

Собственные частоты кольцевого оптического резонатора с неоднородным заполнением

В.Ф.Судаков

Рассмотрен кольцевой оптический резонатор с простейшим типом неоднородности, вызывающей обратное рассеяние волн. Сформулирована граничная задача периодического типа в терминах коэффициентов отражения и прохождения. В предположении малости коэффициента отражения найдены аналитические формулы для собственных частот в предельных случаях их вырождения и максимального расщепления.

Ключевые слова: кольцевой резонатор, собственные частоты резонатора, неоднородное заполнение резонатора.

1. Задача исследования спектра собственных частот неоднородно заполненного резонатора, в частности кольцевого оптического резонатора (КОР), является традиционной. Она не раз детально обсуждалась в физических и математических работах (см., напр., монографию [1]). Однако в общей постановке задачи получены только общие, хотя и важные, результаты. В то же время для ряда приложений необходима большая конкретизация (см., напр., обзор [2]). В этом случае требуется уточнять характер неоднородности. Наиболее просто получать результаты в том случае, когда допустимо использовать теорию возмущений в той или иной трактовке. Для этого в [3] и ряде других работ с помощью феноменологически используемой теории возмущений исследовались мало-размерные локальные неоднородности простой структуры (пластинка, шар небольших размеров и т. п.). В принципе это позволяет оценивать асимптотику спектра, хотя даже такая задача обычно до конца не решается аналитически.

В настоящей работе рассматривается в некотором смысле противоположный случай: две простые неоднородности (скачки коэффициента преломления) разнесены по периметру КОР на максимальное расстояние. Задача формулируется и решается последовательно электродинамически, без привлечения искусственных предположений (как в [3]). Трансцендентное уравнение, из которого определяется спектр собственных частот резонатора, получено и может быть решено (например, численно или графически) и без использования теории возмущений. Для иллюстрации аналитических результатов взяты относительно малые коэффициенты отражения.

КОР используется в ряде оптических систем, например в кольцевом лазере. Серьезной проблемой как в теории КОР, так и в практике его использования является учет связи мод из-за неоднородности заполнения, приводящей к их синхронизации. В частности, большое внимание уделяется определению зоны синхронизации [2, 4, 5], которую традиционно выражают непосредственно через

параметр связи мод в рамках нелинейной теории лазера. Однако возможно и косвенное исследование этих же вопросов, не выходящее за пределы линейной теории резонатора, т. к. спектр его собственных частот также содержит информацию об основных особенностях связи мод (через влияние неоднородности на расщепление спектра). На этом пути возможно использование результатов настоящей работы в приложении к теории кольцевых лазеров.

2. Для резонатора с однородным заполнением собственные частоты расположены эквидистантно (интервал между ними обратно пропорционален периметру резонатора) и двукратно вырождены. В качестве собственных волн для каждой частоты можно выбрать две встречно распространяющиеся бегущие волны или любую их линейную комбинацию. При наличии обратного рассеяния в резонаторе, причиной которого является любая неоднородность среды заполнения, бегущие волны не могут быть собственными функциями. Изменяется и характер спектра собственных частот КОР.

Если диэлектрическая проницаемость среды описывается достаточно гладкой функцией координат, то асимптотическое поведение собственных частот и собственных функций можно получить сравнительно просто, используя метод Вентцеля – Крамерса – Бриллюэна. Если эта функция не является непрерывной, следует действовать иным способом. В данной работе решается задача определения собственных частот резонатора для наиболее простой ситуации, когда функция, описывающая оптические свойства среды, заполняющей резонатор, кусочно постоянна. Более точная постановка задачи дана ниже.

3. Будем считать, что КОР является одномерным (z – координата точки на оси, L – периметр резонатора ($0 \leq z \leq L$)). Коэффициент преломления среды заполнения $n(z)$ имеет разрыв в точках $z = L/2$ и $z = L$: $n(z) = n_1$ при $0 \leq z < L/2$ и $n(z) = n_2$ при $L/2 \leq z \leq L$. В такой структуре стационарные волны с частотой ω удовлетворяют однородному волновому уравнению на каждом интервале, где коэффициент преломления постоянен, а также условиям непрерывности поля и его производной в точках разрыва.

Условие непрерывности можно описать в терминах коэффициентов отражения и прохождения (преломления). Для волн, распространяющихся в сторону возвра-

В.Ф.Судаков. Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, Россия, 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., 5; e-mail: soudukov@aport2000.ru

станции z , эти коэффициенты обозначим как $R_1 = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ и $T_1 = 2n_1/(n_1 + n_2)$, а для встречных волн – как $R_2 = (n_2 - n_1)/(n_1 + n_2) = -R_1$ и $T_2 = 2n_2/(n_1 + n_2)$.

