

Свободная конвекция в лазерных системах

А.И.Осипов, А.В.Уваров

Обсуждается общий вид граничных условий в задачах теплообмена, включая теплообмен в лазерных системах. Кратко рассмотрено возникновение конвекции в плоском слое неравновесного газа с объемным выделением энергии и его зависимость от температуры. Подробно рассмотрена картина конвекции в цилиндрической системе и в системе коаксиальных цилиндров с охлаждаемой центральной частью. Такие системы моделируют реальные лазерные устройства. Показано, что в цилиндрической системе происходит снижение максимальной температуры за счет конвекции, в то время как в системе коаксиальных цилиндров максимальная температура повышается, т. е. анализ теплоотвода в лазерной системе обнаруживает очень важную роль конвекции.

Ключевые слова: конвекция, теплоотвод, коаксиальный лазер.

1. Введение

Анализ теплового режима в лазерных системах является одной из важных задач лазерной физики. Если релаксационные процессы, приводящие к нагреву лазерных систем, изучены достаточно полно, то исследование тепловых потоков, формирующих температурные поля, только начинается. Вместе с тем в теплофизике многие задачи, аналогичные тем, которые встречаются в лазерной технике, уже решены. В частности установлена важная роль конвекции, существенно увеличивающей эффективность теплопроводности.

Цель настоящей работы – показать, что конвекция оказывает существенное влияние на теплоотвод в лазерных системах с диффузионным режимом охлаждения. Подобные задачи возникают, например, в геофизике и в ядерной энергетике [1].

2. Теплоотвод в неравновесной системе

Исторически сложилось так, что кинетические процессы в неравновесном газе вначале исследовались лишь для стационарных однородных условий. Такое упрощение было совершенно естественным для первого этапа исследований, однако представить себе ограниченную стенками неравновесную однородную систему в стационарном состоянии трудно. Действительно, процессы релаксации приводят к нагреву газа, а вынос тепла через стенку порождает градиенты температуры, причём чем больше неравновесность, тем они больше.

Рассмотрим область неравновесного газа 1, отгороженную тонкой стенкой от окружающей среды 2 (рис.1). Если в области 1 выделяется энергия, то система уравнений, описывающих состояние газа, имеет вид

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \operatorname{grad} p - \eta \Delta \mathbf{v} - \frac{\eta}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{v} - \mathbf{f} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dt} - \frac{T}{p} \operatorname{div} (\lambda \nabla T) - \frac{T}{p} \frac{dp}{dt} - \frac{\eta}{2} \sum_{i,k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \operatorname{div} \mathbf{v} \right)^2 = I,$$

где \mathbf{v} , T , p , ρ – скорость, температура, давление и плотность газа; γ – показатель адиабаты без учета колебательных степеней свободы; η и λ – коэффициенты вязкости и поступательно-вращательной теплопроводности; \mathbf{f} – внешняя сила. Следует отметить, что третье уравнение в (1) – это уравнение для энергии, описывающее поступательно-вращательные степени свободы, и поток энергии I , отнесенный к теплоемкости, может включать также член, возникающий вследствие сброса энергии за счет релаксации; при необходимости система (1) может быть дополнена соответствующими релаксационными уравнениями. При расчетах часто используется приближение покоящейся среды. Из системы (1) видно, что это возможно только в некоторых специальных случаях.

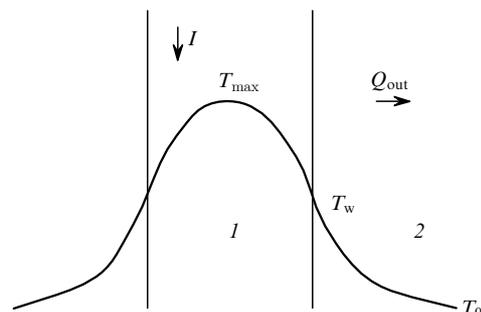


Рис.1. Схема теплоотвода в лазерной системе.

А.И.Осипов, А.В.Уваров. Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, физический факультет, Россия, 119992 Москва, Воробьевы горы; e-mail: uvarov@phys.msu.ru

Поступила в редакцию 20 сентября 2004 г.

Например, в поле силы тяжести направление градиента плотности должно совпадать с направлением силы тяжести, иначе уравнения движения не обращаются в нуль ни при каких условиях. Однако и состояние покоящегося газа может быть неустойчивым. Увеличение градиентов приводит к конвективной неустойчивости и переходу в конвективный режим.

