разложения.

С целью проверки изложенных выше предположений были проделаны соответствующие расчеты распространения и фокусировки пучков, для которых известны точные аналитические решения. К такому типу пучков относится прежде всего когерентная суперпозиция соосных гауссовых пучков, которая может давать на оси нулевое значение [29]. Точное решение известно и для распространения бессель-гауссова (БГ) пучка [30]. Для коллимированного в начальной плоскости БГ пучка известны и аналитические выражения для коэффициентов разложения по модам ЛГ [31]. Интегральные выражения для коэффициентов разложения гауссова пучка со сферической абберацией получены в [26].

Для указанных пучков за фокусирующей линзой (с целью определенности расчеты проводились для сферической линзы с фокусным расстоянием $f = 100$ см и пучков с длиной волны $\lambda = 1.06$ мкм) рассчитывались точные и приближенные (по данной методике) поперечные распределения поля и в заданных нормах находились ошибки расчетов. Для дополнительного контроля в этих плоскостях по формуле (6) находились значения коэффициента распространения, которые сравнивались с известными значениями. Проведенные расчеты показали, что

для разных пучков с близкими значениями M_σ^2 числа членов разложения, необходимые для достижения заданной точности, в зависимости от выбранных значений радиусов пучка и радиусов кривизны мод ЛГ могли различаться весьма значительно.

3. Вычисление альтернативных радиусов и коэффициентов распространения пучков

Основное преимущество метода разложения по модам ЛГ (9) по сравнению с методом дифракционного интеграла [1–3] заключается в том, что, один раз определив коэффициенты разложения \tilde{c}_p , легко рассчитать распределение поля любой плоскости $u_{ap}(r, z)$, т.к. известен закон распространения мод ЛГ (2). Именно по этой причине МРМ удобен для численного анализа альтернативных методов измерения коэффициента распространения пучков, когда необходимо рассчитывать распределение поля сразу во многих плоскостях.

По известному распределению поля $u_{ap}(r, z)$ легче всего рассчитать долю энергии пучка, проходящую в данной плоскости через центрированную круглую апертуру радиусом a . Для гауссова пучка эта доля $\eta_{aG}(a, z) = 1 - \exp[-2a^2/w_G^2(z)]$, где $w_G(z)$ – радиус пучка в плоскости z . Несколько сложнее расчет доли энергии пучка, проходящей через щель шириной $2d$, середина которой находится на расстоянии c от оси пучка. Для гауссова пучка эта доля

$$\eta_{sG}(c, z) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\sqrt{2} \frac{c+d}{w_G(z)} \right) + \operatorname{erf} \left(\sqrt{2} \frac{-c+d}{w_G(z)} \right) \right],$$

где

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt$$

– функция ошибок [12]. Очевидно, что для тонкой щели ($d \rightarrow 0$) эта доля будет очень малой. Поэтому удобнее использовать нормированную на максимум долю энергии, пропущенную узкой щелью. В случае гауссова пучка она есть $\tilde{\eta}_{sG}(c, z) = \exp(-2c^2/w_G^2(z))$. Отметим, что на приведенных ниже рисунках для упрощения записи опущен знак черты над η_s . Расчеты пропускания долей энергии через щель и движущийся нож тесно взаимосвязаны. Если известна доля энергии, проходящей через центрированную с осью пучка ($c = 0$) щель шириной $2b$, то легко рассчитать стандартно используемые доли энергии после движущегося ножа на любом заданном уровне [3, 4, 8, 17]. Для гауссова пучка доля энергии, проходящей через такую щель, есть $\eta_{kG}(b, z) = \operatorname{erf}(\sqrt{2}b/w_G(z))$. Отметим, что для гауссова пучка кривые пропускания в любом сечении пучка подобны сами себе.

Определение радиуса произвольного осесимметричного пучка по действовавшему стандарту ISO 11146 [4,8] и его новой модификации [17] осуществляется согласно следующей процедуре. Методом линейной интерполяции находится радиус апертуры $a_{0.86}$, через которую проходит 86.5% полной мощности пучка. Этот радиус и принимается за радиус пучка $w_{a0.86}$, определенного методом варьирования диафрагмы по доле пропущенной энергии $\eta_a = 0.865$. Если определять радиус апертуры a_η с другой долей энергии пучка (η), то необходимо установить связь этого радиуса со стандартным (на уровне 86.5% полной мощности пучка) радиусом эквивалентного гауссова пучка $w_{a_\eta} = k_a(\eta)a_\eta$.