Поле в КОР можно представить в виде суммы двух волн:

$$u_1(z) = A_1 \exp(-ik_1 z) + B_1 \exp(ik_1 z) \text{ при } 0 \leq z \leq L/2,$$

$$u_2(z) = A_2 \exp(-ik_2 z) + B_2 \exp(ik_2 z) \text{ при } L/2 \leq z \leq L.$$

Здесь $k_1 = kn_1$, $k_2 = kn_2$ и $k = \omega/c$. Волны с амплитудами A_1 , B_2 назовем прямыми, а волны с амплитудами A_2 , B_1 – обратными. Введем приведенные амплитуды прямых и обратных волн: $A_1^{(0)} = A_1 \exp(-ik_1 L/2)$, $B_1^{(0)} = B_1 \exp(ik_1 L/2)$, $A_2^{(0)} = A_2 \exp(-ik_2 L/2)$, $B_2^{(0)} = B_2 \exp(ik_2 L/2)$.

Из условия непрерывности в точке $z = L/2$ следует, что

$$B_1^{(0)} = R_1 A_1^{(0)} + T_2 B_2^{(0)}, \quad (1)$$

$$A_2^{(0)} = T_1 A_1^{(0)} + R_2 B_2^{(0)}.$$

Из условия непрерывности в точке $z = L$ получаем, что

$$B_2 \exp(ik_2 L) = R_2 A_2 \exp(-ik_2 L) + T_1 B_1, \quad (2)$$

$$A_1 = R_1 B_1 + T_2 A_2 \exp(-ik_2 L).$$

Из (1) и (2) найдем уравнения связи для приведенных амплитуд:

$$B_2^{(0)} = \frac{R_2}{T_2} \exp\left[i(k_1 - k_2) \frac{L}{2}\right] A_1^{(0)} + \frac{1}{T_2} \exp\left[-i(k_1 + k_2) \frac{L}{2}\right] B_1^{(0)}, \quad (3)$$

$$A_2^{(0)} = \frac{1}{T_2} \exp\left[i(k_1 + k_2) \frac{L}{2}\right] A_1^{(0)} - \frac{R_1}{T_2} \exp\left[-i(k_1 - k_2) \frac{L}{2}\right] B_1^{(0)}.$$

Объединяя (1) и (3), получаем однородное векторное уравнение

$$(H - E) \begin{bmatrix} A_1^{(0)} \\ B_1^{(0)} \end{bmatrix} = 0, \quad (4)$$

где E – единичная матрица;

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & -\frac{R_2}{T_1} \\ \frac{R_1}{T_1} & \frac{1}{T_1} \end{bmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} \frac{1}{T_2} \exp\left[i(k_1 + k_2) \frac{L}{2}\right] & -\frac{R_1}{T_2} \exp\left[-i(k_1 - k_2) \frac{L}{2}\right] \\ \frac{R_2}{T_2} \exp\left[i(k_1 - k_2) \frac{L}{2}\right] & \frac{1}{T_2} \exp\left[i(k_1 + k_2) \frac{L}{2}\right] \end{bmatrix}. \quad (5)$$

4. Ненулевые решения уравнения (4) существуют, если $\text{Det}(H - E) = 0$. Очевидно, что $\text{Det}(H - E) = 1 - \text{Sp} H + \text{Det} H$. Диагональные элементы матрицы H , а следовательно и выражения для $\text{Sp} H$ и $\text{Det} H$ нетрудно получить из (5):

$$\text{Sp} H = 2 \frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2} \left[\cos(k_1 + k_2) \frac{L}{2} - R_1^2 \cos(k_1 - k_2) \frac{L}{2} \right],$$

$$\text{Det} H = \text{Det} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_1} & -\frac{R_2}{T_1} \\ \frac{R_1}{T_1} & \frac{1}{T_1} \end{bmatrix}$$

$$\times \text{Det} \begin{bmatrix} \frac{1}{T_2} \exp\left[i(k_1 + k_2) \frac{L}{2}\right] & -\frac{R_1}{T_2} \exp\left[-i(k_1 - k_2) \frac{L}{2}\right] \\ \frac{R_2}{T_2} \exp\left[i(k_1 - k_2) \frac{L}{2}\right] & \frac{1}{T_2} \exp\left[i(k_1 + k_2) \frac{L}{2}\right] \end{bmatrix}.$$