Для покоящегося газа система (1) сводится к уравнению

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{dt} - \frac{T}{p} \operatorname{div}(\lambda \nabla T) = I, \quad (2)$$

которое в стационарном случае и при постоянном значении коэффициента теплопроводности переходит в простое уравнение Лапласа. Такое же уравнение необходимо рассматривать и для окружающей среды (с той лишь разницей, что в окружающей среде $I = 0$). Обычно используется следующее существенное упрощение. Ищется приближенное решение уравнения теплопроводности для окружающей среды, которое позволяет найти тепловой поток, определяемый разностью температур $T_w - T_0$:

$$Q_{\text{out}} = \alpha(T_w - T_0), \quad (3)$$

где α – коэффициент теплопередачи; T_w – температура стенок; T_0 – температура окружающей среды. Примерный профиль температуры представлен на рис.1, а соотношение температур T_{max} (максимальная температура внутри объема), T_w и T_0 определяется безразмерным параметром $Bi = \alpha L / \lambda$, называемым числом Био (L – характерный линейный размер области неравновесного газа). Если $Bi \ll 1$ (плохой внешний теплоотвод и высокая теплопроводность внутри системы), можно считать, что $T_{\text{max}} - T_w \ll T_w - T_0$, т.е. $T_{\text{max}} \approx T_w$. В этом случае $Q_{\text{out}} = \alpha(T_w - T_0) \approx \alpha(T - T_0)$, где $T \approx \text{const}$. Именно это приближение использовалось в теории теплового взрыва Семенова [2]. В таком же приближении осуществляется, как правило, и расчет тепловых неустойчивостей в разрядах и лазерах [3]. Однако в реальных системах, в том числе лазерах, очень часто выполнено противоположное условие, $Bi \gg 1$, особенно при дополнительном водяном охлаждении стенок и большом коэффициенте теплопередачи. Если $Bi \gg 1$, то можно считать, что $T_w \approx T_0$, но внутри объема I (см. рис.1) существует профиль температуры. Это приближение использовалось в теории теплового взрыва Франк-Каменецкого [2], и именно в таком приближении, несмотря на некоторое усложнение задачи, необходимо осуществлять расчет неустойчивостей в разрядах и лазерах. Конечно, возможен и второй, альтернативный механизм переноса энергии, который связан с диффузией на стенку и с последующей гетерогенной релаксацией. Соотношение эффективности этих механизмов определяется числом Льюиса, а учет диффузионного переноса приводит к некоторым дополнительным усложнениям задачи [4]. В настоящей работе данные механизмы рассматриваться не будут.

3. Плоский слой неравновесного газа

Горизонтальный плоский слой неравновесного газа является простейшей моделью, на примере которой исследуется процесс конвекции [5]. В то же время это и простейшая модель лазерной системы, но при условии,

что расстояние между стенками L много меньше характерных поперечных размеров системы. Для горизонтального плоского слоя решение задачи определяется профилем температуры и зависимостью энерговыделения от температуры. Профиль температуры $T(z)$ обусловлен разностью температур на плоскостях и мощностью энерговыделения. При не очень сильном изменении температуры определяющая устойчивость функция

$$Ra(z) = -8 \frac{g\beta L^3}{v\chi} \frac{dT}{dz}$$

(здесь g – ускорение свободного падения; β – коэффициент теплового расширения; χ и v – коэффициенты теплопроводности и кинематической вязкости) аппроксимируется линейной зависимостью

$$Ra(z) = Ra_0 + Ra_T z, \quad (4)$$

т.е. рассматривается параболический профиль температуры. Число $Ra_0 = -g\beta L^3 \Delta T / (v\chi)$ (здесь ΔT – разность температур на стенках) называется числом Рэлея. В отсутствие энерговыделения ($Ra_T = 0$) возникает классическая задача Рэлея – Бенара, для которой конвекция начинается при $Ra_0 > 1708$. Однако появление конвекции обусловлено не только разностью температур. Величина $Ra_T = g\beta L^5 I / (v\chi^2)$ определяется мощностью энерговыделения, и при её увеличении также начинается конвекция.