Из приведенных выше формул можно легко получить выражение для коэффициентов соответствия $k_a(\eta) = \{2 \times [-\ln(1-\eta)^{-1}]^{1/2}$. Из рассчитанной монотонно возрастающей с ростом радиуса апертуры a кривой пропускания $\eta_a(a, z)$ не составляет труда определить эквивалентные радиусы по любому заданному уровню. Ниже будут представлены результаты расчетов эквивалентных радиусов для пропускания апертурой долей энергии 0.80, **0.86**, 0.95, для которых коэффициенты k_a равны соответственно 1.12, **1.00**, 0.82. (Жирным шрифтом выделены уровни пропускания и соответствующие им коэффициенты для определения альтернативных радиусов пучков, рекомендованные стандартом ISO 11146 [17]). Таким же способом по доле пропускания $\eta_k(b)$ устанавливается связь $w_{k\eta} = k_k(\eta)b_\eta$. Долям энергии **0.68**, 0.80 и 0.86 соответствуют коэффициенты k_k , равные **2.00**, 1.56 и 1.33. Напомним, что указанным радиусам b_η отвечают положения движущегося острого края (ножа), для которых доли пропущенной мощности (энергии) равны соответственно **84%** и **16%**, 90% и 10%, 93% и 7% [3, 4, 8, 17]. В случае щели для нормированных уровней пропускания **0.135**, 0.20, 0.30 соответствующие коэффициенты k_s равны **1.00**, 1.11, 1.29.

Конкретные расчеты альтернативных коэффициентов распространения проведены для ряда пучков, для которых известны стандартные коэффициенты распространения M_σ^2 . Тогда с помощью формулы [2, 3]

$$w_\sigma^2(z) = w_\sigma^2(0) \left[\left(A + \frac{B}{R_\sigma(0)} \right)^2 + \left(\frac{\lambda M_\sigma^2 B}{\pi w_\sigma^2(0)} \right)^2 \right] \quad (12)$$

можно найти радиус пучка в любой плоскости z после сферической линзы. Здесь соответствующая ABCD-матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - z/f & z \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}.$$

Это аналитическое выражение для радиуса пучков предоставляет дополнительную возможность проверки точности численных расчетов, т.к. кроме альтернативных радиусов $w_{a,k,s}(z)$ в каждом численном эксперименте непосредственно по формуле (7) находились и радиусы $w_\sigma(z)$, которые сопоставлялись с рассчитанными по вышеприведенной простой формуле (12).

Для когерентной суперпозиции двух гауссовых пучков

$$u_{GG}(r, z=0) = A_1 \exp \left[-\left(\frac{r}{w_1} \right)^2 \right] + A_2 \exp \left[-\left(\frac{r}{w_2} \right)^2 \right] \quad (13)$$

с общей перетяжкой в плоскости $z=0$ нетрудно найти коэффициент распространения $M_{GG\sigma}^2 = (I_2 I_3)^{1/2} / I_1$. Здесь $I_1 = \frac{1}{4} [A_1^2 w_1^2 + A_2^2 w_2^2 + 2A_1 A_2 w_{12}^2]$; $I_2 = \frac{1}{8} [A_1^2 w_1^4 + A_2^2 w_2^4 + 2A_1 \times A_2 w_{12}^4]$; $I_3 = \frac{1}{2} [A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 w_{12}^4 / (w_1 w_2)^2]$ и $w_{12}^2 = 2(1/w_1^2 + 1/w_2^2)^{-1}$. Зная $M_{GG\sigma}^2$ и начальный радиус $w_{GG\sigma}(z=0) = (2I_2/I_1)^{1/2}$ такого пучка, по формуле (12) легко найти радиус пучка в любой плоскости за линзой.