Расчет входящих в последнее выражение определителей позволяет установить, что матрица H является унитарной: $\text{Det} H = 1$. Это дает возможность представить уравнение $1 - \text{Sp} H + \text{Det} H = 0$ в виде

$$1 - \frac{1}{T_1} \frac{1}{T_2} \left[\cos(k_1 + k_2) \frac{L}{2} - R_1^2 \cos(k_1 - k_2) \frac{L}{2} \right] = 0,$$

или в эквивалентной форме

$$\cos \phi - 1 = R_1^2 (\cos \delta \phi - 1), \quad (6)$$

где введены новые переменные

$$\phi = \frac{n_1 + n_2}{2} kL, \quad \delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} kL, \quad \delta \phi = \frac{n_1 - n_2}{2} kL. \quad (6a)$$

5. Левая и правая части уравнения (6) изображены в виде двух кривых на рис.1. Обычно коэффициент отражения $R_1 \ll 1$. Поэтому правая часть (6) имеет намного меньшую частоту и амплитуду, чем левая. Реально показать это графически невозможно. Поэтому кривые на рис.1 должны восприниматься только как иллюстрация.

В предположении малости коэффициента отражения корни уравнения (6) могут быть найдены приближенно. Они образуют две дискретные серии $\phi_q^{(+)}$ и $\phi_q^{(-)}$ положительных чисел: корни одной серии несколько превышают $2q\pi$, а корни другой серии несколько меньше этих чисел. В общем случае выражения для корней имеют вид

$$\phi_q^{(+)} = 2q\pi + R_1 \sigma_q^{(+)}, \quad \phi_q^{(-)} = 2q\pi - R_1 \sigma_q^{(-)}, \quad (7)$$

где коэффициенты влияния $\sigma_q^{(\pm)}$, имеют порядок единицы и зависят от номера корня q . Найти их можно, например, графически (см. рис.1).

Используя (7) и (6a), находим спектр собственных частот КОР:

$$\omega_q^{(\pm)} = \phi_q^{(\pm)} \left(\frac{2}{n_1 + n_2} \right) \frac{c}{L}. \quad (8)$$

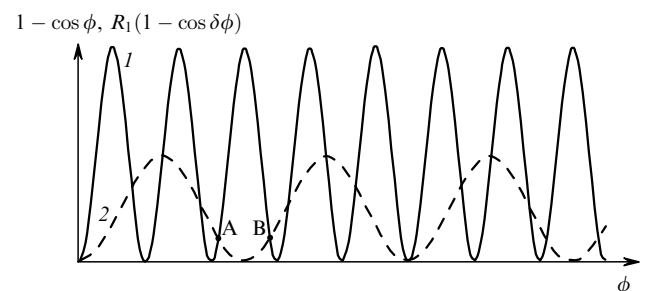


Рис.1. Графическое представление уравнения (6): кривая 1 – зависимость $1 - \cos \phi$, кривая 2 – зависимость $R_1(1 - \cos \delta \phi)$.

Некоторые собственные частоты могут быть двукратно вырождены.

6. Рассмотрим вырожденный частотный спектр. Пусть $\delta = n/m$, где m и n – натуральные числа. Предположим, что корни уравнения (6) имеют вид $\phi = 2m\pi + \Phi$, тогда $\delta\phi = 2n\pi + \delta\Phi$. При малых Φ имеем

$$1 - \cos \phi \approx \frac{\Phi^2}{2} \text{ и } 1 - \cos \delta\phi = 1 - \cos \delta\Phi \approx \frac{\delta^2 \Phi^2}{2}.$$

Используя эти приближения, (6) можно представить в виде уравнения

$$\frac{\Phi^2}{2} - \frac{R_1^2 \delta^2 \Phi^2}{2} = 0,$$

которое имеет двукратно вырожденный корень $\Phi^{(\pm)} = 0$. Следовательно, при каждом целом m существует кратный корень $\phi_m^{(\pm)} = 2m\pi$ и кратная собственная частота

$$\omega_{m0}^{(\pm)} = \omega_{m0} = 2\pi m \left(\frac{2}{n_1 + n_2} \right) \frac{c}{L}.$$

Таким образом, вырожденный спектр частот при наличии обратного рассеяния совпадает со спектром эквивалентного КОР с однородным заполнением (т. е. без обратного рассеяния) средой с коэффициентом преломления, равным $(n_1 + n_2)/2$.