Кроме того, как указывалось выше, на устойчивость системы влияет зависимость скорости энерговыделения от температуры. Эта скорость определяется зависимостью времени релаксации от температуры и характеризуется параметром $s = -T \tau^{-1} d\tau / (dT)$ [4]. Именно увеличение параметра s приводит к появлению тепловой неравновесности и теплового взрыва в модели Франк-Каменецкого. Возможность теплового взрыва в лазерной системе сильно зависит от способа накачки энергии и теплоотвода вблизи стенок [4].

На рис.2 представлена критическая поверхность, разделяющая в модели постоянной колебательной энергии единицы массы состояния покоя (ниже поверхности) и

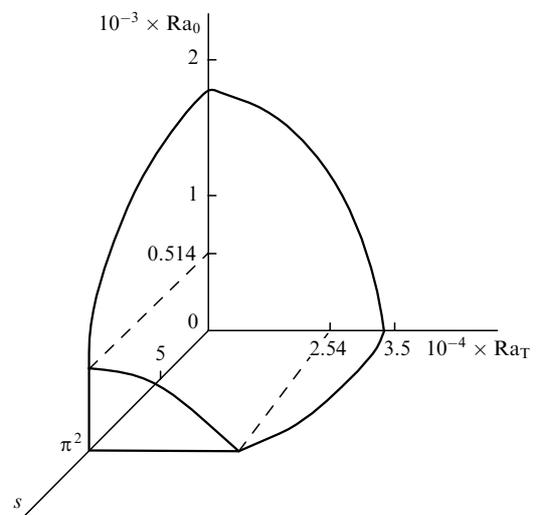


Рис.2. Критическая поверхность $Ra_0(Ra_T, s)$. Состояния, соответствующие точкам выше поверхности, являются конвективно неустойчивыми, ниже – конвективно устойчивыми. Плоскость $s = \pi^2$ – критическая поверхность для возникновения теплового взрыва.

конвективного движения. В ряде случаев использование такой модели оправданно, поскольку существует быстрый энергообмен между электронами и колебательными степенями свободы молекул. Выше критической поверхности неравновесная среда конвективно неустойчива, а плоскость $s = \pi^2$ соответствует параметрам, при которых происходит тепловой взрыв (резкое увеличение температуры), наблюдаемый при $s > \pi^2$. Рис.2 хорошо иллюстрирует различные типы неустойчивости, которые могут возникнуть в системе. Если пересечение плоскости $s = \pi^2$ приводит к резкому росту поступательной температуры, что крайне нежелательно в лазерных системах, то пересечение другой плоскости, отделяющей устойчивые режимы от неустойчивых, вызывает возникновение конвекции, которая существенно улучшает теплоотвод.

Вопрос о том, насколько конвекция улучшает теплоотвод, хорошо изучен для классической задачи Рэлея–Бенара, когда $Ra_T = 0$. Выявлено, что влияние конвекции растет вместе с числом Рэлея. Поток тепла с учетом конвекции может во много раз превышать поток тепла без конвекции. Это означает, что и максимальная температура при объемном энерговыделении может сильно зависеть от условий конвекции.

4. Коаксиальный лазер

Влияние конвекции ярко проявляется в коаксиальном лазере [6]. В центр рабочей области такого лазера, где температура максимальна, вводится охлаждаемый цилиндр, осуществляющий дополнительный теплоотвод и понижающий температуру. При этом возникают проблемы, связанные с характеристиками излучения такого лазера, которые в данной работе не рассматриваются. В таких коаксиальных системах, как уже отмечалось выше, неизбежно возникает конвекция, исследования которой при разных температурах цилиндров проводятся уже давно [7]. В этом случае, как и в плоском слое, при определенных условиях происходит смена режима, но не от покоящейся среды к конвекции, а от режима медленной конвекции к режиму быстрой трехмерной конвекции. Расчеты показывают, что даже при медленной конвекции поток тепла по сравнению со случаем отсутствия конвекции меняется очень существенно. Рассмотрим задачу в приближении постоянного объемного энерговыделения.