Большой интерес представляют супергауссовы пучки

$$u_{SG}^{(L,NL)}(r, z=0) = u_{SG}(r) \exp(i\Phi_{L,NL}(r)) \quad (14)$$

с линейными ($\Phi_L(r, z) = \alpha_m(r/w_0)^m$) и нелинейными ($\Phi_{NL}(r) = \alpha_{NL} u_{SG}^2(r)$) абберациями в начальной плоско-

сти. Здесь $u_{SG}(r) = \exp[-(r/w_0)^n]$, а коэффициенты α_m и α_{NL} определяют величину и знак aberrаций. Для таких пучков хорошо известны выражения для мощности

$$P(u_{SG}^{(L)}) = 2\pi w_0^2 \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2/n} \Gamma\left(\frac{2}{n}\right)$$

и начального радиуса

$$w_\sigma(u_{SG}^{(L,NL)}) = \sqrt{2} w_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{2/n} \left[\Gamma\left(\frac{4}{n}\right) / \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \right]^{1/2},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Известны также [23, 32] аналитические выражения для радиусов кривизны

$$R_\sigma(u_{SG}^{(L)}) = 2\pi w_0^2 \Gamma\left(\frac{4}{n}\right) \left[m \lambda \alpha_m \left(\frac{1}{2}\right)^{(m-2)/n} \Gamma\left(\frac{m+2}{n}\right) \right]^{-1}, \quad (15)$$

$$R_\sigma(u_{SG}^{(NL)}) = \frac{2^{4/n} \sqrt{\pi} w_0^2}{\lambda \alpha_{NL}} \Gamma\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{2}\right) \quad (16)$$

и коэффициентов распространения

$$M_\sigma^2(u_{SG}^{(L)}) = \left\{ \frac{n^2}{4} \Gamma\left(\frac{4}{n}\right) + \alpha_m^2 m^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{2m/n} \times \left[\Gamma\left(\frac{2m}{n}\right) \Gamma\left(\frac{4}{n}\right) - \left[\Gamma\left(\frac{m+2}{n}\right) \right]^2 \right]^{1/2} / \Gamma\left(\frac{2}{n}\right) \right\}, \quad (17)$$

$$M_\sigma^2(u_{SG}^{(NL)}) = M^2(u_{SG}) \left\{ 1 + \left(\frac{2\alpha_{NL}}{3}\right)^2 \times \left[1 - \left(\frac{3}{2^{2/n} n}\right)^2 \Gamma^2\left(\frac{2}{n}\right) / \Gamma\left(\frac{4}{n}\right) \right] \right\}^{1/2}. \quad (18)$$

В частном случае гауссова пучка со сферической aberrацией выражения (15) и (17) совпадают с известными ранее (см. [26] и цитируемую там литературу).

Следует отметить, что в используемом методе рас-

четы aberrированных гауссовых пучков требуют большего числа членов разложения N_p по сравнению с супергауссовыми пучками при одних и тех же коэффициентах aberrации. Обусловлено это тем, что за пределами радиуса $r = w_0$, при котором величина aberrации равна α_m , в случае гауссова пучка остается относительно большая доля энергии пучка $\eta \approx 0.135$ с быстрым ростом линейных aberrаций и медленно убывающим распределением интенсивности. Кроме того, для сокращения числа членов разложения в случае aberrированных пучков нужно использовать формулу (11), чтобы рассчитать оптимальный радиус кривизны мод ЛГ.

Кольцевую структуру во входной плоскости с нулевым значением на оси имеет пучок [29]

$$u_{dl}(r, z = 0) = \left(\frac{r}{w_0}\right)^l \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right), \quad (19)$$

коэффициент распространения которого выражается простой формулой $M_\sigma^2 = (l + 1)^{1/2}$.

Пучок Бесселя – Гаусса

$$u_{BG}(r, z = 0) = J_0(\beta r) \exp\left[-\left(\frac{r}{w_0}\right)^2\right] \quad (20)$$

(β – параметр бесселева пучка) имеет сложную многокольцевую структуру во входной плоскости. Однако для него известны закон распространения через ABCD-систему [30] и коэффициент распространения $M_{BG}^2 = \{[1 + \mu I_1(\mu)/I_0(\mu)]^2 - \mu^2\}^{1/2}$, где $\mu = \beta^2 w_0^2 / 4$, $I_0(\mu)$ – модифицированные функции Бесселя [33]. Поэтому использование разложения (9) позволяет достаточно просто рассчитать графики распределения поля и коэффициентов пропускания в любой плоскости (рис.1 и 2). Видно, что зависимость $\eta_s(c)$ имеет либо осциллирующий характер во входной плоскости (рис.1,а), либо немонотонный характер в фокальной плоскости (рис.2,а). Отметим также, что похожее зависимости $\eta_s(c)$ характерны и для высших мод ЛГ (см. рис.3,а).