7. Перейдем теперь к рассмотрению максимального расщепления в частотном спектре. Пусть коэффициент отражения аппроксимируется рациональным отношением $\delta = (2n + 1)/(2m)$. В этом случае наряду с вырожденными собственными частотами существуют и невырожденные. Будем искать решение уравнения (6) в виде $\phi = 2m\pi + \Phi$ при малых Φ . Поскольку $\delta\phi = 2m\pi\delta + \delta\Phi = (2n + 1)\pi + \delta\Phi$, то

$$1 - \cos \delta\phi \approx 2 - \frac{\delta^2 \Phi^2}{2}.$$

Следовательно, уравнению (6) в первом приближении соответствует уравнение

$$\frac{\Phi^2}{2} \approx R_1^2 \left(2 - \frac{\delta^2 \Phi^2}{2} \right).$$

Его корни являются приближенными значениями корней уравнения (6):

$$\Phi^{(\pm)} \approx \pm \sigma R_1, \quad (9)$$

где

$$\sigma = 2 \left(\frac{1}{1 + \delta^2 R_1^2} \right)^{1/2} \approx 2.$$

Таким образом, при указанных условиях корни уравнения (6) расположены симметрично относительно точек $2m\pi$ на максимальном удалении от них. На рис. 1 таким корням соответствуют точки пересечения кривых в окрестности точек совпадения максимумов кривой 1 и минимумов кривой 2 (например, точки А и В). Графически очевидно, что в этом случае коэффициенты влияния в (7) действительно совпадают ($\sigma_m^{(+)} = \sigma_m^{(-)} = \sigma$) и являются максимальными.

Собственные частоты КОР находятся из выражений (8) и (9):

$$\omega_m^{(\pm)} = \omega_{m0} \pm \sigma R_1 \left(\frac{2}{n_1 + n_2} \right) \frac{c}{L}. \quad (10)$$

При отсутствии обратного рассеяния ($n_1 = n_2$) из (10) получаем $\omega_m^{(\pm)} = \omega_{m0}$, что говорит о вырождении всего спектра частот.

Поскольку представляет интерес только оценка максимального расщепления, меньшие значения расщепления не рассматриваются.

8. Рассмотренная задача о спектре КОР близка к традиционным задачам квантовой механики и теории волн, где объектом исследования является некоторая периодическая структура (см., напр., [6–9]). Однако в таких задачах основной интерес представляют распространяющиеся устойчивые или неустойчивые волны. Отвечающие им собственные частоты принадлежат к области непрерывного спектра. Периодические волны с дискретным спектром частот в указанных и аналогичных им работах являются некоторым исключением, и им не уделяется должного внимания. Это объясняется тем, что акцент делается на волноводной трактовке: получении дисперсионного уравнения при заданной частоте. В настоящей работе при резонаторной трактовке основной задачей является определение частот, при которых в периодической структуре существуют периодические волны. Использование понятия коэффициента отражения позволяет перейти от простейшей модели среды заполнения, применяемой нами только для иллюстрации метода, к очевидным обобщениям.

Общий подход к решению поставленной спектральной задачи является достаточно естественным. Он применялся, например, в [10,11] для определения спектра частот и собственных состояний поляризации линейного оптического анизотропного резонатора. Однако в этих и других известных нам работах собственные частоты аналитически найдены не были. В настоящей работе получены формулы для собственных частот кольцевого резонатора (в первом приближении по малому коэффициенту отражения). Указаны также достаточные условия для образования вырожденных собственных частот и оценки максимального сжатия вырождения спектра.

1. Бабич В.М., Булдырев В.С. *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн* (М.: Наука, 1972, гл. 9).
2. Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г. *Квантовая электроника*, **30** (2), 105 (2000).
3. Haus H., Statz H., Smith W. *IEEE J. Quantum Electron.*, **21** (1), 78 (1985).
4. Клочан Е.Л., Корниенко Л.С., Кравцов Н.В., Ларионцев Е.Г., Шелаев А.Н. *ЖЭТФ*, **65** (4), 1344 (1973).
5. Зейгер С.Г., Климонтович Ю.Л., Ланда П.С., Ларионцев Е.Г., Фрадкин Э.Е. *Волновые и флуктуационные процессы в лазерах* (М.: Наука, 1974, гл. V–IX).
6. Элаши Ш. *Труды ИИЭР*, **64** (14), 22 (1976).
7. Бриллиээн Л., Пароди М. *Распространение волн в периодических структурах* (М.: ИЛ, 1959, гл. 9).
8. Льюиссел У. *Связанные и параметрические колебания в электронике* (М.: ИЛ, 1963, гл. 4–9).
9. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн* (М.: Наука, 1979, с. 140–150).
10. Иванов Э.И., Чайка М.П. В сб.: *Физика газовых лазеров* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1969, с. 20–32).
11. Григорьева В.Н., Рымарчук В.А. В сб.: *Физика газовых лазеров* (Л.: Изд-во ЛГУ, 1969, с. 33–35).