Пусть рабочая среда заполняет пространство между двумя коаксиальными цилиндрами с радиусами R_i и R_0 (рис.3), соотношение которых характеризуется безразмерной величиной $\sigma = 2R_i/(R_0 - R_i)$. Цилиндры распо-

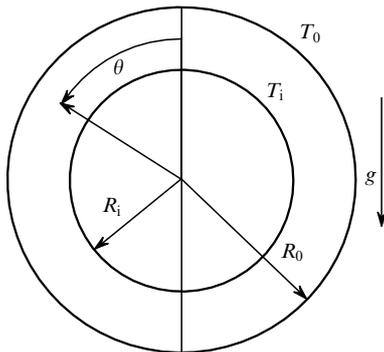


Рис.3. Система коаксиальных цилиндров.
2 Квантовая электроника, т.35, № 2

ложены горизонтально, и сила тяжести направлена перпендикулярно их оси. Температура самих цилиндров поддерживается одинаковой ($T_0 = T_i$), рассмотрение при разных температурах здесь не проводится. В системе происходит постоянное энерговыделение с объемной мощностью Q , не зависящей от координат среды. Для описания такой системы будут использоваться цилиндрические координаты (R, θ) , угловая координата θ отсчитывается от вертикальной плоскости симметрии против часовой стрелки.

Система уравнений гидродинамики (1) в цилиндрических координатах в приближении Обербека – Буссинеска имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \psi &= -\omega, \\ \nabla^2 \omega &= \frac{1}{Pr} \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v \partial \omega}{r \partial \theta} \right) \\ &+ Ra_T \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\nabla^2 \varphi = u \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{v \partial \varphi}{r \partial \theta} - 1 + \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

где

$$\psi = \frac{\Psi}{\chi}; \quad r = \frac{R}{L}; \quad \varphi = \frac{T - T_0}{T_0 q}; \quad u = \frac{UL}{\chi}; \quad v = \frac{VL}{\chi}; \quad q = \frac{IL^2}{\chi T_0};$$

$L = R_0 - R_i$; U и V – радиальная и угловая составляющие скорости соответственно; Pr – число Прандтля. Функция тока Ψ задается следующим образом:

$$U = R^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V = -\frac{\partial \Psi}{\partial R}. \quad (6)$$

Граничные условия формулируются с учетом двух изотермических стенок цилиндров и вертикальной плоскости симметрии при $\theta = 0$ и 180° . Функция тока вдоль каждой из стенок и плоскости симметрии равняется нулю, т.к. отсутствуют потоки вещества через стенки и плоскость. Полагается также, что угловые производные температуры и завихренности ω на плоскости симметрии исчезают. Вдоль стенок завихренность принимает следующий вид:

$$\omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}. \quad (7)$$

Таким образом, на плоскости симметрии

$$\psi = \omega = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0, \quad (8)$$

а на внутреннем и внешнем цилиндрах

$$\psi = u = v = 0, \quad \omega = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}, \quad \varphi|_{r=r_i} = \varphi|_{r=r_0} = 0. \quad (9)$$

Ход решения задачи с учетом конвекции таков. Задается некоторое начальное распределение температуры и функции тока, за эволюцией которого можно проследить при помощи уравнений (5) и граничных условий (7) – (9), в частности можно получить предельный стационарный

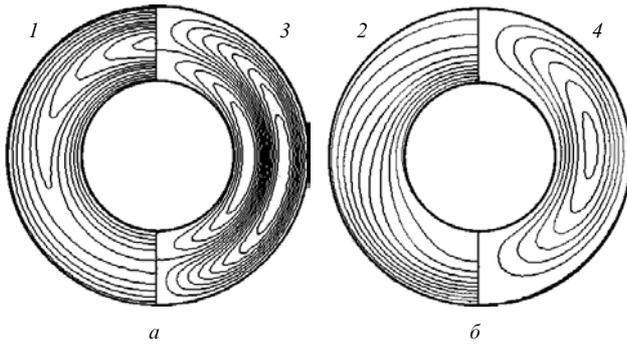


Рис.4. Изотермы (1, 2) и линии тока (3, 4) при объемном энерговыделении и $T_i = T_0$ (а) и в отсутствие энерговыделения при $T_i > T_0$ (б).

режим (если он существует). При численном решении задачи применяется метод конечных разностей. Конечно-разностная схема стандартна, уравнение Пуассона решается методом переменных направлений, для каждого из которых используется метод прогонки.

Типичные изотермы и линии тока представлены на рис.4,а. Для сравнения (рис.4,б) приведено распределение для типичной теплофизической задачи в отсутствие энерговыделения и при более нагретом внутреннем цилиндре ($T_i > T_0$).

Заметим, что в отсутствие энерговыделения в двумерном режиме формируется только один вихрь (в соответствии с направлением градиента температуры), и внутри этого вихря градиент температуры не меняет знак.