Возникшую проблему неоднозначности определения радиуса пучка в стандартном методе узкой движущейся

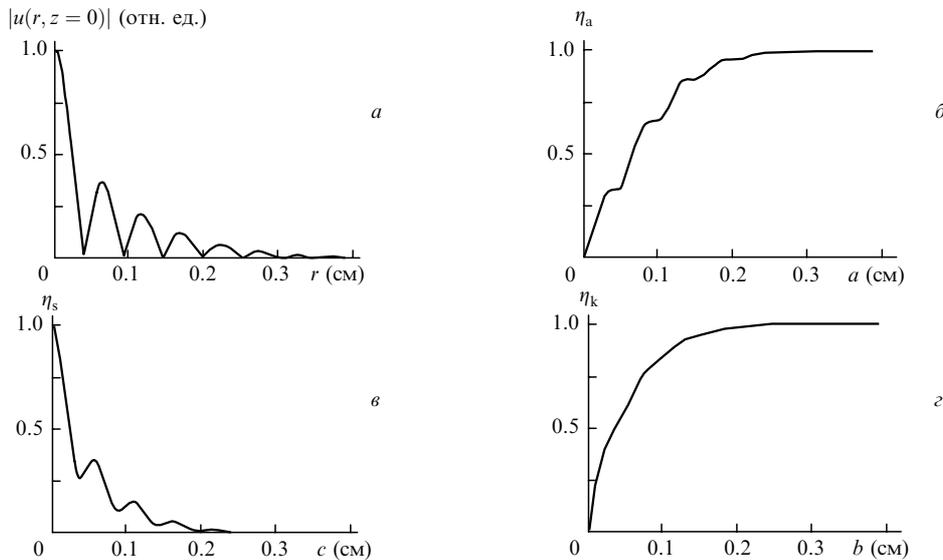


Рис.1. Модуль амплитуды (а) и профили нормированного пропускания через варьируемую апертуру (б), движущуюся узкую щель (в) и увеличивающуюся в размерах симметричную относительно оси пучка щель (имитирует движущийся край ножа) (г) бессель-гауссова пучка сразу за фокусирующей линзой ($z = 0$).

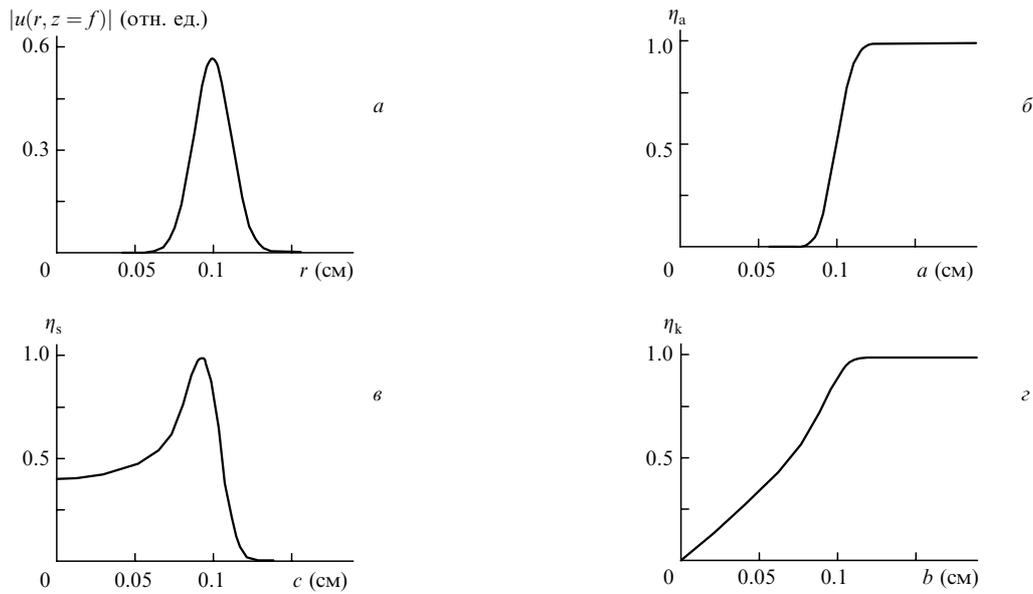


Рис.2. Модуль амплитуды (а) и профили нормированного пропускания через варьируемую апертуру (б), движущуюся узкую щель (в) и увеличивающуюся в размерах симметричную относительно оси пучка щель (г) бesselь-гауссова пучка в фокальной плоскости линзы ($z = f$).