Рассмотрим теперь эту систему с точки зрения перспектив создания лазера. В отсутствие конвекции, но при энерговыделении распределение температуры между коаксиальными цилиндрами при $T_i = T_0$ будет иметь следующий вид:

$$\varphi = -\frac{r^2}{4} + \left(r_0^2 \ln \frac{r}{r_i} - r_i^2 \ln \frac{r}{r_0} \right) \left(4 \ln \frac{r_0}{r_i} \right)^{-1}. \quad (10)$$

В пределе при $\sigma \rightarrow 0$ ($r_0 \gg r_i$) получим максимальное значение $\varphi_{\max} = 0.25$, которое соответствует такому же значению φ_{\max} в задаче с энерговыделением для цилиндра, когда $\varphi = (r_0^2 - r^2)/4$. Коаксиальная геометрия, по сравнению с цилиндрической, позволяет снизить в два раза максимальную температуру в системе. С увеличением σ максимальная температура быстро падает, и уже при $\sigma \geq 1$ она слабо отличается от $\varphi_{\max} = 0.125$. Таким образом, если пренебречь конвекцией, то предпочтительной для лазера является коаксиальная, а не цилиндрическая геометрия.

Иное положение возникает при учете конвекции. Как видно из рис.4,а, в этом случае наблюдается сильная неоднородность распределения температуры по углу. Более того, максимальная температура при наличии конвекции больше, чем в ее отсутствие. На рис.5 представлены зависимости максимальной разности температур, достигаемой в системе, от модифицированного числа Рэлея при разных значениях σ ($T_i = T_0$). Видно, что для системы коаксиальных цилиндров с увеличением Ra_T растет и максимальная разность температур ($\varphi_{\max} = (T_{\max} - T_0)/(T_0 q)$).

Причиной роста T_{\max} является одновременное воздействие двух вихрей. Действительно, если рассмотреть верхнюю область системы коаксиальных цилиндров (рис.6) и сравнить энергопотоки с конвекцией и без нее, то видно,

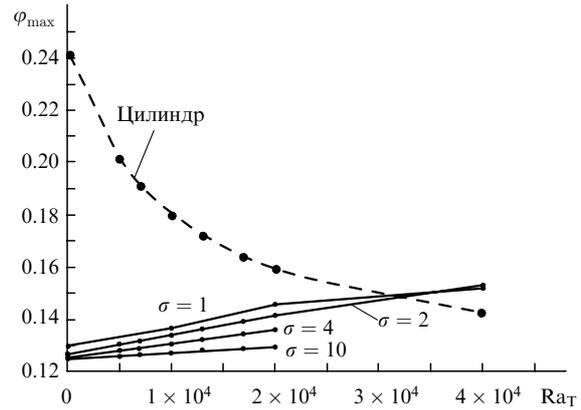


Рис.5. Зависимость максимальной разности температур φ_{\max} от Ra_T при разных σ .

что при учете конвекции происходит дополнительное поступление энергии в систему вдоль линии, разделяющей вихри, поскольку входящие потоки нагреты сильнее, чем выходящие (см.рис.5). Это и приводит к некоторому увеличению максимальной разности температур. Неоднородность температурного распределения по углу, вызываемая угловой неоднородностью тепловых потоков на стенку, может быть охарактеризована числом Нуссельта. Если разбить поверхность на две половины – для углов от 0 до $\pi/2$ и от $\pi/2$ до π , то для $\sigma = 2$ при $Ra_T = 3.5 \times 10^4$, что соответствует рис.5, числа Нуссельта соответственно таковы:

$$\int_0^{\pi/2} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 1.52, \quad \int_{\pi/2}^{\pi} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = 1.29,$$

$$\int_0^{\pi/2} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = 0.92, \quad \int_{\pi/2}^{\pi} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_{r=r_i} = 0.86.$$

Конечно, суммарная величина потока определяется только энерговыделением и сохраняется вне зависимости от конвекции. При нормировании ее на величину энерговыделения (см. (5)) она зависит только от σ и равна для двух полуокружностей $\pi(1 + \sigma)/2$.