щели можно решать разными способами. Самый простой заключается в том, что за радиус пучка с данным уровнем пропускания принимается минимальный из них. В приведенных ниже результатах расчетов мы в основном использовали этот способ. Далее, увеличив ширину щели, можно сгладить кривую пропускания, что иногда позволяет избавиться от ее осциллирующего характера в случае узкой щели.

Наиболее радикальным и, вообще говоря, применимым ко всем альтернативным методам измерения радиуса пучка является способ подгонки методом наименьших квадратов указанных выше функций пропускания для гауссовых пучков $\eta_{(a,k,s)G}$ ко всем другим пучкам. В результате процедуры подгонки в каждой плоскости получается одно вполне определенное значение эквивалент-

ного радиуса $w_{(a,k,s)G}$ (уже без указания долей пропускания). Такой способ нахождения радиуса пучков при использовании метода сканирующей щели использовался в работе [12]. Однако, учитывая сложные зависимости кривых пропускания, продемонстрированные на рис.1, 2, утверждать о преимуществе такого способа установления радиуса весьма затруднительно. В общем случае найденные этим способом радиусы могут значительно отличаться от установленных другими методами и не обязательно быть ближе к значениям радиусов, определяемых методом моментов.

На рис.3 представлены подгоночные кривые и радиусы для высшей моды LG_{02} , получаемые различными методами. Видно, что полученные значения радиусов в общем случае весьма сильно отличаются от $w_\sigma = \sqrt{5}w_0 \approx$

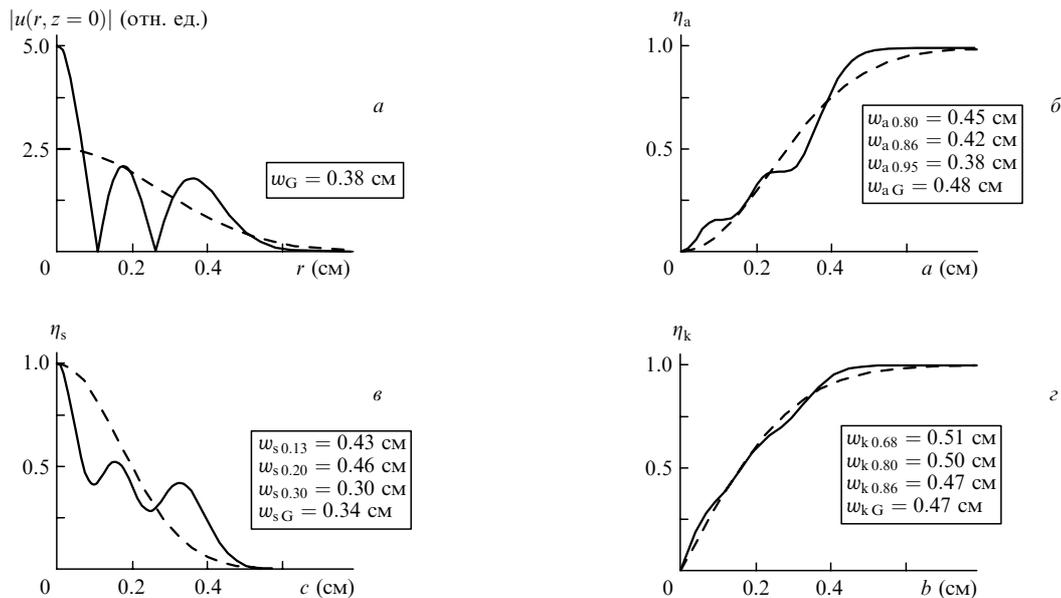


Рис.3. Модуль амплитуды (а) и профили нормированного пропускания через варьируемую апертуру (б), движущуюся узкую щель (в) и увеличивающуюся в размерах симметричную относительно оси пучка щель (г) лаггер-гауссова пучка LG_{02} в плоскости $z = 0$ (сплошные кривые), а также вписанные методом наименьших квадратов графики модуля амплитуды и соответствующих нормированных пропусканий гауссова пучка (штриховые кривые). Приведенные значения радиусов определены соответствующими методами при использовании различных уровней пропускания.

0.45 см, а некоторые значения (близкие к 0.45 см), по-видимому, случайны. Как и ожидалось, найденный подгонкой кривой пропускания $\eta_{sG}(c)$ к данным, полученным с помощью движущейся щели, радиус $w_{sG} \approx 0.34$ см сильно отличается от радиуса w_σ моды LG₀₂. Далекое от точного значение радиуса $w_G \approx 0.38$ см получается и при попытке подгонки методом наименьших квадратов гауссова распределения амплитуды к модулю амплитуды моды LG₀₂ (рис.3,а). Следует отметить, что значения радиусов, найденные методами изменяющейся апертуры и движущейся щели при рекомендованных стандартом ISO 11146 уровнях пропускания, наиболее близки к точному значению w_σ .

Как уже указывалось, расчеты радиусов различными методами проводились обычно для пучков с $w_0 = 0.2$ см и фокусного расстояния фокусирующей линзы $f = 100$ см в плоскостях с координатами от $z = 0$ до $z = 200$ см с шагом в 2 см. Суперпозиция гауссовых пучков рассчитывалась для амплитуд $A_1 = -A_2 = 1$ и радиусов $w_1 = 0.2$ см и $w_2 = 0.1$ см. Другие необходимые параметры указаны в примечании к табл.1. Для нахождения альтернативных значений M_i^2 по найденным указанными выше способами значениям радиусов надо использовать стандартную процедуру подгонки методом наименьших квадратов гиперболы [17]

$$w_{i\text{fit}} = w_0 \left[1 + \frac{\lambda^2 (M_i^2)^2 (z - z_{j0})^2}{\pi^2 w_{j0}^4} \right]^{1/2} \quad (21)$$

При подгонке варьируются значения радиуса w_{j0} и положения z_{j0} перетяжки, а также коэффициента распространения M_i^2 .

Найдя соответствующие значения коэффициентов распространения M_i^2 и предполагая наличие корреляции с M_σ^2 [4, 8, 17], можно найти коэффициенты корреляции

$$c_i = \frac{M_\sigma - 1}{M_i - 1} \quad (22)$$

Полученные таким образом значения коэффициентов для различных пучков приведены в табл.1. К сожалению, как видно из представленных в ней результатов, невозможно поддержать вывод [4, 17] о том, что для когерентных осесимметричных пучков существует определенная взаимно однозначная корреляция между коэффициентами распространения M_i^2 и M_σ^2 . В связи с тем, что для альтернативных методов нет принципиального ограничения на значение коэффициента распространения M_i^2

(типа $M_\sigma^2 \geq 1$), найденные изложенным способом коэффициенты корреляции c_i могут иметь отрицательные значения, в том числе и весьма большие по модулю (в случае $M_i^2 \sim 1$).

Предварительные результаты для некогерентных пучков также не подтверждают наличие такой корреляции. Соответствующие расчеты проводились двумя способами. В первом для получения некогерентного во времени пучка случайным образом менялись коэффициенты разложения по модам ЛГ. Во втором коэффициенты разложения менялись детерминированно, но за время, на протяжении которого фаза всех мод изменялась более чем на 2π . Так, например, для супергауссова пучка с $n = 10$, в котором для простоты аберрации отсутствуют, для стандартного случая ($w_0 = 0.2$ см и $f = 100$ см) найденные в начальный момент времени коэффициенты $\tilde{c}_p(0)$ разложения по модам ЛГ изменялись во времени по закону $c_p(t) = c_p(0) \exp[-i2\pi\Delta\nu_p t]$, где $\Delta\nu_p = (c/\lambda)(2p + 1) \times \arccos(g_1 g_2)^{1/2}/\pi$; $g_{1,2}$ – параметры устойчивого резонатора [2]. Расчеты проводились для промежутка времени Δt , такого, чтобы даже для основной моды выполнялось соотношение $\Delta\nu_0 \Delta t \geq 1$. Разделив этот промежуток на N_t интервалов, для каждого шага во времени $t_j = j\Delta t/N_t$ ($j = 0, 1, 2, \dots, N_t - 1$) рассчитывали, как обычно, $u_j = u(r, z, t_j)$. Вместо плотности энергии, получаемой интегрированием результатов по времени, использовалось среднее значение плотности мощности

$$\overline{|u|^2} = \sum_{j=0}^{N_t-1} |u_j|^2 / N_t.$$

Учитывая, что при таких изменениях коэффициентов $\tilde{c}_p(t)$ мощность суммарного пучка

$$P(u) = 2\pi \int_0^\infty |u|^2 r dr \cong \sum_{p=0}^{N_p} \tilde{c}_p^* \tilde{c}_p$$

не изменяется во времени, соответствующие альтернативные радиусы рассчитывались, как обычно, при использовании среднего значения $\overline{|u|^2}$. При этом коэффициент распространения, определяемый методом моментов, должен быть близок к некогерентному:

$$M_\sigma^2(u) \cong \sum_{p=0}^{N_p} (2p + 1) R_{pp},$$

$R_{nm} = \tilde{c}_n^* \tilde{c}_m / P(u)$ [25]. Близкое значение коэффициента

Табл.1. Коэффициенты корреляции c_i , вычисленные для различных пучков.