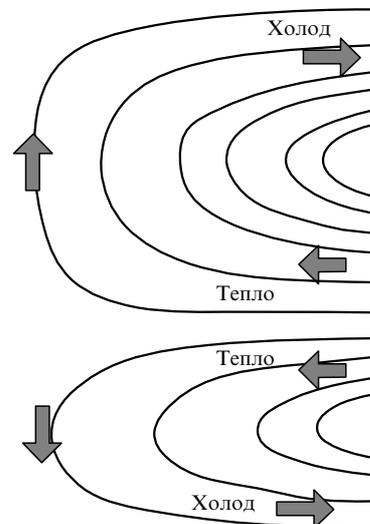


Рис.6. Конвективные потоки в верхней точке системы коаксиальных цилиндров.

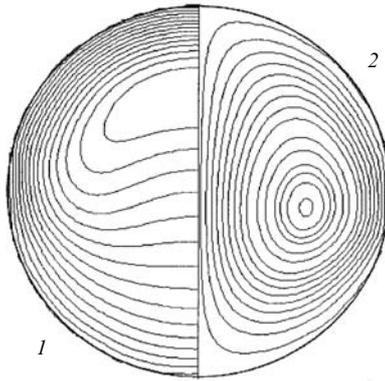


Рис.7. Изотермы (1) и линии тока (2) для цилиндра при объемном энерговыделении, $Ra_T = 2 \times 10^4$.

Задача с объемным энерговыделением в цилиндре решается аналогичным образом. На рис.7 представлены типичные изотермы и линии тока, а на рис.5 – зависимость максимальной разности температур φ_{\max} от Ra_T . Для цилиндрической системы с увеличением энерговыделения эта температура падает, и при некотором значении Ra_T она становится даже меньше, чем в случае системы коаксиальных цилиндров.

Следует, однако, признать, что прямое сравнение результатов здесь проводить нельзя, поскольку величина Ra_T для цилиндра нормируется на радиус, а для коаксиальной системы – на ширину щели, поэтому при одном и том же Ra_T площади сечения будут разными. Если же рассматривать одно и то же энерговыделение и одну и ту же площадь сечения, то соответствующее значение Ra_T для коаксиальных цилиндров будет существенно меньше (а именно в $(1 + \sigma)^{5/2}$ раз). Однако меньшая величина Ra_T означает и существенно меньшую скорость конвекции (следует отметить, что и при одинаковой величине Ra_T в системе коаксиальных цилиндров скорость конвекции существенно меньше из-за наличия двух вихрей). Тем не менее двумерная конвекция в случае цилиндра и системы коаксиальных цилиндров приводит к двум совершенно разным результатам. В первом случае максимальная температура сильно снижается, во втором – несколько

возрастает. По порядку величины эти изменения сравнимы с разностью максимальных температур в отсутствие конвекции.

Таким образом, учет конвекции (которая в этих системах всегда существует) делает предпочтительной для лазеров цилиндрическую геометрию, а не коаксиальную.

Приведенные в работе расчеты касались двумерной модели и не очень больших чисел Рэлея. Кроме того, достаточно просто учитывалось энерговыделение в системе. Однако даже простая модель позволяет выявить основные особенности конвективного течения в системе коаксиальных цилиндров. Увеличение энерговыделения, т. е. Ra_T , приводит к изменению структуры конвективного течения, что необходимо принимать во внимание при выборе геометрии лазерной системы.

5. Выводы

1. Проанализированы граничные условия в общей задаче теплообмена. Показано, что наряду со стандартным условием (3) необходимо при интенсивном внешнем охлаждении использовать условие равенства температур стенок цилиндров и охлаждающей среды, которое приводит к появлению градиентов параметров в неравновесном газе.

2. На основе построенной математической модели дано описание двумерной конвекции в цилиндрической системе и в системе коаксиальных цилиндров. Показано, что с увеличением энерговыклада максимальная температура в цилиндре падает, а в коаксиальных цилиндрах – возрастает, что делает предпочтительными лазеры цилиндрической геометрии.

1. Большов Л.А., Кондратенко П.С., Стрижов В.Ф. *УФН*, **44** (10), 999 (2001).
2. Франк-Каменецкий Д.А. *Диффузия и теплопередача в химической кинетике* (М.: Наука, 1967).
3. Райзер Ю.П. *Физика газового разряда* (М.: Наука, 1980).
4. Осипов А.И., Уваров А.В. *УФН*, **166** (6), 639 (1996).
5. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. *Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости* (М.: Наука, 1972).
6. Habich U., Plum H-D. *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **26**, 183 (1993).
7. Kuehn T.H., Goldstein R.J. *J. Fluid Mechanics*, **74**, 695 (1976).