Пучок	M_σ^2	Варьируемая апертура			Движущийся нож			Движущаяся щель		
		$c_{a.0.80}$	$c_{a.0.86}$ (1.14)	$c_{a.0.95}$	$c_{k.0.68}$ (0.81)	$c_{k.0.80}$	$c_{k.0.86}$	$c_{s.0.135}$ (0.95)	$c_{s.0.20}$	$c_{s.0.30}$
GG	1.63	1.30	0.83	0.74	3.38	1.15	0.84	2.47	6.86	-2.69
SG _{L+}	1.87	1.47	0.99	0.85	5.19	2.18	1.38	27.06	-6.05	-2.97
SG _{L-}	1.87	2.20	1.20	0.86	7.45	3.27	1.80	-3.85	-2.82	-2.98
SG _{NL+}	1.71	2.98	1.40	0.76	-2.05	6.12	2.35	-10.10	-3.38	-3.15
SG _{NL-}	1.71	1.72	1.14	0.82	6.69	2.49	1.57	15.69	-6.32	-2.71
LG ₀₂	5.00	1.01	1.13	1.41	0.81	1.25	0.67	1.05	0.95	1.10
D ₂₄	5.00	0.94	0.94	0.978	1.26	0.98	0.82	0.997	1.09	1.39
BG	5.91	1.05	1.01	1.08	1.08	1.02	1.00	1.29	1.63	1.72

Примечание: GG – когерентная суперпозиция двух гауссовых пучков; SG_{L+}, SG_{L-}, SG_{NL+}, SG_{NL-} – супергауссовы пучки с линейной и нелинейной аберрациями $\alpha = \pm\pi$; LG₀₂ – лаггер-гауссов пучок; D₂₄ – пучок-«баранка» ($l = 24$); BG – бessel-гауссов пучок ($\beta w_0 = 11.8$). Значения коэффициентов корреляции, предлагаемые стандартом ISO 11146, выделены жирным шрифтом.

распространения было получено и при подгонке (21) по радиусу:

$$w_{\sigma}(u) = 2 \left[\frac{\pi}{P(u)} \int_0^{\infty} r^3 |u|^2 dr \right]^{1/2}.$$

Как и следовало ожидать, альтернативные коэффициенты распространения и соответствующие коэффициенты корреляции для различных реализаций менялись непредсказуемым образом, что подтверждает отсутствие взаимно однозначной корреляции между инвариантным (M_{σ}^2) и альтернативными (M_i^2) коэффициентами распространения.

4. Заключение

Эффективные численные методы расчета распространения и фокусировки осесимметричных пучков сложной пространственной структуры посредством их разложения по модам Лагерра – Гаусса свободного пространства позволили провести согласно действующему стандарту ISO 11146 расчеты альтернативных радиусов и коэффициентов распространения для ряда пучков с известными M_{σ}^2 . В результате проведенных для этих пучков расчетов альтернативных коэффициентов распространения M_i^2 установлено, что предполагаемой в стандарте ISO 11146 универсальной взаимно однозначной корреляции между коэффициентами M_{σ}^2 и M_i^2 не существует. Поэтому прямое применение не являющихся инвариантами распространения альтернативных коэффициентов необоснованно. Однако данные, получаемые при измерении радиусов пучков альтернативными методами, в определенных случаях [34, 35] можно использовать для нахождения инвариантных коэффициентов распространения M_{σ}^2 .

Работа выполнена при поддержке Литовского фонда науки и образования (грант Е! 2359 CHOCLAB II, V-05048).

1. Siegman A.E. *Lasers* (Mill Valley, CA: University Science Books, 1986).
2. Anan'ev Yu. *Laser Resonators and the Beam Divergence Problem* (Bristol: Adam Hilger, 1992).
3. Hodgson N., Weber H. *Optical Resonators. Fundamentals, Advanced Concepts and Applications* (London: Springer-Verlag, 1997).
4. International standard ISO 11146: *Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam parameters – Beam widths, divergence angle and beam propagation factor* (1999-06-01).
5. Власов С.Н., Петрищев В.А., Таланов В.И. *Изв. Вузов. Сер.*

Радиофизика, **14**, 1353 (1971).

6. Lawrence G.N. *Laser Focus World*, **30**, 109 (1994).
7. Ананьев Ю.А. *Оптика и спектроскопия*, **86**, 499 (1999).
8. *Основы оптической радиометрии*. Под ред. А.Ф.Котока (М.: Физматлит, 2003, гл. 18, с. 455–493).
9. Helmers H., Schellenberg M. *Opt. & Las. Techn.*, **35**, 587 (2003).
10. Buzelis R., Dement'ev A., Ivanauskas F., Radavichius M., Vaicekauskas R. *Lithuanian Phys. J.*, **38**, 159 (1998).
11. Roundy C.B., in *Laser Beam Shaping: Theory and Techniques*. F.M. Dickey, S.C. Holswade (Eds) (New York: Marcel Dekker, Inc., 2000. Ch. 9, p. 349–422.)
12. Zheng J., Zhao S., Wang Q., Zhang X., Chen L. *Opt. Laser. Technol.*, **33**, 213 (2001).
13. Eichler H. J., Haase A. Mehl O., in *Laser Resonators: Novel Design and Development*. A. V. Kudryashov, H. Weber (Eds) (Bellingham: SPIE Opt. Eng. Press, 1999, p. 97).
14. *Phase conjugate laser optics*. A. Brignon, J.-P. Huignard (Eds) (Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2004).
15. Eppich B., Reng N. *Proc. SPIE Int. Soc. Opt. Eng.*, **2375**, 192 (1995).
16. Gao C., Weber H. *Opt. & Las. Techn.*, **32**, 221 (2000).
17. International standard ISO 11146-1: *Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios – Part 1: Stigmatic and simple astigmatic beams* (first edition 2005-01-15); Technical report ISO/TR 11146-3: *Lasers and laser-related equipment – Test methods for laser beam widths, divergence angles and beam propagation ratios – Part 3: Intrinsic and geometrical laser beam classification, propagation and details of test methods* (2004-02-01).
18. Ciegis R., Šilko G., Dement'ev A. *Informatica*, **13**, 149 (2002).
19. Tanaka K., Shibukawa M., Fukumitsu O. *IEEE Trans. Microwave Theory Techn.*, **MTT-20**, 749 (1972).
20. Petrović N.S., Rakić A.D. *J. Opt. Soc. Am. B*, **22**, 556 (2005).
21. Eriksson A., Lindgren M., Svensson S., Arntzen P-O. *J. Opt. Soc. Am. B*, **15**, 810 (1998).
22. Riyopoulos S.A., Dialeitis D., Liu J., Riely B. *IEEE J. Select. Topics Quantum Electron.*, **7**, 312 (2001).
23. Porrás M.A., Alda J, Bernabeu E. *Appl. Opt.*, **31**, 6389 (1992).
24. Buzelis R., Dement'ev A., Kosenko E., Murauskas E., Ciegis R., Kairyte G. *Proc. SPIE Int.Soc. Opt.Eng.*, **2772**, 158 (1996).
25. Vicalvi S., Borghi R., Santarsiero M., Gori F. *IEEE J. Quantum Electron.*, **34**, 2109 (1998).
26. Santarsiero M. *J. Opt. Soc. Am. A*, **18**, 1650 (2001).
27. Borghi R., Gori F., Santarsiero M. *Opt. Commun.*, **125**, 197 (1996).
28. Martinez-Herrero R., Mejias P.M. *Pure Appl. Opt.*, **7**, 1231 (1998).
29. Ramee S., Simon R. *J. Opt. Soc. Am. A*, **17**, 84 (2000).
30. Belafhal A., Dalil-Essakali L. *Opt. Commun.*, **177**, 181 (2000).
31. Zhang B., Lu B. *J. Opt. Soc. Am. A*, **16**, 1413 (1999).
32. Dement'ev A., Lasys V. *Lithuanian Phys. J.*, **39**, 104 (1999).
33. Borghi R., Santarsiero M. *Opt. Lett.*, **22**, 262 (1997).
34. O'Connell R.M., Vogel R.A. *Appl. Opt.*, **26**, 2528 (1987).
35. Plass W., Maestle R., Wittig K., Voss A., Giesen A. *Opt. Commun.*, **134**, 21 (1997).